

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

RENDICONTI

DELLA

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

SERIE SETTIMA - VOLUME IV

(in continuazione della Serie VI
della R. Accademia dei Lincei)



ROMA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

1943

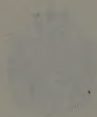
ATTI

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA

DELLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA



Matematica. — *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* — II. *Loro costruzione.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁷⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

4. Dal teorema del n. 3 segue per le rette caratteristiche la nuova proprietà:

Le rette caratteristiche di una trasformazione puntuale T in una coppia (O, O') sono il luogo dei punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici la T in (O, O') .

Le proiettività caratteristiche, in virtù del teorema del n. 3, si possono anche definire così:

Le proiettività caratteristiche, relative alla trasformazione puntuale T nella coppia (O, O') , sono le proiettività subordinate, sulle coppie di direzioni caratteristiche, dalle trasformazioni quadratiche osculatrici a T in (O, O') .

5. Vediamo ora come si costruiscano le trasformazioni quadratiche osculatrici la T in (O, O') quando siano note le rette caratteristiche $r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2, r'_3$ e le proiettività caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ relative a tale coppia.

Si ha intanto:

Assegnati ad arbitrio un punto A_1 su r_1 e un punto A_2 su r_2 ($A_1, A_2 \neq O$) esiste ed è unica la trasformazione quadratica osculatrice di cui A_1, A_2 sono punti singolari.

Infatti è individuata la trasformazione quadratica che ha due punti singolari in A_1, A_2 e che subordina fra le rette $(r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3)$ rispettivamente le proiettività $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; e tale trasformazione quadratica è osculatrice (n. 3).

Per costruire i rimanenti punti singolari della trasformazione giova osservare che:

Al punto singolare A_i (posto su r_i) di una trasformazione quadratica osculatrice T_0 corrisponde nella proiettività caratteristica γ_i il punto in cui

(17) Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

la retta caratteristica r'_i è incontrata dalla retta congiungente i due punti singolari di T_0 non situati su r'_i .

Infatti siccome la proiettività caratteristica γ_i è subordinata da T_0 , il corrispondente di A_i in γ_i è il corrispondente di A_i in T_0 situato su r'_i . Ma ai punti infinitamente vicini ad A_i corrispondono in T_0 i punti della retta congiungente i due punti singolari di T_0 non situati su r'_i , da cui segue l'asserto.

Applicando ripetutamente questa osservazione si ha la seguente costruzione dei punti singolari:

Date le rette caratteristiche r_i, r'_i e le proiettività caratteristiche γ_i ($i = 1, 2, 3$), assegnati ad arbitrio il punto A_1 su r_1 e il punto A_2 su r_2 ($A_1, A_2 \neq O$), si costruisca:

Il punto A_3 in cui la retta $A_1 A_2$ interseca r_3 ; il corrispondente A'_3 di A_3 in γ_3 ; il corrispondente A_1 di A_1 in γ_1 ; il corrispondente A_2 di A_2 in γ_2 ; il punto A'_1 in cui la retta $A'_3 A_2$ interseca r'_1 ; il punto A'_2 in cui la retta $A'_3 A_1$ interseca r'_2 ; il punto \bar{A}_3 in cui la retta $A'_1 A'_2$ interseca r_3 ; il punto A_3 omologo di \bar{A}_3 in γ_3 .

La trasformazione quadratica osculatrice che ha due punti singolari in A_1, A_2 ha per punti singolari (oltre ad A_1, A_2) i punti A_3, A'_1, A'_2, A'_3 .

La costruzione delle trasformazioni quadratiche osculatrici si ottiene semplicemente così:

Date le rette caratteristiche e le proiettività caratteristiche, assegnati arbitrariamente A_1, A_2 , si costruiscano i punti A'_1, A'_2 nel modo sopra indicato e si consideri fra i fasci di centri A_1, A'_1 - e fra quelli di centri A_2, A'_2 - la proiettività che si ottiene dalla γ_3 mediante proiezione delle punteggiate r_3, r'_3 .

La trasformazione quadratica osculatrice che ha due punti singolari in A_1, A_2 è quella generata (nel modo ben noto) dalle due coppie di fasci proiettivi A_1, A'_1 e A_2, A'_2 .

Infatti la trasformazione quadratica così costruita ha in A_1, A_2 due punti singolari ed è osculatrice alla T in (O, O') perchè subordina fra le rette caratteristiche le proiettività caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Osservazione. - Quando di una trasformazione quadratica osculatrice T_0 si conoscono i punti singolari, la conica che corrisponde in T_0 ad una retta t di un piano è individuata, oltre che dai punti singolari A'_1, A'_2, A'_3 , dai tre punti (e ne bastano due!) omologhi nelle proiettività caratteristiche dei tre punti in cui t interseca le rette caratteristiche.

La proiettività fra la rete delle rette di un piano e la rete (omaloidica) delle coniche corrispondenti in T_0 viene così determinata.

6. - La considerazione delle proiettività caratteristiche (n. 2) dà modo di semplificare le equazioni della data trasformazione puntuale T .

Infatti se assumiamo ad arbitrio sulle rette caratteristiche r_1, r_2 i punti *impropri* ed assumiamo poi gli omologhi in γ_1, γ_2 come punti impropri si ha

$$b = c = 0$$

come segue dalle [4], [5].

Si osservi che non esistono tre punti allineati di r_1, r_2, r_3 i cui corrispondenti in $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ siano allineati poichè si è supposto che la trasformazione non sia una proiettività sino all'intorno di 2° ordine di (O, O') ⁽¹⁸⁾:

Si può però assumere il punto omologo in γ_3 del punto all'infinito di r'_3 ($x' = y'$) come punto $(-1, -1)$ e l'omologo in γ_3 del punto all'infinito di r_3 ($x = y$) come punto $(1, 1)$. Dalla [6] segue:

$$a = 1 \quad , \quad d = -1.$$

Le equazioni [1] di T si possono quindi scrivere

$$[7] \quad \begin{cases} x' = x - xy + [3] \\ y' = y - xy + [3] \end{cases}$$

e le equazioni delle proiettività caratteristiche divengono

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ x' = y' &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Dalle [7] segue che le *direzioni caratteristiche e le proiettività caratteristiche determinano completamente la trasformazione puntuale fino all'intorno del 2° ordine*. Segue inoltre che *una trasformazione puntuale fra due piani non possiede invarianti proiettivi nell'intorno del 2° ordine di una coppia di punti corrispondenti*.

Ponendo nelle [7] $y = 0$ si ottiene

$$[8] \quad x' = x + [3]$$

⁽¹⁸⁾ Infatti, se al punto all'infinito di r_3 corrispondesse in γ_3 il punto all'infinito di r'_3 , sarebbe $d = 0$ e la T diverrebbe

$$x' = ax + [3] \quad ; \quad y' = ay + [3]$$

cioè, sino all'intorno del 2° ordine di (O, O') , sarebbe una proiettività.

e la proiettività fra x, x' che approssima la [8] fino all'intorno del 2° ordine di O, O' è la proiettività caratteristica $x' = x$. Analogamente per le altre due proiettività caratteristiche.

7. Determiniamo le equazioni delle ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici a T nella coppia (O, O') .

Per far ciò si potrebbe ricorrere alle costruzioni del n. 5 essendo già note (n. 6) le equazioni delle proiettività caratteristiche. Ma possiamo anche ricorrere alla rappresentazione sulla V_4^6 di SEGRE, dove le trasformazioni quadratiche osculatrici sono rappresentate dalle superficie sezioni con V_4^6 degli S_6 passanti per l' $S(2) = S_3^*$ osculatore in P a Σ (n. 3).

Essendo $b = c = 0, a = 1, d = -1$ (n. 6), le equazioni dell' S_3^* sono (n. 2)

$$X_2 + X_3 - X_7 = 0$$

$$X_4 + X_6 - X_8 = 0$$

$$X_2 - X_4 = 0.$$

Gli S_6 passanti per S_3^* (e non appartenenti a $X_2 - X_4 = 0$) si possono rappresentare mediante le equazioni (λ, μ essendo parametri $\neq \infty$)

$$X_2 + X_3 - X_7 + \mu (X_2 - X_4) = 0$$

$$X_4 + X_6 - X_8 + \lambda (X_2 - X_4) = 0.$$

Per determinare l'intersezione di questi S_6 con V_4^6 basta sostituire nelle equazioni precedenti per le X_i le espressioni [2]. Così facendo si ottengono appunto le equazioni delle trasformazioni quadratiche osculatrici

$$yx' + x' - x + \mu (yx' - xy') = 0$$

$$xy' + y' - y + \lambda (yx' - xy') = 0.$$

Risolvendo rispetto a x', y' , ponendo per $\lambda = 1$ ancora λ e per $\mu = 1$ ancora μ , si conclude:

Le ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici alla trasformazione puntuale T

$$x' = x - xy + [3]$$

$$y' = y - xy + [3]$$

nella coppia $O(0, 0), O'(0, 0)$ sono rappresentate da

$$x' = x \frac{\lambda x + (\mu + 1)y - 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)}$$

$$y' = y \frac{(\lambda + 1)x + \mu y - 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)xy - (\lambda x - 1)(\mu y - 1)}$$

λ, μ essendo parametri $\neq \infty$.

Osserviamo che nel piano (x, y) l'ascissa del punto singolare della trasformazione appartenente all'asse x è $\frac{1}{\lambda}$ e l'ordinata del punto singolare della trasformazione appartenente all'asse y è $\frac{1}{\mu}$ ⁽¹⁹⁾.

8. Le proiettività tangenti in (O, O') alla trasformazione puntuale T (n. 2) sono rappresentate dalle equazioni

$$[9] \quad \begin{cases} x' = \frac{x}{\lambda x + \mu y + 1} \\ y' = \frac{y}{\lambda x + \mu y + 1} \end{cases}$$

dove λ, μ sono arbitrari. Quindi tali proiettività sono ∞^2 . Esse subordinano nei fasci di rette corrispondenti di centri O, O' la stessa proiettività ω (n. 2) ⁽²⁰⁾. Le proiettività caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ individuano tra le proiettività tangenti tre di esse che appaiono quindi dotate di particolare interesse.

Infatti è individuata fra i piani π, π' la proiettività \mathfrak{S}_3 che subordina fra r_1, r'_1 la proiettività γ_1 e fra r_2, r'_2 la proiettività γ_2 ; e le equazioni di \mathfrak{S}_3 sono (n. 6)

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

e siccome rientra nel tipo [9] essa è una proiettività tangente a T in (O, O') .

Analogamente è individuata fra π, π' la proiettività \mathfrak{S}_2 che subordina fra r_1, r'_1 la γ_1 e fra r_3, r'_3 la γ_3 ; le equazioni di \mathfrak{S}_2 sono (n. 6)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{x+1} \\ y' &= \frac{y}{x+1} \end{aligned}$$

\mathfrak{S}_2 è distinta da \mathfrak{S}_3 ed è tangente in (O, O') a T .

⁽¹⁹⁾ I parametri λ, μ sono $\neq \infty$ d'accordo col fatto che nessuno dei punti singolari delle trasformazioni quadratiche osculatrici cade in $O(O')$.

⁽²⁰⁾ Sulla V_4^6 di SEGRE una proiettività (non degenera) fra i due piani è rappresentata da una superficie di VERONESE. Se Σ è la superficie che rappresenta la T sopra V_4^6 , P il punto che rappresenta la coppia (O, O') e α il piano tangente in P a Σ , le ∞^2 proiettività tangenti in (O, O') a T sono rappresentate dalle ∞^2 superficie di VERONESE di V_4^6 che passano per P e che hanno per piano tangente in P il piano α .

La proiettività ω fra i fasci di rette di centri O, O' — considerata come reciprocità degenera fra i punti dei due piani — è rappresentata sopra V_4^6 dalla sezione (di V_4^6) con $l\bar{S}_7$ ($X_2 - X_4 = 0$) di cui alla nota ⁽¹²⁾. Orbene: tutte le ∞^2 superficie di VERONESE precedenti appartengono a questo \bar{S}_7 .

Infine è individuata fra π, π' la proiettività \mathfrak{S}_1 che subordina fra r_2, r'_2 la γ_2 e fra r_3, r'_3 la γ_3 ; le equazioni di \mathfrak{S}_1 sono (n. 6)

$$x' = \frac{x}{y+1}$$

$$y' = \frac{y}{y+1}$$

\mathfrak{S}_1 è distinta da \mathfrak{S}_2 e da \mathfrak{S}_3 ed è tangente in (O, O') a T .

Le tre proiettività $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ si potrebbero chiamare *le proiettività tangenti caratteristiche* alla T nella coppia (O, O') . Queste si possono anche definire come le proiettività fra i due piani che approssimano la T , lungo due coppie di direzioni caratteristiche corrispondenti, fino all'intorno del 2° ordine di (O, O') ⁽²¹⁾.

9. Osserviamo infine:

Non esistono trasformazioni di DE-JONQUIÈRES (in particolare quindi trasformazioni cubiche) che approssimino una trasformazione T generica nell'intorno del 3° ordine della coppia (O, O') .

Per la dimostrazione ricorriamo anche qui alla V_4^6 di SEGRE.

Sia T una trasformazione puntuale generica e Σ la superficie che la rappresenta sulla V_4^6 di SEGRE. Sia P il punto che rappresenta la coppia (O, O') di punti corrispondenti. Essendo Σ una superficie generica di V_4^6 , $l'S(3)$ osculatore in P a Σ coincide con $l'S_8$ ambiente di V_4^6 .

D'altra parte una trasformazione T_0 di DE-JONQUIÈRES ⁽²²⁾ è rappresentata sulla V_4^6 di SEGRE da una superficie Σ_0 che appartiene all' S_7 .

⁽²¹⁾ Le tre proiettività caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ fra le tre coppie di rette caratteristiche $(r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3)$ si comportano mutuamente in modo particolare. Può quindi avere interesse vedere come date tre rette complanari r_1, r_2, r_3 uscenti da un punto O e tre rette complanari r'_1, r'_2, r'_3 uscenti da un punto O' — si possano costruire fra le tre coppie $(r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3)$ tre proiettività che si comportano come le proiettività caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Si può procedere così: Si assegni fra r_1, r'_1 una proiettività γ_1 in cui si corrispondano O, O' , ma del resto arbitraria; si assegnino poi arbitrariamente sulle rette r_2, r'_2 due punti A_2, A'_2 e sia γ_2 la proiettività subordinata fra r_2, r'_2 dalla proiettività, fra i due piani, individuata: 1) dalla proiettività ω fra i fasci O, O' in cui si corrispondono $(r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3)$; 2) da γ_1 ; 3) dalla coppia A_2, A'_2 .

Analogamente, assegnati arbitrariamente su r_3, r'_3 due punti A_3, A'_3 , sia γ_3 la proiettività subordinata fra r_3, r'_3 dalla proiettività, fra i due piani, individuata: 1) da ω ; 2) da γ_1 ; 3) dalla coppia A_3, A'_3 .

Si noti che nella proiettività, fra i due piani, individuata da γ_2, γ_3 si corrispondono le rette r_1, r'_1 .

⁽²²⁾ Com'è ben noto, si chiamano trasformazioni di DE-JONQUIÈRES le trasformazioni cremoniane relative a reti omaloidiche d'ordine n ($n \geq 2$) aventi un punto base $(n-1)$ -plo e $2(n-1)$ punti base semplici.

Infatti una trasformazione di DE-JONQUIÈRES fra i due piani (x', y') , (x, y) si può sempre rappresentare con le equazioni

$$[10] \quad x' = x \quad y' = \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)}$$

essendo $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ funzioni razionali in x . La superficie Σ_0 si ottiene ponendo nelle [2] per x', y' le [10]. Appare così che Σ_0 appartiene all' S_7 di equazione

$$X_3 - X_7 = 0^{(23)}.$$

L' $S(3)$ osculatore in P a Σ non può quindi coincidere con l' $S(3)$ osculatore in P a Σ_0 (essendo questo un S_7) e perciò T e T_0 non si approssimano nell'intorno del 3° ordine di (O, O') .

⁽²³⁾ Questo S_7 , ambiente di Σ_0 , è tangente a V_4^3 nel punto che rappresenta la coppia dei punti singolari $(n-1)$ -pli.

Meccanica. — *Invarianti ed eminvarianti cubici dei tensori.* Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

In collegamento a due Note precedenti ⁽²⁾ si vuole ora mettere in rilievo gli invarianti cubici dei tensori pari e gli eminvarianti cubici dei tensori dispari.

1. — *Invarianti cubici dei tensori pari.* — Siano

$$[1] \quad T_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_m}$$

le componenti cartesiane di un tensore $2m$ -plo e

$$[2] \quad \delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_m k_m} \cdot \delta_{j_1 k_1} \dots \delta_{j_m k_m} \cdot \delta_{p_1 q_1} \dots \delta_{p_m q_m}$$

quelle della potenza $3m$ -ma del tensore fondamentale, essendo notoriamente: $i_1 \dots i_m$; $k_1 \dots k_m$; $j_1 \dots j_m$; $h_1 \dots h_m$; $p_1 \dots p_m$; $q_1 \dots q_m$ sei gruppi di disposizioni con ripetizione della classe m degli indici $1, 2, 3$.

Variando in tutti i modi possibili le disposizioni con ripetizione dei $6m$ indici su indicati si ottengono tutte le potenze $3m$ -me del tensore fondamentale; quelle distinte, cioè linearmente indipendenti, sono in numero ⁽³⁾

$$[3] \quad N_c = \sum_{0}^{3m} \left[\binom{3m}{2k} - \frac{1}{2} \binom{6m}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}.$$

Si indichino brevemente

$$[4] \quad \Delta_{i_1 \dots i_m}^{(r)} \quad (r=1, \dots, N_c)$$

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1942-XX.

⁽²⁾ *Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori.* Questi « Rendiconti », ser. VII, vol. I (1940-XVIII), pag. 337; *Invarianti quadratici dei tensori.* Ibidem, vol. II (1940-XIX), pag. 511.

⁽³⁾ RACAÏ, *Determinazione del numero dei tensori isotropi indipendenti di rango n .* « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XVII, 1^o sem. 1933-XI, pag. 389. Basta cambiare nella formola citata m in $3m$.

le componenti cartesiane di una generica delle N_c potenze su accennate; ponendo

$$[5] \quad C_r = T_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_m} \cdot T_{j_1 \dots j_m h_1 \dots h_m} \cdot T_{p_1 \dots p_m q_1 \dots q_m} \cdot \Delta_{i_1 \dots q_m}^{(r)},$$

dove nel secondo membro si sottintendono le sommatorie da 1 a 3 di tutti gli indici indicati in basso, risultano definiti *gli* N_c *invarianti cubici distinti* C_1, \dots, C_{N_c} *del tensore 2 m-plo di componenti cartesiane* [1].

2. — *Eminvarianti cubici dei tensori dispari.* — Siano

$$[6] \quad T_{ihli_1 \dots i_{m-1} h_1 \dots h_{m-1}}$$

le componenti cartesiane di un tensore $(2m+1)$ -plo; introduciamo il tensore triplo emisimmetrico ed emisotropo di componenti cartesiane ⁽¹⁾

$$\varepsilon_{ihl} = \begin{cases} 0, & \text{se } i, h, l \text{ non sono distinti,} \\ (-1)^c, & \text{se } i, h, l \text{ sono distinti,} \end{cases}$$

designando c la classe della permutazione i, h, l rispetto alla fondamentale, 1, 2, 3 per cui risulta:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1.$$

Ciò si può esprimere ancora più semplicemente introducendo tre vettori λ, μ, ν e ponendo, più in generale ancora:

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \lambda \times \mu \wedge \nu.$$

Si consideri la potenza $(m-1)$ -ma del tensore fondamentale, le cui componenti cartesiane sono

$$\delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

e si prenda in esame il tensore $(2m+1)$ -plo di componenti cartesiane

$$[7] \quad \varepsilon_{ihl} \delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

che è manifestamente *emisotropo*.

Accanto alle componenti [6] e [7] si considerino le seguenti:

$$[8] \quad T_{jkr} \delta_{j_1 k_1} \dots \delta_{j_{m-1} k_{m-1}}, \quad \varepsilon_{jkr} \delta_{j_1 k_1} \dots \delta_{j_{m-1} k_{m-1}},$$

$$[9] \quad T_{pqrs} \delta_{p_1 q_1} \dots \delta_{p_{m-1} q_{m-1}}, \quad \varepsilon_{pqrs} \delta_{p_1 q_1} \dots \delta_{p_{m-1} q_{m-1}}.$$

⁽¹⁾ CISOTTI, *Meccanica Razionale*, quarta edizione; Libreria Editrice Politecnica, Milano (1942-XX), pag. 354.

Si consideri il seguente prodotto

$$T_{ihl i_1 \dots i_{m-1} h_1 \dots h_{m-1}} \cdot T_{jkr j_1 \dots j_{m-1} k_1 \dots k_{m-1}} \cdot T_{pqe p_1 \dots p_{m-1} q_1 \dots q_{m-1}} \cdot \varepsilon_{ihl} \cdot \varepsilon_{jkr} \cdot \varepsilon_{pqe} \cdot \delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}} \cdot \delta_{j_1 k_1} \dots \delta_{j_{m-1} k_{m-1}} \cdot \delta_{p_1 q_1} \dots \delta_{p_{m-1} q_{m-1}}.$$

Variando in tutti i modi possibili le disposizioni con ripetizione dei $3(2m+1)$ indici su indicati si ottengono ⁽¹⁾

$$[10] \quad N_e = \sum_k^{3m+2} \left[\binom{6m+3}{k} - \frac{1}{2} \binom{6m+3}{2k+1} \right] \binom{2k}{k}$$

termini distinti; indichiamo brevemente con

$$\Delta_{ihl jkr pqe}^{(r')}$$

le componenti cartesiane di uno generico dei prodotti [7] e delle seconde parti di [8], [9]. Ponendo

$$[11] \quad C_{r'} = T_{ihl i_1 \dots i_{m-1} h_1 \dots h_{m-1}} \cdot T_{jkr j_1 \dots j_{m-1} k_1 \dots k_{m-1}} \cdot T_{pqe p_1 \dots p_{m-1} q_1 \dots q_{m-1}} \cdot \Delta_{ihl jkr pqe}^{(r')} \quad (r' = 1, \dots, N_e)$$

dove nel secondo membro si intendono saturati tutti gli indici in basso, si ottengono tutti gli N_e *em invarianti cubici* C'_1, \dots, C'_{N_e} , del tensore $(2m+1)$ -plo di componenti cartesiane [6].

3. - *Applicazione: invarianti cubici di tensori doppi.* - Riferendoci al n. 1, in particolare per $m=1$ si ha un tensore doppio di componenti cartesiane T_{ik} ; corrispondentemente la [3] fornisce

$$N_e = \sum_k^3 \left[\binom{3}{2k} - \frac{1}{2} \binom{6}{2k-1} \right] \binom{2k}{k} = 15.$$

Si hanno 15 invarianti cubici per un tensore doppio; per la più comoda specificazione poniamo:

$$S_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) \quad , \quad E_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}) \quad , \quad I = T_{ii} \quad , \\ T^2 = T_{ii}^2 \quad , \quad S^2 = S_{ik}^2 \quad , \quad E^2 = E_{ik}^2,$$

con che: S_{ik} sono le componenti della parte simmetrica del tensore T e E_{ik} quelle della parte emisimmetrica, I è l'invariante lineare di T , T^2 è

⁽¹⁾ RACAÏ, loco citato; basta cambiare nella formola citata m in $3m+1$.

il quadrato del modulo del tensore stesso, S^2 e E^2 sono i quadrati dei moduli dei rispettivi tensori. Con ciò applicando la [5] si ottengono i seguenti 15 invarianti cubici:

- [12] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ip} \delta_{hq} \delta_{kr} = T_{ii} T_{hh} T_{kk} = (T_{ii})^3 = I^3$
 [13] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ip} \delta_{hk} \delta_{qr} = T_{ii} T_{hq} T_{kq} = T_{ii} T_{hq}^2 = T^2 T_{ii} = T^2 I$
 [14] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ip} \delta_{hr} \delta_{qk} = T_{ii} T_{hq} T_{qh} = T_{ii} T_{hq} T_{qh} = (S^2 - E^2) T_{ii} = (S^2 - E^2) I$
 [15] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{hq} \delta_{ik} \delta_{pr} = T_{ip}^2 T_{hh} = T_{hh} T_{ip}^2 = T^2 T_{hh} = T^2 I$
 [16] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{hq} \delta_{ir} \delta_{pk} = T_{ip} T_{hk} T_{pi} = T_{hh} T_{ip} T_{pi} = (S^2 - E^2) I$
 [17] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{kr} \delta_{ih} \delta_{pq} = T_{ip}^2 T_{kk} = T^2 I$
 [18] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{kr} \delta_{iq} \delta_{ph} = T_{ip} T_{pi} T_{kk} = T_{kk} T_{ip} T_{pi} = (S^2 - E^2) I$
 [19] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ih} \delta_{kp} \delta_{qr} = T_{ik} T_{lq} T_{kl}$
 [20] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ih} \delta_{kq} \delta_{pr} = T_{ip} T_{ik} T_{kp}$
 [21] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{kp} \delta_{iq} \delta_{hr} = T_{ik} T_{hi} T_{kh}$
 [22] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{qr} \delta_{ik} \delta_{hp} = T_{ih} T_{hq} T_{iq}$
 [23] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{ik} \delta_{pq} \delta_{hr} = T_{ip} T_{hp} T_{ih}$
 [24] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{pq} \delta_{ir} \delta_{kh} = T_{ip} T_{kp} T_{ki}$
 [25] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{hp} \delta_{kq} \delta_{ir} = T_{ih} T_{hk} T_{ki}$
 [26] $T_{ip} T_{hq} T_{kr} \delta_{hk} \delta_{pr} \delta_{iq} = T_{ip} T_{hi} T_{hp}$

Di questi quindici invarianti cubici solamente cinque sono distinti, precisamente

$$[27] \quad I^3, \quad T^2 I, \quad (S^2 - E^2) I, \quad T_{ik} T_{iq} T_{kq}, \quad T_{ik} T_{qi} T_{ki};$$

il primo è [12], al secondo appartengono [13], [15] e [17]; al terzo [14], [16] e [18]; al quarto [19], [20], [22], [23], [24], e [26]; al quinto [21] e [25]. Il primo, il secondo e il terzo sono *impropri*: il primo perchè cubo dell'invariante lineare, il secondo è prodotto del quadrato del modulo del tensore per il suo invariante lineare, il terzo è il prodotto dell'invariante lineare per la differenza dei quadrati dei moduli della parte simmetrica e della parte emisimmetrica del tensore; sono *invarianti propri* solamente i due ultimi invarianti cubici. Se $E = 0$, cioè il tensore è simmetrico, i due invarianti propri coincidono; se è $S = 0$, cioè il tensore è emisimmetrico, i due invarianti propri sono opposti.

Meccanica. — *Su certe identità differenziali cui soddisfano le funzioni γ delle equazioni dinamiche di Volterra-Hamel.* Nota ⁽¹⁾ di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. In una Nota precedente ho enunciato un teorema che generalizza ai sistemi dinamici a vincoli anolonomi reonomi il classico teorema di JACOBI della meccanica analitica. Mi propongo in questo lavoro di preparare il lettore alla dimostrazione sviluppando le considerazioni analitiche necessarie relativamente alle equazioni del moto di quei sistemi. Avremo così occasione di mettere in rilievo alcune identità analoghe a quelle già da tempo stabilite dal MAURER e dallo SCHUR nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni.

Vedremo in una Nota successiva che il complesso delle identità cui alludiamo gioca un ufficio essenziale nella dimostrazione del teorema di JACOBI generalizzato.

2. Usiamo senz'altro le notazioni del § 2 della Nota citata e calcoliamo i covarianti bilineari delle forme pfaffiane

$$dx_i = \sum_1^n \alpha_{ik} dq_k + \alpha_{i,n+1} dt \quad (i = 1, \dots, n)$$

supponendo che la caratteristica differenziale d indichi variazione durante il moto e la caratteristica δ differenziazione virtuale, cioè tale che

$$\delta t = 0.$$

Si ha

$$\delta x_i = \sum_1^n \alpha_{ik} \delta q_k$$

e

$$\begin{aligned} d\delta x_i - \delta dx_i &= \sum_1^n d\alpha_{ik} \delta q_k + \sum_1^n \alpha_{ik} d\delta q_k - \sum_1^n \delta \alpha_{ik} dq_k - \sum_1^n \alpha_{ik} \delta dq_k - \delta \alpha_{i,n+1} dt = \\ &= \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \right) \delta q_k dq_l + \sum_1^n \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t} dt \delta q_k - \sum_1^n \frac{\partial \alpha_{i,n+1}}{\partial q_k} \delta q_k dt \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1942-XX.

essendo

$$d\delta q_k = \delta dq_k, \quad \delta dt = d\delta t = 0.$$

Ma si ha

$$dq_l = \sum_1^n \beta_{ls} dx_s + \beta_{l, n+1} dt, \quad \delta q_k = \sum_1^n \beta_{kr} \delta x_r$$

quindi

$$\begin{aligned} d\delta x_i - \delta dx_i &= \sum_1^n \left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \right) \sum_1^n \beta_{kr} \delta x_r \left(\sum_1^n \beta_{ls} dx_s + \beta_{l, n+1} dt \right) + \\ &+ \sum_1^n \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t} \sum_1^n \beta_{kr} \delta x_r dt - \sum_1^n \frac{\partial \alpha_{i, n+1}}{\partial t} \sum_1^n \beta_{kr} \delta x_r dt = \\ &= \sum_1^n \gamma_{rs}^i \delta x_r dx_s + dt \sum_1^n \gamma_{r, n+1}^i \delta x_r \end{aligned}$$

avendo posto

$$[1] \quad \gamma_{rs}^i = \sum_1^n \beta_{kl} \beta_{kr} \beta_{ls} \left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \right)$$

$$[2] \quad \gamma_{r, n+1}^i = \sum_1^n \beta_{kl} \beta_{kr} \beta_{l, n+1} \left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial \alpha_{il}}{\partial q_k} \right) + \sum_1^n \beta_{kr} \left(\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{i, n+1}}{\partial q_k} \right).$$

Si ha così

$$[3] \quad d\delta x_i - \delta dx_i = dt \sum_1^n \left(\sum_1^n \gamma_{rs}^i \omega_s + \gamma_{r, n+1}^i \right) \delta x_r$$

e quindi anche

$$[3'] \quad \frac{d\delta x_i}{dt} - \frac{\delta dx_i}{dt} = \sum_1^n \left(\sum_1^n \gamma_{rs}^i \omega_s + \gamma_{r, n+1}^i \right) \delta x_r \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le funzioni γ_{rs}^i ($i, r, s = 1, \dots, n$) sono tali che

$$[4] \quad \begin{cases} \gamma_{rs}^i = -\gamma_{sr}^i \\ \gamma_{rr}^i = 0 \end{cases} \quad (i, r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Se si definisce l'operazione differenziale

$$[5] \quad X_k = \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (k = 1, \dots, n),$$

cui corrisponde la trasformazione infinitesima

$$X_k f = \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

e si forma l'alternata di due siffatte operazioni, diciamo X_r, X_s , si trova ⁽¹⁾

$$[6] \quad (X_r X_s) = \sum_1^n \gamma_{rs}^i X_i.$$

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè le γ_{rs}^i si riducano a costanti è che le n trasformazioni infinitesime $X_i f$ ($i = 1, \dots, n$) generino un gruppo continuo finito ad n parametri.

Le funzioni γ_{rs}^i soddisfanno alle seguenti fondamentali identità scoperte dal MAUREL e dallo SCHUR (1)

$$[7] \quad \sum_1^n \left(\beta_{ji} \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial q_j} - \beta_{jk} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \right) - \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{ik}^r = 0 \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n)$$

Nelle equazioni [3'] che HEYD chiama *di transitività* (*Transitivitäts- oder Uebergangsgleichungen*) figurano anche le funzioni $\gamma_{r\,n+1}^i$ che provengono dal carattere non omogeneo delle $\frac{dx_i}{dt}$ come funzioni delle q .

Qui dimostriamo le seguenti identità

$$[8] \quad \sum_1^n \left(\beta_{ji} \frac{\partial \beta_{l\,n+1}}{\partial q_j} - \beta_{j\,n+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} + \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{i\,n+1}^r \quad (i, l = 1, 2, \dots, n)$$

Trasformiamo la somma

$$[9] \quad \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{i\,n+1}^r = \sum_1^n \beta_{l\sigma} \beta_{\sigma\,n+1} \beta_{lr} \left(\frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial q_l} \right) + \sum_1^n \beta_{l\sigma} \beta_{\sigma i} \beta_{lr} \left(\frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_{r\,n+1}}{\partial q_l} \right).$$

Osserviamo che

$$\sum_1^n \beta_{l\sigma} \alpha_{r\sigma} = \sum_1^n \alpha_{r\sigma} \alpha_{(l\sigma)} = \begin{cases} 0 & i \neq r \\ 1 & i = r. \end{cases}$$

Dunque

$$\sum_1^n \beta_{l\sigma} \frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial t} = - \sum_1^n \alpha_{r\sigma} \frac{\partial \beta_{l\sigma}}{\partial t}$$

(1) Cfr. per esempio, U. AMALDI, *Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni*, Cap. 2º, § 4, Corso del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, Libreria dell'Università di Roma, 1942.

$$\sum_1^n \beta_{r\varrho} \beta_{lr} \beta_{\varrho i} \frac{\partial \alpha_{r\varrho}}{\partial t} = - \sum_1^n \beta_{r\varrho} \beta_{lr} \alpha_{r\varrho} \frac{\partial \beta_{\varrho i}}{\partial t} = - \sum_1^n \beta_{\varrho} \frac{\partial \beta_{\varrho i}}{\partial t} \sum_1^n \alpha_{r\varrho} \alpha^{(r l)} = - \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t}.$$

Inoltre si ha

$$\sum_1^n \beta_{r\varrho} \beta_{\varrho i} \beta_{lr} \frac{\partial \alpha_{r n+1}}{\partial q_{\varrho}} = \sum_1^n \alpha^{(i\varrho)} \sum_1^n \alpha^{(r l)} \frac{\partial \alpha_{r n+1}}{\partial q_{\varrho}}.$$

Ma da

$$\sum_1^n \alpha^{(r l)} \alpha_{r n+1} = - \beta_{l n+1}$$

si deduce derivando rispetto a q_{ϱ}

$$\sum_1^n \left(\alpha^{(r l)} \frac{\partial \alpha_{r n+1}}{\partial q_{\varrho}} + \alpha_{r n+1} \frac{\partial \alpha^{(r l)}}{\partial q_{\varrho}} \right) = - \frac{\partial \beta_{l n+1}}{\partial q_{\varrho}}.$$

Si ha così

$$\begin{aligned} \sum_1^n \beta_{r\varrho} \beta_{\varrho i} \beta_{lr} \frac{\partial \alpha_{r n+1}}{\partial q_{\varrho}} &= - \sum_1^n \beta_{\varrho i} \frac{\partial \beta_{l n+1}}{\partial q_{\varrho}} - \sum_1^n \beta_{\varrho i} \alpha_{r n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_{\varrho}} = \\ &= - \sum_1^n \beta_{ji} \frac{\partial \beta_{l n+1}}{\partial q_j} - \sum_1^n \beta_{rj} \beta_{ji} \alpha_{r n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_j}. \\ \sum_1^n \beta_{r\varrho\sigma} \beta_{\varrho i} \beta_{\sigma n+1} \beta_{lr} \frac{\partial \alpha_{r\varrho}}{\partial q_{\sigma}} &= \sum_1^n \beta_{\varrho\sigma} \beta_{\varrho i} \beta_{\sigma n+1} \sum_1^n \alpha^{(r l)} \frac{\partial \alpha_{r\varrho}}{\partial q_{\sigma}} = - \sum_1^n \beta_{r\varrho\sigma} \beta_{\varrho i} \beta_{\sigma n+1} \alpha_{r\varrho} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_{\sigma}} = \\ &= - \sum_1^n \beta_{r\sigma} \beta_{\sigma n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_{\sigma}} \sum_1^n \alpha^{(i\varrho)} \alpha_{r\varrho} = - \sum_1^n \beta_{jn+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j}, \\ \sum_1^n \beta_{r\varrho\sigma} \beta_{\varrho i} \beta_{\sigma n+1} \beta_{lr} \frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial q_{\varrho}} &= \sum_1^n \beta_{r\varrho\sigma\tau} \beta_{\varrho i} \beta_{lr} \alpha^{(\tau\sigma)} \alpha_{\tau n+1} \frac{\partial \alpha_{r\sigma}}{\partial q_{\varrho}} = - \sum_1^n \beta_{rj} \beta_{ji} \alpha_{r n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella [9], si trova in definitiva

$$\begin{aligned} \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{i n+1}^r &= - \sum_1^n \beta_{jn+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} - \sum_1^n \beta_{rj} \beta_{ji} \alpha_{r n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_j} - \\ &- \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} + \sum_1^n \beta_{ji} \frac{\partial \beta_{l n+1}}{\partial q_j} + \sum_1^n \beta_{rj} \beta_{ji} \alpha_{r n+1} \frac{\partial \beta_{lr}}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

cioè la [8].

È solo per l'uso che ne faremo che abbiamo messo in evidenza le identità [8], giacchè, dal punto di vista matematico, esse sono certamente incluse nelle identità [7] quando si estenda la sommatoria da 1 ad $n+1$ dopo avere introdotto una $n+1$ -ma x ed una $n+1$ -ma q ponendo $x_{n+1} = q_{n+1} = t$.

Si ha allora

$$\beta_{n+1 k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad \beta_{n+1 n+1} = 1.$$

La dimostrazione che abbiamo fatta è analoga a quella che serve per stabilire le [7].

3. *Le equazioni di Volterra-Hamel.* Le equazioni di transitività permettono di stabilire in maniera concettualmente limpida le equazioni del moto in quasi coordinate per trasformazione dell'equazione centrale di LAGRANGE nella forma sostanzialmente riconosciuta dal VOLTERRA (2), (3), (8). Questi ha per primo stabilito le equazioni del moto di un sistema dinamico a vincoli anolonomi separando i termini dovuti all'anolonomia; altre forme delle equazioni, come ricordammo nella precedente Nota, sono dovute ad APPELL, al MAGGI, ecc. Le equazioni che qui vogliamo fissare col processo dianzi indicato si prestano egregiamente alla generalizzazione del teorema di JACOBI; esse furono scoperte dal BOLTZMANN (4) nel 1902, e ritrovate, nel quadro di ricerche generali sul soggetto, da HAMEL (5) nel 1904.

L'illustre autore di Berlino ha dato alle equazioni i nomi di EULERO e LAGRANGE perchè esse furono già scoperte da EULERO nel caso particolare della dinamica dei sistemi rigidi e perchè generalizzano la classica forma delle equazioni lagrangiane. Noi proponiamo di chiamarle *equazioni di Volterra-Hamel*.

Osserviamo infine che in un caso particolare, che ha significato nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni, le equazioni furono scoperte nel 1901 dal POINCARÉ (6).

Per un sistema olonomo, indicando con T la forza viva e con \mathcal{L} il lavoro virtuale delle forze impresse, si ha l'equazione.

$$[10] \quad \delta T + \delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

che gli autori tedeschi chiamano equazione centrale di LAGRANGE.

Il BELTRAMI (7) ha richiamato l'attenzione dei cultori di meccanica analitica sull'importanza di quest'equazione, dalla quale, com'è noto, si deduce, per integrazione, l'equazione variazionale di HAMILTON.

Il VOLTERRA (8), ispirandosi al BELTRAMI, l'ha trasformata per attribuirle un significato valido anche per i sistemi anolonomi.

Applicando le considerazioni precedenti, possiamo ragionare come segue. Indichiamo con

$$[11] \quad T^* = c_{00} + \sum_1^n c_{0i} \omega_i + \frac{1}{2} \sum_1^n c_{ik} \omega_i \omega_k$$

la forza viva del sistema espressa con le variabili q, ω, t quale si ottiene da

$$T(q; \dot{q}; t)$$

sostituendo al posto delle \dot{q} le espressioni [4] della Nota precedente.

Si ha

$$\sum_1^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \sum_1^n \alpha_{ki} \delta q_i.$$

Ma

$$\delta x_k = \sum_1^n \alpha_{ki} \delta q_i,$$

dunque

$$[12] \quad \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k} \delta x_k.$$

Inoltre, il lavoro virtuale $d\mathcal{Q}$ delle forze impresse è

$$[13] \quad \delta\mathcal{Q} = \sum_1^n Q_i \delta q_i = \sum_1^n Q_i \beta_{ik} \delta x_k = \sum_1^n \delta x_k \sum_1^n \beta_{ik} Q_i = \sum_1^n Q_k^* \delta x_k$$

avendo posto

$$[14] \quad Q_k^* = \sum_1^n \beta_{ik} Q_i.$$

Si ha dunque l'equazione di LAGRANGE-VOLTERRA

$$[15] \quad \delta T^* + \sum_1^n Q_k^* \delta x_k = \frac{d}{dt} \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \delta x_i.$$

Da essa seguono le equazioni di VOLTERRA-HAMEL con le seguenti trasformazioni.

Si ha

$$\delta T^* = \sum_1^n \left(\frac{\partial T^*}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \delta \omega_i \right)$$

e

$$[16] \quad \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \beta_{ik} \delta x_k = \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial x_k} \delta x_k,$$

essendo

$$[17] \quad \frac{\partial T^*}{\partial x_k} = \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Il secondo membro di questa relazione non è che il risultato dell'operazione X_k (§ 2) applicata a T^* in quanto questa è funzione delle q , ma noi, seguendo l'esempio di autori classici, quale ad esempio il WHITTAKER, usiamo il simbolo di derivata parziale rispetto alla quasi coordinata x_k

L'equazione di LAGRANGE-VOLTERRA si può scrivere

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \delta \omega_i + \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \delta x_i + Q_i^* \delta x_i \right) = \sum_1^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \cdot \delta x_i + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \frac{d \delta x_i}{dt} \right)$$

ed anche

$$[18] \quad \sum_1^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \left(\frac{d \delta x_i}{dt} - \frac{\delta d x_i}{dt} \right) = \sum_1^n Q_i^* \delta x_i.$$

Applicando le equazioni di transitività, la seconda somma del primo membro diventa

$$\sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \sum_r^n \Gamma_r^i \delta x_r = \sum_{ir}^n \Gamma_r^i \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \delta x_r = \sum_{ir}^n \Gamma_r^i \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \delta x_i$$

avendo posto per brevità

$$\Gamma_r^i = \sum_s^n \gamma_{rs}^i \omega_s + \gamma_{r,n+1}^i.$$

L'equazione

$$[19] \quad \sum_1^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} + \sum_r^n \Gamma_r^i \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} - Q_i^* \right\} \delta x_i = 0$$

deve essere soddisfatta qualunque siano gli infinitesimi $\delta x_1, \dots, \delta x_n$; dovranno dunque essere nulli i coefficienti delle δx e si hanno le equazioni di VOLTERRA-HAMEL.

$$[20] \quad \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} + \sum_s^n \gamma_{is}^r \omega_s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} + \sum_r^n \gamma_{i,n+1}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} = Q_i^*} \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

In una prossima Nota, dopo avere attribuito a queste equazioni una forma che generalizza quella delle equazioni canoniche, dimostreremo il teorema di JACOBI generalizzato, quale abbiamo annunciato nella Nota precedente, fondandoci essenzialmente sulle identità [7], [8] cui soddisfano le funzioni $\gamma_{rs}^i, \gamma_{r,n+1}^i$ ($i, r, s = 1, 2, \dots, n$).

BIBLIOGRAFIA

- (1) SCHUR, « Math. Ann. », Bd. 33, 1888; cfr. anche « Encyklopädie der Math. Wiss. », Bd. II A 6, Art. di L. MAURER ed J. BURKHARDT.
 - (2) G. PRANGE, *Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik*, « Encykl. der Math. Wiss. », Bd. IV, 12-13.
 - (3) CL. SCHAEFER, *Die Prinzipie der Dynamik*, § 7 e § 9, Berlin und Leipzig, 1919.
 - (4) L. BOLTZMANN, « Wien. Sitz.-Ber. », Bd. 111, 1902.
 - (5) G. HAMEL, *Ueber die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik*, « Math Ann. », Bd. 59, 1904; *Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik*, « Zeitschr. für Math. und Physik », Bd. 50, 1904.
 - (6) H. POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, « Compt. Rend. », Paris, t. 132, 1901.
 - (7) E. BELTRAMI, *Opere matematiche*, t.-IV.
 - (8) V. VOLTEERRA, *Sopra una classe di equazioni dinamiche*, « Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino », 1898.
-

Meccanica. — *Generalizzazione del metodo di Hamilton-Jacobi alla Dinamica dei sistemi anolonomi.* Nota ⁽¹⁾ di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. Prendiamo le mosse dalle equazioni di VOLTERRA-HAMEL

$$[1] \quad \left| \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} + \sum_1^n \gamma_{rs}^r \omega_s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} + \sum_1^n \gamma_{i n+1}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} = Q_i^* \right. \\ \left. (i = 1, 2, \dots, n) \right|$$

dove T^* è la forza viva del sistema dinamico in funzione delle coordinate q_1, \dots, q_n , delle caratteristiche cinetiche $\omega_1, \dots, \omega_n$ e del tempo t , le x_i sono quasi coordinate, le Q_i^* sono le componenti generalizzate delle forze impresse corrispondenti alle quasi coordinate.

Le ω sono definite da

$$[2] \quad \omega_i = \sum_1^n x_{ik} (q; t) \dot{q}_k : x_{i n+1} (q; t)$$

da cui

$$[3] \quad \dot{q}_i = \sum_1^n \beta_{ik} (q; t) \omega_k + \beta_{i n+1} (q; t)$$

essendo

$$[4] \quad \beta_{ik} = \alpha^{(kt)} \quad , \quad \beta_{i n+1} = - \sum_1^n \alpha^{(kt)} \alpha_{k n+1}.$$

Le γ sono definite da

$$[5] \quad \gamma_{rs}^i = \sum_1^n \beta_{kr} \beta_{ls} \left(\frac{\partial x_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial x_{il}}{\partial q_k} \right) \quad (i, r, s = 1, 2, \dots, n)$$

$$[6] \quad \gamma_{r n+1}^i = \sum_1^n \beta_{kl} \beta_{l n+1} \left(\frac{\partial x_{ik}}{\partial q_l} - \frac{\partial x_{il}}{\partial q_k} \right) + \sum_1^n \beta_{kr} \left(\frac{\partial x_{ik}}{\partial t} - \frac{\partial x_{i n+1}}{\partial q_k} \right) \\ (i, r = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 21 luglio 1942-XX.

e soddisfano alle identità

$$[7] \quad \sum_1^n \left(\beta_{ji} \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial q_j} - \beta_{jk} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \right) = \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{ik}^r$$

$$(i, l, r = 1, 2, \dots, n)$$

$$[8] \quad \sum_1^n \left(\beta_{ji} \frac{\partial \beta_{ln+1}}{\partial q_j} - \beta_{jn+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} + \sum_1^n \beta_{lr} \gamma_{in+1}^r$$

$$(i, l = 1, 2, \dots, n)$$

Tutto ciò è stato chiarito e stabilito in due Note precedenti ⁽¹⁾.

2. Poniamo ora

$$[9] \quad p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

con che si ha, risolvendo rispetto alle ω ,

$$[10] \quad \omega_i = \omega_i(p; q; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le variabili p possono chiamarsi quasi momenti cinetici e le variabili p, q canoniche.

Supponiamo che esista un potenziale delle forze impresse, cioè una funzione

$$[11] \quad U(q_1, \dots, q_n; t)$$

tale che

$$[12] \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Allora la pseudoderivata di U rispetto ad x_i eguaglia Q_i^* .

Infatti,

$$[13] \quad Q_i^* = \sum_1^n \beta_{ki} Q_k = \sum_1^n \beta_{ki} \frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

⁽¹⁾ G. LAMPARIELLO, *Generalizzazione del teorema di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi*, cfr. questi « Rendiconti », vol. III, fasc. 12, 1942; *Su certe identità differenziali cui soddisfano le funzioni γ delle equazioni dinamiche di Volterra-Hamel*, idem., vol. IV, fasc. 1-5, 1942.

Le equazioni di VOLTERRA-HAMEL assumono corrispondentemente la forma

$$[1'] \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} - \frac{\partial (T^* + U)}{\partial x_i} + \sum_1^n \gamma_{is}^r \omega_s \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} + \sum_1^n \gamma_{i, n+1}^r \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Consideriamo ora l'espressione

$$[14] \quad \sum_1^n p_i \omega_i - (T^* + U)$$

ed immaginiamo di sostituire alle ω le formole [10] ricavate dalle equazioni [9]. Si ha una funzione delle variabili canoniche p , q e di t che indichiamo con $H(p; q; t)$; questa generalizza ovviamente la classica funzione di HAMILTON. Possiamo ora estendere senz'altro il noto procedimento hamiltoniano di passaggio alla forma canonica delle equazioni.

Immaginiamo che le q , ω ed anche il tempo t subiscano delle variazioni infinitesime $\Delta q, \Delta \omega, \Delta t$ con che anche le p subiscono delle variazioni Δp . La variazione indotta in H , come dipendente dalle p, q, t , è

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \Delta q_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t.$$

La stessa variazione nelle variabili q, ω è espressa da

$$\sum_1^n (p_i \Delta \omega_i + \omega_i \Delta p_i) - \left(\sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_i} \Delta \omega_i + \frac{\partial (T^* + U)}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial (T^* + U)}{\partial t} \Delta t \right)$$

ed in questa i termini in $\Delta \omega$ si elidono.

Eguagliando i coefficienti delle $\Delta p, \Delta q, \Delta t$ si trova

$$[15] \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= - \frac{\partial (T^* + U)}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= - \frac{\partial (T^* + U)}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Inoltre si ha

$$[16] \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \sum_1^n \beta_{ik} \frac{\partial (T^* + U)}{\partial q_i} = - \frac{\partial (T^* + U)}{\partial x_k}.$$

In definitiva, alle equazioni di VOLTERRA-HAMEL si può attribuire la seguente forma canonica

$$[17] \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{n}{1} \gamma_{is}^r p_r \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{n}{1} \gamma_{i n+1}^r p_r \\ \omega_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ed anche, ricordando le [3]

$$[18] \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{n}{1} \gamma_{is}^r p_r \frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{n}{1} \gamma_{i n+1}^r p_r \\ \dot{q}_i &= \frac{n}{1} \beta_{ik} \frac{\partial H}{\partial p_k} + \beta_{i n+1} \end{aligned} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Questa è dunque la forma normale delle equazioni generali della dinamica per i sistemi olonomi in quasi coordinate e per i sistemi anolonomi, ove si aggiungano ad esse le equazioni dei vincoli (annullamento di alcune ω).

3. In questo paragrafo ci proponiamo di estendere alle equazioni [17] il teorema di JACOBI.

Costruiamo l'equazione a derivate parziali del 1° ordine

$$[19] \quad H \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}; q; t \right) + \frac{n}{1} \beta_{ln+1} \frac{\partial V}{\partial q_l} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

il primo termine ottenendosi con la sostituzione ad ogni p della corrispondente espressione

$$[20] \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{n}{1} \beta_{li} \frac{\partial V}{\partial q_l} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Sia

$$V(q_1, q_2, \dots, q_n; c_1, c_2, \dots, c_n; t)$$

una soluzione completa della [19].

Diciamo che la soluzione generale delle equazioni [17] è

$$[21] \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$[22] \quad c_i = \frac{\partial V}{\partial c_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Per dimostrare il teorema usiamo un metodo analogo a quello originale di JACOBI ⁽¹⁾.

Precisamente, derivando l'equazione [19] rispetto a c_i , quando al posto di V sia sostituita la soluzione completa conosciuta, si ottiene la stessa equazione dedotta per derivazione temporale dalla [22];

derivando rispetto ad x_i la [19], si ha la stessa equazione dedotta per derivazione temporale dalla [21].

Infatti, deriviamo rispetto a c_i la [19].

Si ha

$$\sum_k^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial c_i} \sum_l^n \beta_{lk} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_l^n \beta_{ln+1} \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

cioè

$$\sum_k^n \omega_k \sum_l^n \beta_{lk} \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial V}{\partial c_i} + \sum_l^n \beta_{ln+1} \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial V}{\partial c_i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial c_i} = 0$$

ovvero

$$\sum_l^n \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial V}{\partial c_i} \left(\sum_k^n \beta_{lk} \omega_k + \beta_{ln+1} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial c_i} = 0$$

ed anche, in virtù delle [3]

$$\sum_l^n \dot{q}_l \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial V}{\partial c_i} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial c_i} = 0$$

cioè infine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial c_i} = 0 \quad \text{c. d. d.}$$

Deriviamo ora la [19] rispetto ad x_i .

Si ha

$$\sum_k^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \sum_j^n \beta_{jk} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_j^n \beta_{ji} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_l^n \beta_{ln+1} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0.$$

La prima sommatoria si può scrivere

$$\begin{aligned} \sum_k^n \omega_k \sum_j^n \beta_{jk} \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_l^n \beta_{lk} \frac{\partial V}{\partial q_l} &= \sum_{k,j,l}^n \beta_{jk} \beta_{jl} \omega_k \frac{\partial V}{\partial q_l} - \sum_{k,j,l}^n \beta_{kj} \beta_{ji} \omega_k \left(\frac{\partial \beta_{lk}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \beta_{lk} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} \right) = \\ &= \sum_{k,j,l}^n \beta_{jk} \beta_{jl} \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial q_j} \omega_k \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_{k,j,l}^n \beta_{kj} \beta_{ji} \beta_{lk} \omega_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. le celebri *Vorlesungen über Dynamik*.

Analogamente la terza sommatoria diventa

$$\begin{aligned} & \sum_1^n \beta_{ji} \left(\sum_1^n \beta_{il} \frac{\partial \beta_{ln+1}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{ln+1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial t} \right) = \\ & = \sum_1^n \beta_{ji} \beta_{ln+1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \sum_1^n \beta_{ji} \beta_{jl} \frac{\partial \beta_{ln+1}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{ji} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial t}. \end{aligned}$$

L'espressione ottenuta è in definitiva

$$\begin{aligned} [23] \quad & \sum_1^n \beta_{kjl} \beta_{ji} \beta_{lk} \omega_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \sum_1^n \beta_{kjl} \beta_{ji} \frac{\partial \beta_{lk}}{\partial q_j} \omega_k \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{ji} \beta_{ln+1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \\ & + \sum_1^n \beta_{ji} \beta_{jl} \frac{\partial \beta_{ln+1}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{ji} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

Deriviamo ora la [21] rispetto a t .

Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - p_i \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_i} - \dot{p}_i = \\ & = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^n \gamma_{is}^r \omega_s \frac{\partial V}{\partial x_r} + \sum_1^n \gamma_{ln+1}^r \frac{\partial V}{\partial x_r}. \end{aligned}$$

Ora è

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \sum_1^n \beta_{li} \frac{\partial V}{\partial q_l} = \sum_1^n \beta_{li} \left(\sum_1^n \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial q_l} + \\ & + \sum_1^n \beta_{li} \left(\sum_1^n \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_j} q_j + \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial t} \right) = \sum_1^n \beta_{kjl} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \beta_{jk} \omega_k \frac{\partial V}{\partial q_l} + \\ & + \sum_1^n \beta_{lj} \beta_{ln+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{kjl} \beta_{li} \beta_{jk} \omega_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \\ & + \sum_1^n \beta_{lj} \beta_{li} \beta_{ln+1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_j} + \sum_1^n \beta_{li} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial t} + \sum_1^n \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial q_l}. \end{aligned}$$

Dunque, si ha in definitiva

$$\begin{aligned} [24] \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - p_i \right) = \sum_1^n \beta_{kjl} \beta_{li} \beta_{jk} \omega_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_l} + \sum_1^n \beta_{kjl} \beta_{jk} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \omega_k \frac{\partial V}{\partial q_l} + \\ & + \sum_1^n \gamma_{ikl}^r \omega_k \beta_{lr} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{li} \beta_{ln+1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial q_j} + \\ & + \sum_1^n \beta_{lj} \beta_{ln+1} \frac{\partial \beta_{li}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{lr} \beta_{lr} \gamma_{ln+1}^r \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \frac{\partial \beta_{li}}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial q_l} + \sum_1^n \beta_{li} \frac{\partial^2 V}{\partial q_l \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

In virtù delle identità fondamentali [7], [8], questa espressione coincide col primo membro della [23], dunque

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - p_i \right) = 0 \quad \text{c. d. d.}$$

Se in particolare i vincoli sono scleronomi ed il potenziale U non dipende dal tempo, l'equazione [19] si riduce alla forma

$$[25] \quad H\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}; q\right) + \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

dove la H espressa nelle q ed ω è

$$[26] \quad (T_2^*) - U$$

cioè l'energia (meccanica) totale del sistema in funzione delle coordinate e dei quasi momenti cinetici.

Sussiste il principio della conservazione dell'energia e si può cercare di soddisfare alla [25] con una funzione

$$[27] \quad V = -Et + W$$

dove E è la costante dell'energia.

La [25] si riduce allora alla più semplice forma

$$[28] \quad H\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial x_n}; q\right) = E.$$

Se W è una soluzione completa di questa equazione, in cui figurano oltre la costante E , altre $n-1$ costanti arbitrarie c_2, \dots, c_n , le equazioni

$$[29] \quad \frac{\partial W}{\partial E} = t - t_0$$

$$[30] \quad \frac{\partial W}{\partial c_k} = c'_k \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

caratterizzano le q in funzione di t e delle $2n$ costanti arbitrarie $c_2, c'_2, \dots, c_n, c'_n, t_0, E$ e risolvono il problema dinamico.

4. Supponiamo ora che il sistema dinamico sia soggetto ad $m < n$ vincoli del tipo

$$[2'] \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{sik} \dot{q}_i + \alpha_{s n+1} = 0 \quad (s = n-m+1, \dots, n),$$

Si possono allora scegliere quali m caratteristiche cinetiche i primi membri di queste equazioni ed introdurre altre $n-m$ caratteristiche con le posizioni

$$[2''] \quad \omega_r = \dot{q}_r \quad (r = 1, 2, \dots, n-m).$$

Le equazioni del moto si ottengono aggiungendo alle [17] le condizioni

$$[21] \quad \omega_s = 0 \quad (s = n - m + 1, \dots, n).$$

Poichè alle [17] si può sostituire, agli effetti dell'integrazione, l'equazione [19], i movimenti del sistema risultano caratterizzati dalle equazioni [19], [21].

Ma qui va osservato che l'equazione [19], a calcoli fatti, si riduce identicamente all'equazione di JACOBI che si costruirebbe a partire dalla funzione di HAMILTON H_0 come funzione delle q e dei corrispondenti momenti cinetici p_{i_0} ($i = 1, \dots, n$).

In altri termini, l'equazione di JACOBI possiede un certo carattere invariantivo di fronte alle trasformazioni lineari che fanno passare dalle \dot{q} alle ω . Questa proprietà è fondata sulla seguente identità

$$[31] \quad H(p; q; t) = H_0(p_0; q; t) - \sum_1^n \beta_{i, n+1} p_{i_0}.$$

Naturalmente l'identità della [19] con l'equazione di JACOBI non sussiste se si tien conto dei vincoli [21].

Ecco come si procederà per costruire effettivamente l'equazione a derivate parziali della Dinamica dei sistemi a vincoli anolonomi lineari.

Sia

$$T^* = \frac{1}{2} \sum_1^n a_{q\sigma} a_{q\sigma} \omega_q \omega_\sigma + \sum_1^n a_q \omega_q + T_0^*.$$

Per le [9] è

$$p_q = \frac{\partial T^*}{\partial \omega_q} = \sum_1^n a_{q\sigma} \omega_\sigma + a_q$$

da cui

$$[32] \quad \omega_\sigma = \sum_1^n a^{(q\sigma)} (p_q - a_q).$$

La funzione $H(p; q; t)$ si ottiene calcolando in funzione delle p, q l'espressione

$$\frac{1}{2} \sum_1^n a_{q\sigma} a_{q\sigma} \omega_q \omega_\sigma - (T_0^* + U),$$

la quale, in virtù delle [21], si riduce a

$$[33] \quad \frac{1}{2} \sum_1^{n-m} a_{q\sigma} a_{q\sigma} \omega_q \omega_\sigma - (T_0^* + U).$$

La sommatoria che vi figura è, per le [32]

$$1/2 \sum_{\sigma}^{n-m} a_{\sigma} \sum_{i=1}^n a^{(i\sigma)} (p_i - a_i) \sum_{k=1}^n a^{(k\sigma)} (p_k - a_k) = 1/2 \sum_{i=1}^n b_{ik} (p_i - a_i) (p_k - a_k)$$

avendo posto

$$[34] \quad b_{ik} = \sum_{\sigma}^{n-m} a^{(i\sigma)} a^{(k\sigma)} a_{\sigma}.$$

Se ora sostituiamo le $\frac{\partial V}{\partial x}$ alle corrispondenti p , si ha la cercata equazione

$$[35] \quad 1/2 \sum_{i=1}^n b_{ik} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - a_i \right) \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} - a_k \right) + \sum_{i=1}^n g_{i,n+1} \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Sia $V(q; c; t)$ una soluzione completa di quest'equazione. Sostituendo nelle equazioni dei vincoli [21] le q dedotte dalle equazioni

$$[22] \quad \frac{\partial V}{\partial c_i} = c'_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

si hanno m relazioni dalle quali si potranno ricavare m delle costanti c, c' in funzione delle rimanenti $2n - m$. Queste ultime saranno pertanto le sole ad avere il carattere di arbitrarietà, ciò che è conforme alla nota circostanza che i vincoli di anolonomia non riducono la totalità delle configurazioni, bensì riducono solo di m unità la totalità degli atti di moto (o, se si vuole, dei gradi di libertà).

Meccanica. — *Una proprietà dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana che si muove nel suo piano.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORUGO FOSCHI presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

È nota la formola di SAVARY che dà la posizione del centro di curvatura C della traiettoria di un punto qualsiasi M del piano, in un movimento definito dal rotolamento di una curva p' su una curva p .

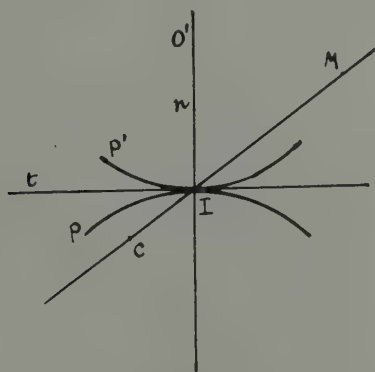


Fig. 1.

Detta formola è

$$[1] \quad \left(\frac{1}{e'} \pm \frac{1}{e} \right) = \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta + r} \right) \sin \alpha$$

dove e e e' sono i raggi di curvatura delle due curve fondamentali (nella parentesi va preso il segno $+$ o $-$ a seconda che le curvature sono da parte opposta o dalla stessa parte della tangente comune):

$$\delta = IM \quad r = MC.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1942-XX.

La formola può quindi anche scriversi indicando con $\frac{1}{a}$ il primo membro

$$[2] \quad \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{IM} - \frac{1}{IC} \right) \sin \alpha.$$

Il valore di a , come è noto, è il diametro del cerchio dei flessi.

Si supponga $\alpha = 0$, ossia si consideri un punto situato sulla tangente comune alle due curve p e p' .

Poichè il primo membro è una quantità finita, tale deve essere anche il secondo membro, e poichè è IM diverso da zero, dovrà essere uguale a Zero il Segmento IC' , cioè il centro di curvatura di M deve coincidere con I , centro istantaneo di rotazione.

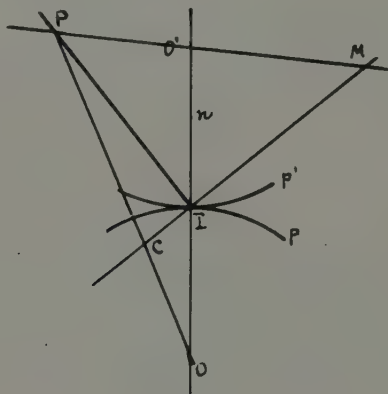


Fig. 2.

Segue la proprietà che in un moto piano qualunque.

Esistono infiniti punti di una retta, che è la tangente comune alla curva fissa e alla rotolante che hanno lo stesso centro di curvatura delle loro traiettorie, centro che coincide col centro istantaneo di rotazione.

Allo stesso risultato si può giungere attraverso la costruzione geometrica di SAVARY.

È noto che per trovare il centro di curvatura di M si deve unire il punto M col centro di curvatura della rotolante, fino ad incontrare in P la normale alla IM condotta per I . Il punto di incontro C' della intersezione con la IM della congiungente P col centro di curvatura della curva fissa dà il centro di curvatura di M .

Eseguendo la costruzione prendendo il punto M sulla tangente il punto P coincide sempre con O' e il punto C' coincide sempre con T .

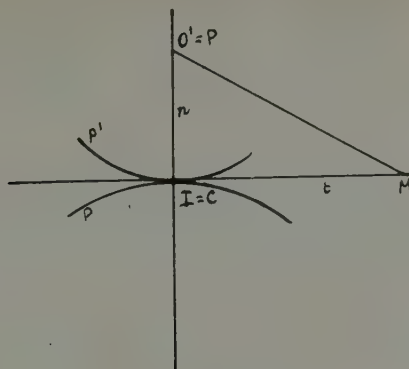


Fig. 3.

Si può dimostrare anche che non esistono altri punti del piano che hanno per centro di curvatura il punto I .

Infatti su ogni retta del piano in virtù della [2] si ha che la relazione tra l'ascissa x del punto M e l'ascissa x' del centro di curvatura relativa passa la relazione

$$[3] \quad \frac{1}{a \sin \alpha} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x'}$$

e ponendo $a \sin \alpha = b$ la relazione stessa può scriversi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{x' - x}{xx'} \\ xx' &= bx' - bx \\ xx' + bx - bx' &= 0. \end{aligned}$$

Questa è l'equazione di una proiettività. In essa ponendo $x' = 0$ si ricava $x = 0$.

Ossia quando il centro di curvatura cade in I , cade in I anche il punto M .

Non esiste quindi altro punto della retta che abbia per centro di curvatura il punto I .

Si può quindi enunciare la proprietà seguente del moto di una figura piana:

Il luogo dei punti di una figura piana che si muove nel proprio piano che in un certo istante hanno per centro di curvatura della loro traiettoria il centro istantaneo di rotazione, è la retta tangente comune alla curva fissa e alla rotolante.

Meccanica. — *Una proprietà del moto di una figura piana.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORUGO FOSCHI, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

Sia un moto piano qualsiasi, p' e p le due polari e c il cerchio dei flessi. Una qualunque curva s' solidale con la polare p' involuppa una curva s . Sia M il centro di curvatura di s' e C il centro di curvatura di M . Per la costruzione di SAVARY C è anche il centro di curvatura della traiettoria descritta da M .

Segue che tutte le curve che hanno un medesimo centro di curvatura M involuppano curve che hanno anche esse un medesimo centro di curvatura C che è anche il centro di curvatura della traiettoria descritta da M .

Si supponga ora che la curva s' sia una retta; in tal caso il punto M va a distanza infinita nella direzione normale alla retta e il punto C va in C_0 simmetrico di M_0 rispetto a I .

Si deduce che tutte le rette parallele ad una data direzione involuppano curve che hanno come centro di curvatura il punto simmetrico rispetto al centro istantaneo I dell'intersezione del cerchio dei flessi con la normale condotta da I alla direzione delle rette. Al variare della direzione delle rette il punto C_0 descrive una circonferenza che è la simmetrica rispetto a I del cerchio dei flessi: questa circonferenza è quindi il luogo dei centri di curvatura di tutte le curve involupate dalle rette del piano.

Se si considera una retta parallela ad r e passante per C_0 , questa involuppa una curva che in C_0 ha curvatura nulla (nel punto C_0 ha un punto di regresso).

Si consideri il movimento definito da due rette che involuppano due cerchi. Il cerchio dei flessi sarà il cerchio passante per I e per i due punti

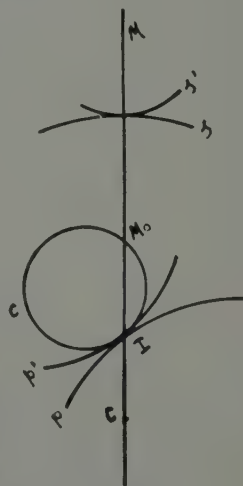


Fig. 1.

(¹) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1942-XX.

simmetrici di O e O_1 rispetto a I . Il cerchio C_1 simmetrico del cerchio dei flessi passerà per I, O, O_1 .

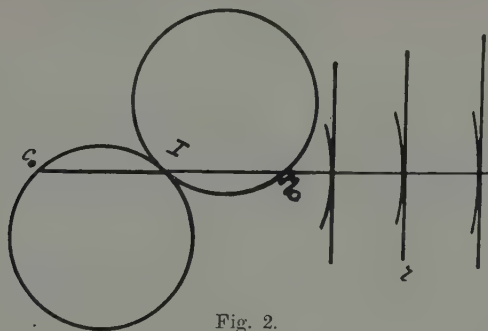


Fig. 2.

Tutte le rette parallele ad r invilupperanno cerchi concentrici di centro O , e quelle parallele ad r_1 cerchi concentrici di centro O_1 . In particolare le due rette r' e r'_1 passeranno sempre per O e O_1 . Il cerchio passante per I, O e O_1 passerà anche per M , punto d'incontro di r' e r'_1 .

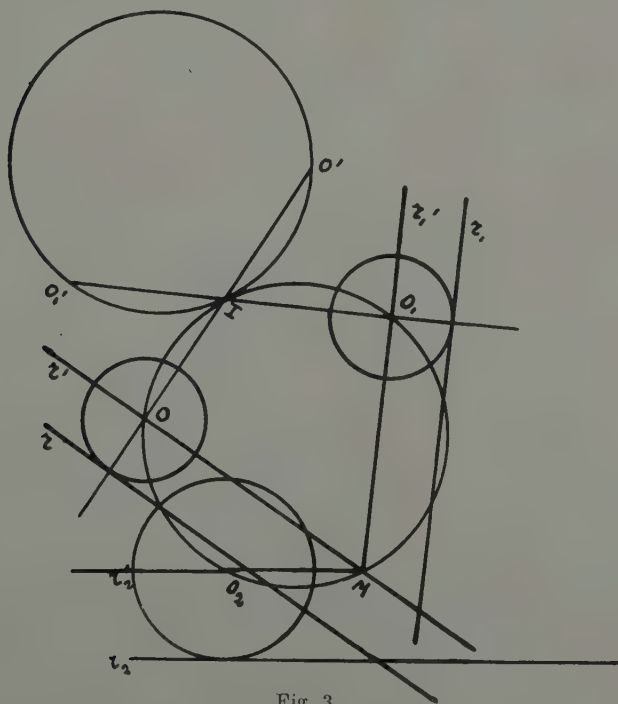


Fig. 3.

Se consideriamo una terza retta r'_2 passante per M , questo durante il movimento passerà sempre per O_2 , dato che il punto M descrive il cerchio C_1 .

Segue che una parallela qualsiasi a r'_2 invilupperà un cerchio avente per centro il punto O_2 .

Quindi se due rette si muovono su un piano inviluppando due circonferenze, qualunque retta del piano invilupperà una circonferenza.

Il luogo di tutti i centri è una circonferenza che passa per i centri dei due inviluppi e per il punto d'incontro M delle parallele alle rette date, condotte per i centri dei loro inviluppi.

Per determinare il centro di curvatura dell'inviluppo di una retta r_2 qualsiasi basta determinare l'ulteriore punto d'incontro con la circonferenza della parallela alla retta condotta per M .

Meccanica. — *La costruzione del cerchio dei flessi sul moto piano.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORUGO FOSCHI, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

È noto che il cerchio dei flessi ha il centro sulla normale comune alle due curve polari, passa per il centro istantaneo di rotazione e ha per diametro il valore d dato dalla relazione

$$[1] \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

dove r' e r sono, coi loro segni, i raggi di curvatura della polare mobile e della fissa.

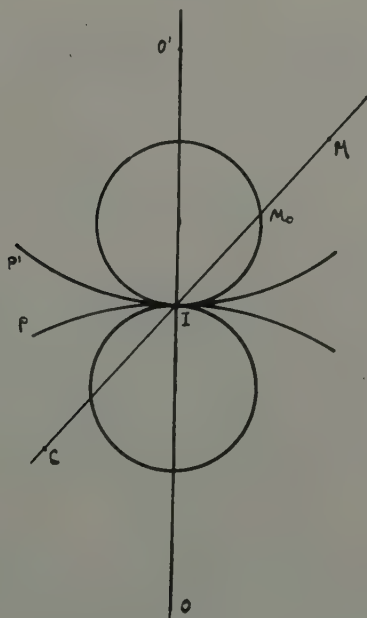


Fig. 1.

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 agosto 1942-XX.

Se le due curve si scambiano le funzioni, cioè la p diviene la rotolante e la p' la fissa, il cerchio dei flessi diviene quindi per la [1] il simmetrico del precedente rispetto alla tangente comune alle due polari.

Per la determinazione del cerchio dei flessi in un certo istante del moto basta quindi la conoscenza delle curve polari, e i loro centri di curvatura: però la conoscenza di queste curve non è sempre agevole col metodo analitico, e salvo casi particolari il calcolo dei raggi di curvatura è assai laborioso. La costruzione del cerchio dei flessi è invece immediata quando si conoscano le traiettorie di due punti e il centro di curvatura di esse.

Infatti su ogni retta uscente da I , in base alla formola di SAVARY si stabilisce una proiettività tra la punteggiata dei punti M e quella dei relativi centri di curvatura C .

Essendo infatti

$$[2] \quad \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right) \sin \alpha,$$

dove sono x e x' le ascisse dei punti M e C , si ricava:

$$[3] \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{1}{a}$$

ponendo $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{\sin \alpha}$, cioè $a = d \sin \alpha$.

L'equazione [3] può anche scriversi

$$[4] \quad xx' + ax - ax' = 0.$$

Se si vuole il punto di flesso che si trova sulla retta IM , basta determinare l'ascissa x_0 del punto al quale corrisponde il punto di coordinata $x' = \infty$: si trova per la [3]

$$[5] \quad x_0 = a = d \sin \alpha.$$

Si potrà quindi, chiamando con M_0 il punto di flesso che si trova sulla IM

$$[6] \quad \frac{1}{IM} - \frac{1}{IC} = \frac{1}{IM_0}$$

dalla quale si deduce con facili trasformazioni

$$M_0 M = \frac{IM^2}{CM}.$$

Quindi se si conoscono le traiettorie di due punti non allineati con I è possibile determinare due punti del cerchio dei flessi che insieme con I , punto d'incontro delle due normali alle traiettorie, individuano il cerchio dei flessi.

Talvolta però il movimento della figura piana è determinato dalla traiettoria di un punto, e dall'involuppo di una curva: o dagli involuppi di due curve. È possibile anche in questo caso individuare il cerchio dei flessi in base alla considerazione seguente:

Sia la curva s' che durante il rotolamento di p' su p involuppa la s .

La formula di SAVARY vale anche in questo caso, ma il punto M è il centro di curvatura di s' e C è il centro di curvatura della s : ossia il centro di curvatura della traiettoria di M è anche il centro di curvatura della curva s involupata da una curva s' che ha M come centro di cur-

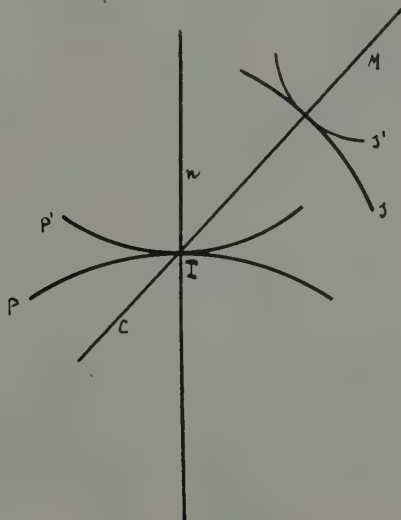


Fig. 2.

vatura. Si ha quindi questo risultato. *Tutte le curve che hanno lo stesso centro di curvatura M involuppano curve che hanno tutte uno stesso centro di curvatura C .*

Il punto di flesso che si trova sulla retta IM si determina come nel caso precedente con la relazione [7].

Due casi particolari hanno notevole interesse:

a) la curva s' è una retta, allora M è a distanza infinita allora per la [3] si ottiene

$$x' = -a.$$

Quindi il simmetrico rispetto a I del centro di curvatura della curva involupata da una retta è un punto del cerchio dei flessi.

Segue come corollario:

Se una retta passa costantemente per un punto A , il simmetrico di A rispetto a I (centro istantaneo di rotazione) è un punto del cerchio dei flessi;

Quindi in questo moto il cerchio dei flessi è il cerchio t come era stato precedentemente trovato.

2° Moto concoideale. Un punto A descrive una retta, mentre una retta per A passa costantemente per un punto B . Il cerchio dei flessi passerà per A , per I , e per il simmetrico B del punto B rispetto a I .

3° Un punto A descrive una retta r mentre una retta s passante per esso inviluppa un cerchio tangente alla retta r .

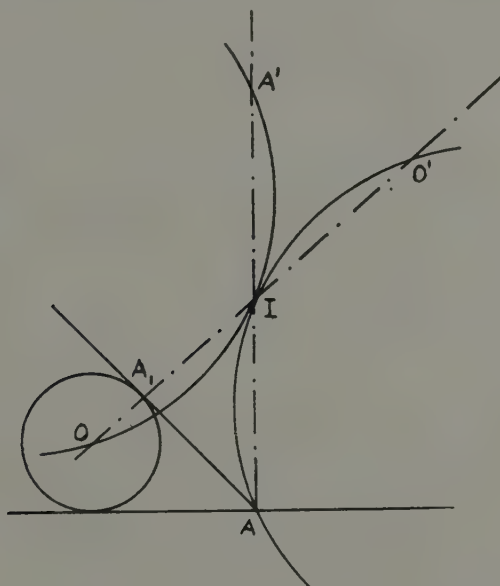


Fig. 5.

Il cerchio dei flessi passerà per I , per A , e per il punto O' simmetrico di O rispetto a I .

Il movimento inverso sarebbe così definito: un cerchio inviluppa una retta s , ed una retta r passa costantemente per O . Il cerchio dei flessi passa per I , per O , e per il simmetrico A di A' rispetto a I .

Meccanica. — *Un teorema generale nel moto di un corpo rigido intorno a un asse fisso.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORUGO FOSCHI, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

Si consideri un corpo vincolato in modo da avere un asse fisso intorno al quale esso possa ruotare, senza scorrere. Sia $O_1 O_2$ l'asse fisso, G il baricentro del corpo, m la sua massa. $S_1 S_2$ l'asse baricentrico parallelo ad $O_1 O_2$ e O il piede della perpendicolare abbassata da G su $O_1 O_2$. Sia inoltre c la distanza OG , e K il raggio d'inerzia del corpo rispetto a $S_1 S_2$. Siano inoltre I_0 e I i momenti d'inerzia rispetto a $S_1 S_2$ e $O_1 O_2$.

L'equazione del moto sarà:

$$[1] \quad I \frac{d\omega}{dt} = M$$

essendo M il momento risultante di tutte le forze applicate rispetto all'asse di rotazione. Sarà quindi:

$$[2] \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{I} = \frac{M}{I_0 + mc^2} = \frac{M}{m(c^2 + K^2)}.$$

Si consideri il punto A sulla retta OG , tale che sia $GA = \frac{K^2}{c}$.

Sarà:

$$[3] \quad OA = r = c + \frac{K^2}{c}.$$

L'accelerazione tangenziale a_t del punto A sarà data da

$$[4] \quad a_t = r \frac{d\omega}{dt} = \left(c + \frac{K^2}{c}\right) \frac{M}{m(c^2 + K^2)} = \frac{c^2 + K^2}{c} \frac{M}{m(c^2 + K^2)} = \frac{1}{m} \frac{M}{c}.$$

Poniamo

$$[5] \quad \frac{M}{c} = F; \quad \text{risulterà} \quad a_t = \frac{F}{m}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 ottobre 1942-XX.

Se il punto A fosse un punto libero, e in esso fosse concentrata la massa m del corpo, e in esso fosse applicata normalmente al piano AO_1O_2 una forza F , l'accelerazione che esso prenderebbe sarebbe ancora $a_t = \frac{F}{m}$.

Per determinare il valore della forza F facciamo la seguente considerazione. Sia F_r una forza generica del sistema. Nel punto d'incontro della sua linea col piano AO_1O_2 decomponiamola secondo tre linee:

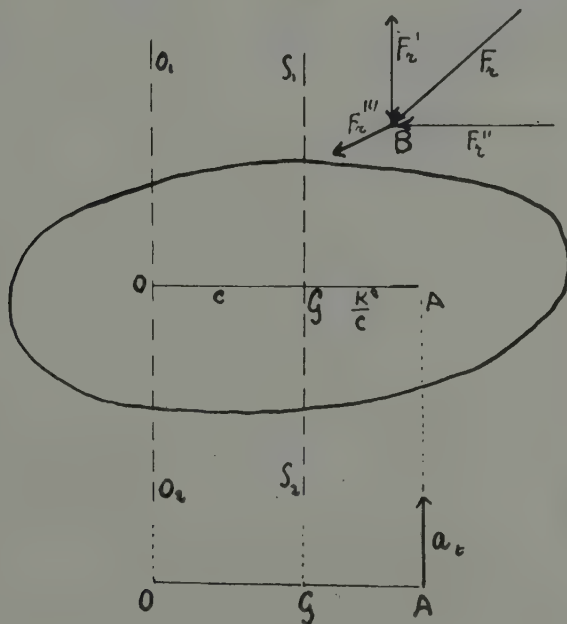


Fig. 1.

la prima componente F'_r parallela a O_1O_2 ; la seconda F''_r normale a O_1O_2 e giacente sul piano AO_1O_2 , la terza F'''_r normale a O_1O_2 e normale al piano AO_1O_2 . Questa ultima soltanto dà momento, e il valore di questo momento sarà $F'''_r d_r$, chiamando con d_r la distanza del punto B da O_1O_2 ,

Si avrà quindi

$$Fc = \sum F'''_r d_r$$

$$[6] \quad F = \sum F'''_r \frac{d_r}{c}$$

La forza F quindi è tale che applicata al baricentro del corpo, darebbe rispetto all'asse di rotazione lo stesso momento del sistema di forze applicato.

La proprietà dimostrata poteva essere ottenuta anche in base ad una considerazione più intuitiva. Si consideri una massa elementare dm applicata nel punto D . Il punto D avrà una accelerazione radiale $\omega^2 r_d$ ed una tangenziale $r_d \frac{d\omega}{dt}$. Soltanto questa seconda dà un momento. La risultante delle forze d'inerzia F_1 dovuta alle accelerazioni radiali passa per il baricentro e vale $m\omega^2 c$. La seconda F_2 vale $mc \frac{d\omega}{dt}$ e passa per il punto A centro relativo rispetto all'asse O (baricentro dei momenti statici delle masse elementari). Poichè si debbono fare equilibrio le forze applicate, le forze d'inerzia e le reazioni dei vincoli, prendendo i momenti rispetto all'asse si ottiene

$$F_2 \cdot r = M$$

$$rm \frac{d\omega}{dt} c = M.$$

Sia $M = Fc$, essendo F una forza che applicata al baricentro dia lo stesso momento del sistema delle forze applicate.

Risulterà per il punto A

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = \frac{M}{mc} = \frac{F}{m}$$

e quindi l'accelerazione tangenziale di A è la stessa che il punto A avrebbe se fosse libero, quando in esso fosse concentrata la massa M , e vi fosse applicata la forza F .

Astronomia. - *Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio.* Nota I di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. - Nel 1925 il prof. G. ARMELLINI, direttore del R. Osservatorio Astronomico di Roma, allora sul Campidoglio ed ora su Monte Mario, in una Nota con questo medesimo titolo presentata alla R. Accademia Nazionale dei Lincei, ha iniziato una discussione preliminare delle osservazioni meridiane per la misura del diametro orizzontale del Sole eseguite nel venticinquennio 1875-1900 in quella Specola; ed ha mostrato la possibilità che il diametro del Sole possa presentare delle oscillazioni o fluttuazioni a carattere più o meno periodico.

Queste osservazioni meridiane del diametro solare furono iniziate nel 1873 all'Osservatorio del Campidoglio e vi furono continuate ininterrottamente per cura dei vari direttori L. RESPIGHI, A. DI LEGGE, G. ARMELLINI fino al luglio 1937, e cioè fino al trasferimento dell'Osservatorio stesso nella nuova sede sulla collina di Monte Mario. E quivi ancora si continuano, sebbene con metodo e strumento diverso.

Relazioni parziali e schematiche di esse sono state già pubblicate (in massima parte negli «Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei») ad opera di RESPIGHI, DI LEGGE e specialmente di ARMELLINI. Mancava ancora però una elaborazione unitaria di tutta la serie, e soprattutto non erano state ancora eseguite le riduzioni delle osservazioni dell'ultimo periodo DI LEGGE e cioè dell'undicennio 1912-22. Tale lavoro lo scrivente ha avuto recentemente la possibilità di compiere, discutendo in un'ampia Memoria, in corso di stampa in altra sede ⁽²⁾, tutte le osservazioni del sessantennio 1876-1937.

Data l'importanza dell'argomento riteniamo opportuno presentare anche qui gli elementi principali della discussione e i risultati a cui siamo pervenuti. Le conclusioni definitive saranno date nella successiva II Nota.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942 XX.

⁽²⁾ L. GIALANELLA, *Le variazioni del diametro solare nel sessantennio 1876-1937 secondo le osservazioni eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio.* «Commentationes Pontificia Academia Scientiarum», vol. VI, 1942.

2. - Le misure del diametro orizzontale del Sole all'Osservatorio del Campidoglio furono sempre eseguite al cerchio meridiano di Ertel (m. 0,094 di apertura e m. 1,432 di focale) adoperando il metodo per *proiezione* e stimando *a occhio e orecchio* i tempi del passaggio dei due bordi del Sole ai fili del micrometro, fili che insieme con l'immagine del Sole fortemente ingrandita erano proiettati sopra uno schermo bianco disposto perpendicolarmente all'asse ottico del cannocchiale. Tale metodo fu sempre conservato inalterato per tutta la durata delle osservazioni, e cioè fino al luglio 1937. Esso ha permesso così a più persone di osservare contemporaneamente allo stesso strumento e in condizioni atmosferiche assolutamente identiche la medesima immagine, fornendo - insieme con il grande vantaggio di moltiplicare il numero delle osservazioni - anche la possibilità di avere dei confronti immediati per la determinazione delle equazioni personali degli osservatori. La lunga serie di queste osservazioni costituisce, pertanto, un materiale preziosissimo e forse unico al mondo, sia per la durata delle osservazioni sia per il numero degli osservatori, sia per l'omogeneità delle osservazioni stesse; onde la sua elaborazione e discussione completa ha permesso di apportare un contributo autorevole e importante alla questione della variabilità del diametro solare.

Dato il lungo periodo che abbracciano le nostre osservazioni, si è avuto naturalmente un necessario avvicendamento degli osservatori, che possono essere distinti in due serie ognuna delle quali risulta composta delle medesime persone e quindi formata con osservazioni del tutto omogenee. La prima serie (1874-1921) comprende gli osservatori A. DI LEGGE, L. RESPIGHI, F. GIACOMELLI, A. PROSPERI, P. MIGNUCCI; la seconda (1922-1937) lo stesso MIGNUCCI e poi G. ARMELLINI-CONTI, G. ARMELLINI, L. GIALANELLA. Il MIGNUCCI, che per vari anni ha osservato in entrambe le serie, ha permesso il loro collegamento; onde, alla fine, è stato possibile ricondurre tutte le osservazioni dell'intero sessantennio ad un unico sistema. In totale, fino al luglio 1937 si sono avute 31200 misure del semidiametro solare, così distribuite:

F. GIACOMELLI	anni 46 con osservazioni	7759
A. PROSPERI	» 45 »	7315
A. DI LEGGE	» 40 »	7288
P. MIGNUCCI	» 20 »	2841
L. RESPIGHI	» 13 »	2172
G. ARMELLINI-CONTI	» 16 »	1941
G. ARMELLINI	» 15 »	1353
L. GIALANELLA	» 4 »	531

E poichè ogni misura comprendeva 14 appulsu di andata e ritorno si sono avuti in tutto 436.800 appulsu osservati.

TABELLA I.

Semidiametro solare osservato ridotto alla distanza media.

I serie del Campidoglio.

Anno	DI LEGGE			RESPIGHI			GIACOMELLI			PROSPERI		
	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm
1874.5	961".48	175	0".045	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1875.5	961 .62	196	0 .042	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1876.5	961 .43	140	0 .045	960".83	90	0".047	(961".27)	55	0".046	—	—	—
1877.5	961 .69	202	0 .044	961 .04	156	0 .042	961 .41	148	0 .046	—	—	—
1878.5	961 .44	191	0 .034	960 .92	194	0 .033	961 .33	199	0 .030	—	—	—
1879.5	961 .20	201	0 .031	960 .74	166	0 .033	961 .25	191	0 .031	961".06	192	0".028
1880.5	961 .21	186	0 .029	960 .74	230	0 .028	961 .18	243	0 .029	961 .44	229	0 .028
1881.5	961 .13	212	0 .026	960 .71	200	0 .031	961 .24	189	0 .034	961 .60	219	0 .031
1882.5	961 .14	220	0 .027	960 .58	202	0 .035	961 .36	202	0 .032	961 .65	205	0 .032
1883.5	960 .94	180	0 .039	960 .50	210	0 .038	961 .42	193	0 .042	961 .03	212	0 .038
1884.5	961 .09	233	0 .029	960 .47	191	0 .039	961 .44	204	0 .037	960 .95	218	0 .037
1885.5	960 .98	199	0 .032	960 .41	139	0 .044	961 .32	187	0 .035	960 .77	189	0 .033
1886.5	961 .00	229	0 .031	960 .43	136	0 .042	961 .32	193	0 .034	960 .59	176	0 .037
1887.5	961 .12	235	0 .030	960 .73	158	0 .037	961 .43	185	0 .037	960 .82	195	0 .037
1888.5	961 .29	214	0 .022	960 .83	100	0 .031	961 .56	204	0 .028	961 .41	165	0 .036
1889.5	961 .38	219	0 .024	—	—	—	961 .65	179	0 .040	961 .34	169	0 .030
1890.5	961 .47	215	0 .040	—	—	—	962 .22	192	0 .040	961 .69	186	0 .037
1891.5	961 .31	207	0 .041	—	—	—	962 .12	199	0 .044	961 .79	161	0 .040
1892.5	961 .00	187	0 .043	—	—	—	961 .94	166	0 .050	961 .69	175	0 .036
1893.5	960 .66	241	0 .042	—	—	—	961 .01	242	0 .040	961 .52	168	0 .039
1894.5	960 .54	225	0 .039	—	—	—	960 .87	188	0 .043	961 .24	143	0 .040
1895.5	960 .44	178	0 .043	—	—	—	960 .99	165	0 .046	961 .19	112	0 .054

Segue: TABELLA I.

Anno	DI LEGGE			RESPIGHI			GIACOMELLI			PROSPERI		
	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm
1896.5	960'' .37	185	0'' .045	—	—	—	960'' .80	160	0'' .050	961'' .16	127	0'' .049
1897.5	960 .44	189	0 .043	—	—	—	960 .44	193	0 .039	961 .00	153	0 .039
1898.5	960 .48	211	0 .044	—	—	—	960 .96	187	0 .040	961 .03	172	0 .033
1899.5	960 .33	177	0 .049	—	—	—	961 .00	177	0 .047	961 .02	168	0 .036
1900.5	960 .50	171	0 .046	—	—	—	961 .08	163	0 .045	961 .24	175	0 .039
1901.5	960 .53	189	0 .042	—	—	—	960 .80	184	0 .045	961 .05	188	0 .032
1902.5	960 .92	180	0 .042	—	—	—	961 .12	172	0 .047	961 .02	182	0 .032
1903.5	961 .17	174	0 .052	—	—	—	961 .31	176	0 .047	961 .25	178	0 .038
1904.5	961 .54	154	0 .044	—	—	—	961 .91	175	0 .047	961 .33	200	0 .033
1905.5	961 .31	138	0 .052	—	—	—	961 .47	144	0 .058	961 .32	177	0 .033
1906.5	961 .55	144	0 .047	—	—	—	961 .60	166	0 .044	961 .56	171	0 .051
1907.5	961 .69	136	0 .052	—	—	—	961 .91	168	0 .045	961 .59	175	0 .038
1908.5	961 .73	179	0 .050	—	—	—	961 .97	181	0 .045	961 .39	208	0 .042
1909.5	961 .82	147	0 .054	—	—	—	962 .25	161	0 .053	961 .25	180	0 .046
1910.5	961 .46	121	0 .072	—	—	—	962 .79	151	0 .064	961 .69	186	0 .048
1911.5	961 .01	110	0 .075	—	—	—	961 .69	150	0 .053	961 .39	130	0 .055
1912.5	960 .86	101	0 .075	—	—	—	962 .12	145	0 .060	961 .58	159	0 .050
1913.5	961 .38	97	0 .080	—	—	—	962 .03	157	0 .057	961 .81	178	0 .040
1914.5	—	—	—	—	—	—	961 .83	157	0 .044	961 .60	163	0 .041
1915.5	—	—	—	—	—	—	962 .25	118	0 .060	962 .05	154	0 .045
1916.5	—	—	—	—	—	—	962 .46	130	0 .045	962 .09	149	0 .040
1917.5	—	—	—	—	—	—	960 .55	112	0 .056	960 .44	120	0 .050
1918.5	—	—	—	—	—	—	961 .19	116	0 .062	961 .12	149	0 .040
1919.5	—	—	—	—	—	—	961 .64	139	0 .051	961 .76	156	0 .042
1920.5	—	—	—	—	—	—	961 .56	130	0 .045	961 .89	146	0 .050
1921.5	—	—	—	—	—	—	961 .47	123	0 .065	961 .72	61	0 .075

TABELLA II.

Semidiametro solare osservato ridotto alla distanza media.

II serie del Campidoglio.

Anno	MIGNUCCI			ARPELLINI-CONTI			ARPELLINI			GIALANELLA		
	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm	R_{\odot}	N. oss.	Err. prob. \pm
1916.5	—	(44)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1917.5	960".01	114	0".056	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1918.5	960.46	138	0.039	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1919.5	961.27	137	0.038	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1920.5	961.25	145	0.040	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1921.5	961.10	102	0.075	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1922.5	(960.15)	(94)	—	(961".31)	(52)	—	—	—	—	—	—	—
1923.5	961.00	127	0.060	961.42	146	0.047	961".72	141	0".057	—	—	—
1924.5	960.40	127	0.060	961.17	124	0.050	960.46	98	0.059	—	—	—
1925.5	959.91	128	0.066	961.58	93	0.066	960.24	80	0.067	—	—	—
1926.5	961.16	157	0.066	961.93	113	0.066	961.32	93	0.067	—	—	—
1927.5	961.56	150	0.060	961.47	114	0.068	961.75	97	0.063	—	—	—
1928.5	961.49	135	0.055	961.15	122	0.070	961.95	102	0.055	—	—	—
1929.5	961.57	176	0.040	961.60	148	0.085	961.93	111	0.086	—	—	—
1930.5	961.65	168	0.040	961.40	141	0.047	961.77	115	0.050	—	—	—
1931.5	961.55	142	0.037	961.62	124	0.051	961.75	107	0.040	—	—	—
1932.5	961.42	163	0.038	961.54	136	0.050	961.73	99	0.040	—	—	—
1933.5	961.55	120	0.030	961.63	132	0.062	961.95	86	0.045	—	(60)	—
1934.5	961.42	122	0.030	961.73	146	0.080	962.17	84	0.050	961".84	164	0".039
1935.5	961.37	111	0.056	961.52	142	0.060	962.30	62	0.041	961.74	162	0.038
1936.5	961.50	145	0.056	961.45	125	0.031	962.04	58	0.073	961.74	144	0.036
1937.3	961.45	96	0.058	961.52	83	0.057	961.97	20	0.085	961.69	61	0.049

Le tabelle I e II contengono – in sintesi – i risultati di queste misure, riportando le medie annuali dei valori di ciascuno degli osservatori, insieme con il numero complessivo delle osservazioni eseguite ogni anno e il corrispondente errore probabile.

TABELLA III.

Semidiametro solare osservato. – Compensazione biennale.

Anno	R_{\odot}	Anno	R_{\odot}	Anno	R_{\odot}
1877.0	961".49	1898.0	960".73	1919.0	961".20
1878.0	961 .48	1899.0	960 .80	1920.0	961 .50
1879.0	961 .28	1900.0	960 .86	1921.0	961 .44
1880.0	961 .23	1901.0	960 .87	1922.0	961 .35
1881.0	961 .31	1902.0	960 .90	1923.0	961 .31
1882.0	961 .35	1903.0	961 .13	1924.0	961 .13
1883.0	961 .25	1904.0	961 .43	1925.0	960 .69
1884.0	961 .15	1905.0	961 .50	1926.0	961 .07
1885.0	961 .69	1906.0	961 .47	1927.0	961 .60
1886.0	961 .00	1907.0	961 .65	1928.0	961 .64
1887.0	961 .05	1908.0	961 .71	1929.0	961 .69
1888.0	961 .27	1909.0	961 .73	1930.0	961 .73
1889.0	961 .44	1910.0	961 .87	1931.0	961 .70
1890.0	961 .63	1911.0	961 .67	1932.0	961 .67
1891.0	961 .77	1912.0	961 .44	1933.0	961 .70
1892.0	961 .64	1913.0	961 .77	1934.0	961 .79
1893.0	961 .30	1914.0	961 .75	1935.0	961 .75
1894.0	960 .97	1915.0	961 .71	1936.0	961 .69
1895.0	960 .87	1916.0	961 .49	1937.0	961 .69
1896.0	960 .83	1917.0	960 .67		
1897.0	960 .70	1918.0	960 .60		

3. – Abbiamo poi ricondotto tutte queste osservazioni ad un unico omogeneo sistema, utilizzando l'osservatore MIGNUCCI, previa determinazione degli errori personali relativi dei diversi osservatori. Per l'ulteriore discussione, avente principalmente lo scopo di mettere in evidenza eventuali variazioni del diametro solare, abbiamo trascurato le osservazioni di RESPIGHI e di GIALANELLA, siccome inerenti ad un numero troppo

esiguo di anni; e poi - anche per attenuare il più possibile l'influenza delle condizioni atmosferiche, variabili di anno in anno, le cui variazioni possono quindi non essere del tutto eliminate nelle medie annuali - abbiamo proceduto (secondo quanto aveva iniziato l'ARMELLINI) ad una compensazione biennale delle medie annuali, prendendo come valore del semidiametro solare al principio di ogni anno la media aritmetica dei valori dell'anno precedente e dell'anno in corso. Così, per esempio, il valore compensato di R_{\odot} per il 1877,0 è la media dei due valori di R_{\odot} per il 1876,5 e il 1877,5.

La tabella III riporta appunto tali valori, che debbono essere considerati come l'ulteriore elaborazione dei dati bruti delle singole osservazioni; quei valori, cioè, sui quali dovrà fondarsi la discussione definitiva e la formulazione dei risultati e delle conclusioni.

TABELLA IV.
Medie quadriennali.

Quadriennio	R_{\odot}	N. osserv.	Quadriennio	R_{\odot}	N. osserv.
1876-79	961".34	1519	1908-11	961".71	1904
1880-83	961 .28	2490	1912-15	961 .74	1429
1884-87	961 .07	2443	1916-19	960 .94	1071
1888-91	961 .60	2316	1920-23	961 .38	874
1892-95	961 .11	2130	1924-27	961 .14	1374
1896-99	960 .75	2098	1928-31	961 .70	1591
1900-03	961 .00	2132	1932-35	961 .73	1403
1904-07	961 .58	1948			

4. - Si può notare che la durata della rotazione solare veduta dalla Terra è di giorni 27, e cioè non è un sottomultiplo esatto della lunghezza dell'anno. In conseguenza le medie annuali non eliminano eventuali ineguaglianze che potessero derivare nei diametri solari dall'essere osservati a latitudini eliografiche diverse, nell'ipotesi di una ellitticità del disco solare. Ad ovviare a questo presunto inconveniente, abbiamo divisa tutta la serie delle osservazioni in gruppi di 4 anni a partire dal 1876, prendendo per ciascuno di essi la media dei valori forniti annualmente, ognuna con un peso proporzionale al numero delle osservazioni in esso eseguite. Ed infatti, dopo 4 anni, il Sole presenta prossimamente nelle stesse epoche dell'anno i medesimi meridiani nella medesima orientazione rispetto all'angolo di posizione dell'equatore solare. La precedente tabella IV contiene questi *risultati*.

Astronomia. — *Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari.* — IV. *Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a)* ⁽¹⁾. Nota I di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La comparsa di una nuova cometa, suscettibile di buone e prolungate misure fotometriche, sia in luce normale che in luce monocromatica, mi ha permesso recentemente di proseguire le ricerche già da tempo iniziate all'Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario) sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. Queste nuove osservazioni, di cui qui presento i risultati, si riferiscono alla cometa *Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a)*, e cioè alla prima cometa scoperta in quest'anno. Le determinazioni di indice di colore del suo nucleo, di cui si parlerà nella Nota II, messe in relazione con le contemporanee misure della luminosità integrale, mi sembra possano portare nuova luce e dar conferma dell'esistenza di leggi ben determinate che collegano queste due quantità col variare della distanza della cometa dal Sole; leggi che già precedentemente mi era sembrato di poter intravedere.

D'altra parte, queste ricerche si possono anche utilmente ricollegare con i noti studi di BOBROVNIKOFF sugli spettri delle comete ⁽³⁾. Invero la determinazione dell'indice di colore di un astrò equivale ad un'analisi spettrale sommaria, poichè la curva spettrale degli astri (in particolare le stelle), considerati in prima approssimazione come « corpi neri », non dipende che da un solo parametro, la temperatura, la quale è funzione dell'indice di colore ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario).

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽³⁾ N. T. BOBROVNIKOFF, *On the spectra of Comets*. « *Astroph. Journ.* », vol. 66, pag. 439 (1927).

⁽⁴⁾ Cfr. BOTTLINGER, *Colorimetrie* in « *Handbuch der Astrophysik* », vol. II 1, pag. 351.

La cometa 1942 *a* è stata vista la prima volta in Europa dal dilettante BERNASCONI in Cagno (Como) la sera del 10 febbraio 1942, mentre era di 9^a grandezza, nella costellazione dei Cani da Caccia, e poi indipendentemente da KULIN a Budapest il 13; mentre una comunicazione telegrafica di H. SHAPLEY da Harvard (California) fatta attraverso l'Osservatorio di Lund, ne attribuiva la scoperta a WHIPPLE, il quale a mezzo della fotografia l'aveva individuata il 25 gennaio precedente. Ma tale comunicazione non è giunta in Europa che il 16 febbraio (1). Di qui il triplice nome di *Whipple-Bernasconi-Kulin* attribuito a questa cometa. Orbite calcolate con successive osservazioni hanno indicato come data del passaggio al perielio il 30 aprile con la distanza perielica di 1,44 unità astronomiche, mentre la minima distanza dalla Terra (perigeo) si è avuta il 6 marzo. La cometa era dotata di rapido moto verso le regioni Sud-Ovest del cielo, onde si prevedeva che essa si sarebbe potuta osservare soltanto fino alla seconda metà di aprile, e forse al più fino ai giorni immediatamente precedenti il suo passaggio al perielio.

Io ho cominciato ad osservarla a Monte Mario la sera del 13 febbraio, e cioè non appena ricevuta la notizia della scoperta. Ho fatto le osservazioni col solito equatoriale-rifratore di Cauchoix-Cavignato (mm. 155 di apertura e 2240 di focale), adoperando il fotometro a cuneo di Toepfer e opportuni filtri di luce.

Le osservazioni sono proseguite regolarmente fino a tutto il 21 aprile, cioè per un periodo di oltre settanta giorni, periodo che fortunatamente non è stato molto ostacolato da avverse condizioni atmosferiche (meno che nella seconda metà di febbraio e i primi giorni di marzo, nonchè verso la fine di marzo e la metà di aprile); onde ho potuto raccogliere un discreto gruppo di buone misure fotometriche. In questo periodo la luminosità apparente (integrale) del nucleo è variata tra i valori estremi di 9^m, 11 e 7^m, 52 con molte oscillazioni intermedie.

I. — GRANDEZZE INTEGRALI DEL NUCLEO.

La cometa ha presentato, fin dall'epoca della scoperta, un nucleo distinto, assai spesso brillante e di apparenza nettamente stellare, che si estingueva sotto il cuneo del fotometro a guisa di stella, colla medesima facilità e col medesimo ordine di precisione. In poche sere soltanto esso non è apparso nettamente distinto rispetto alle rimanenti regioni della testa e della chioma; in tali casi le misure sono state fatte puntando la parte più luminosa della chioma stessa, che non è mai mancata.

(1) *Beobachtungs-Zirculare*, vol. 24, n. 5, 1942; e «Circ. Copenhagen», n. 902.

TABELLA I.

*Fotometria visuale del nucleo della cometa Whipple-Bernasconi-Kulin
(1942 a).*

Data 1942.	*	t_g	T. U.	Cfr.		Lecture fotometro in mm.		Δm	Mag. nucleo (Harvard)	Medie serali
				○=	*	○=	*			
Febbraio 13	1	7h30m	21h05m	5	5	42.14	49.44	1m.21	8m.83	8m.83
15	2	7 25	20 50	9	9	35.42	48.31	2 .12	9 .03	9 .03
Marzo 4	3	8 30	20 53	8	8	40.00	53.01	2 .16	8 .50	8 .50
7	4	8 55	21 05	8	8	45.95	53.37	1 .23	7 .65	7 .65
9	5	7 57	20 00	5	2	42.07	54.90	2 .12	8 .41	
11	6	8 10	20 02	8	4	48.34	58.48	1 .68	7 .82	
11	7	8 10	20 02	8	4	48.34	50.22	0 .31	7 .69	7 .71
11	8	8 10	20 02	8	4	48.34	69.62	3 .54	7 .64	
12	9	8 22	20 15	8	4	47.02	53.05	1 .00	7 .87	
12	10	8 22	20 15	8	4	47.02	55.12	1 .34	7 .92	7 .90
14	11	8 39	20 20	8	8	47.50	53.39	0 .98	7 .86	
14	12	9 27	21 10	6	6	46.10	58.74	2 .00	7 .90	7 .88
15	12	9 27	21 05	9	9	42.86	57.69	2 .46	8 .27	8 .27
16	13	8 45	20 22	12	12	45.77	53.91	1 .35	8 .09	8 .09
19	14	9 55	20 30	12	12	42.79	52.08	1 .54	8 .36	8 .36
20	15	9 55	20 25	9	9	46.84	51.67	0 .80	7 .62	7 .62
24	16	8 37	19 40	8	8	43.26	55.77	2 .08	8 .38	
24	17	9 30	20 35	8	8	42.03	49.42	1 .23	8 .19	8 .29
25	17	8 35	19 35	12	12	43.86	52.75	1 .47	8 .43	8 .43
31	18	9 14	19 50	8	8	36.15	42.42	1 .04	8 .23	8 .23
Aprile 2	18	9 05	19 35	11	11	38.65	42.95	0 .71	7 .90	7 .90
3	18	9 29	19 46	8	8	41.64	43.60	0 .33	7 .52	7 .52
4	19	9 00	19 20	12	12	39.03	49.90	1 .80	7 .88	7 .88
6	20	9 31	19 36	8	8	41.17	53.25	2 .00	7 .76	
6	21	9 31	19 36	8	8	41.17	46.92	0 .95	7 .76	7 .69
6	22	10 18	20 23	5	5	38.38	42.42	0 .67	7 .66	
9	22	9 27	19 25	16	8	47.50	52.17	0 .77	7 .76	
9	23	9 27	19 25	16	8	47.50	53.96	1 .07	7 .80	7 .78

Segue: TABELLA I.

Data 1942	*	t_{κ}	T. U.	Cfr.		Letture fotometro in mm.		Δm	Mag. nucleo (Harvard)	Medie serali	
				$\odot \equiv$	*	$\odot \equiv$	*				
Aprile	10	21	9h25m	19h23m	16	16	43.92	52.24	1m.38	8m.11	8m.11
	11	23	9 48	19 40	8	8	35.62	49.91	2 .37	9 .10	9 .11
	11	24	9 48	19 40	8	8	35.62	49.62	2 .32	9 .11	
	13	24	9 35	19 20	8	8	41.59	53.34	1 .95	8 .74	8 .53
	13	24	10 30	20 15	12	6	44.07	54.00	1 .64	8 .43	
	13	27	10 30	20 15	12	6	44.07	54.14	1 .66	8 .41	

NOTE ALLA TABELLA I. - Feb. 13 nucleo distintissimo, abbastanza brillante; coda a ventaglio, poco estesa. - Feb. 15 cometa meno vivida di ieri; nucleo più rossastro. - Feb. 17 e 19 rivista la cometa, con cielo cattivo; misure impossibili; la cometa sembra meno luminosa e più piccola. - Mar. 4 dopo lungo periodo di maltempo, nucleo molto distinto, stelliforme; coda poco netta; debole chiarore lunare. - Mar. 5 nucleo grande, più giallastro; chioma e testa grandi; coda a ventaglio. - Mar. 7 cometa più luminosa e più azzurra; nucleo grande, vivido. - Mar. 9 osservazioni ostacolate dalle nuvole; misura della grandezza integrale assai incerta; non ne ho tenuto conto; il nucleo sembra meno luminoso e più azzurro. - Mar. 11 cometa più luminosa; nucleo vivido, puntiforme, forse diviso in due; la coda comincia a distinguersi bene. - Mar. 12 cometa alta, in meridiano; nucleo meno vivido e puntiforme di ieri; coda più estesa, di 20' circa. - Mar. 14 nucleo diffuso, ma ben distinto, giallastro; chioma grande; coda lunga e sottile. - Mar. 15 osservazioni disturbate da nubi; cometa meno luminosa; nucleo non vivo, ma diffuso, come stella sfocata; misure difficili specie col filtro violetto. - Mar. 16 nucleo vivido, stelliforme; chioma e testa grandi, rotonde; coda poco estesa, sottile. - Mar. 19 nucleo diffuso non puntiforme, circondato da un'ampia testa rotonda; coda esigua. - Mar. 20 cometa molto più brillante con nucleo vivo, puntiforme; niente coda. - Mar. 25 chiarore lunare; misure difficili, specie col filtro violetto. - Mar. 31 dopo giorni di cattivo tempo; forte chiarore lunare; nucleo stelliforme. - Apr. 2 cometa più luminosa; nucleo sempre molto distinto, puntiforme. - Apr. 3 osservazioni disturbate dalle nubi; nucleo brillante. - Apr. 4 cometa in piena Via Lattea; nucleo ben distinto, con grossa testa tondeggiante e assai sfumata verso l'esterno. - Apr. 6 cometa poco più luminosa; ma nucleo grande, giallastro; piccola coda. - Apr. 9 nucleo grande, brillante; piccola chioma; coda brevissima. - Apr. 11 cometa improvvisamente assai piccola e poco brillante; nucleo stelliforme, nitido, con piccola chioma e coda appena appena visibile. - Apr. 12 nucleo diffuso, poco distinto, circondato da una piccola e tenue chioma tondeggiante; coda appena distinta. - Apr. 13 la cometa ha ripreso luminosità; nucleo vivo, grande; piccola testa e coda pressoché invisibile. - Apr. 20 dopo molti giorni di cattivo tempo; cometa assai bassa verso ponente; appare più piccola e meno luminosa; misure oltremodo difficili. Nei giorni successivi cercata invano al tramonto; intravista appena il 22 aprile, con chiarore lunare; ma misure impossibili.

Il metodo di osservazione è quello sempre adoperato e già altre volte descritto. Mi limito a ricordare che la scelta delle stelle di confronto è stata fatta con molta accuratezza, in modo che la distanza di esse dalla cometa fosse sempre esigua (al più un grado, ma solo eccezionalmente), onde evitare errori dovuti all'assorbimento atmosferico differenziale, e principalmente a differente illuminazione del fondo nelle serate (non molte, in verità) in cui necessariamente ho dovuto osservare col chiarore lunare. Ma — come del resto avevo già avuto occasione di notare — tale chiarore lunare, purché non eccessivo (e cioè tale da mostrare la colorazione rossiccia del cuneo del fotometro), non reca influenza nociva sulle osservazioni, sia fatte in luce normale che in luce monocromatica (per le determinazioni dell'indice di colore). Piuttosto, ho avuto sempre molta cura di fare i confronti della luminosità integrale del nucleo con un'immagine extra-focale della stella, o delle stelle di paragone, ricoprente prossimamente la medesima area del nucleo. Data la posizione in cielo della cometa, che ha traversato in pieno la Via Lattea, ho scelto stelle di confronto relativamente brillanti, in modo che ne fosse sicuro sia il riconoscimento e sia il valore della grandezza.

TABELLA II.
Stelle di confronto.

Num.	Stella	Mag.	Sp.	Num.	Stella	Mag.	Sp.
1	Boss Gen. Cat. 16518	7m.62	F2	14	Boss Gen. Cat. 12183	6m.82	A5
2	Boss Gen. Cat. 16358	6 .91	F2	15	Boss Gen. Cat. 11984	6 .82	A5
3	Boss Gen. Cat. 14745	6 .34	Ko	16	Boss Gen. Cat. 11435	6 .50	Ko
4	Boss Gen. Cat. 13836	6 .42	F2	17	Boss Gen. Cat. 11360	6 .96	K2
5	Boss Gen. Cat. 13583	6 .29	Ko	18	Boss Gen. Cat. 10750	7 .19	F5
6	Boss Gen. Cat. 13010	6 .14	Ko	19	Boss Gen. Cat. 10322	6 .08	Ko
7	Boss Gen. Cat. 13562	7 .38	K2	20	Boss Gen. Cat. 10115	5 .76	Ko
8	Hydrae	4 .10	Ko	21	Boss Gen. Cat. 10138	6 .81	B3
9	Boss Gen. Cat. 13085	6 .87	Ao	22	Boss Gen. Cat. 10044	6 .99	Ko
10	Boss Gen. Cat. 13299	6 .56	Ko	23	Boss Gen. Cat. 9916	6 .73	B2
11	Boss Gen. Cat. 12985	6 .88	F5	24	Boss Gen. Cat. 9774	6 .79	Ao
12	Boss Gen. Cat. 12992	5 .81	K5	25	Boss Gen. Cat. 9724	6 .75	Ko
13	Boss Gen. Cat. 12522	6 .74	Ao				

La cometa è stata osservata generalmente alta sull'orizzonte, meno che negli ultimi giorni, in cui, per il suo rapido avvicinarsi al Sole, si è vista piuttosto bassa. La tabella I raccoglie i risultati delle osservazioni, presentati al modo consueto.

La tabella II contiene l'elenco delle stelle adoperate per i confronti. Le grandezze sono nella scala di Harvard (R. H. P.)

Per costruire la curva di luce delle grandezze osservate del nucleo cometario, ho proceduto - al solito - ad una opportuna perequazione dei valori bruti delle osservazioni serali, raggruppando, ove possibile, in gruppi i valori delle medie serali, ed ottenendo per le date indicate nella prima colonna della tabella III le *grandezze apparenti perequate* m_p .

TABELLA III.

Data 1942 T. U.	m_p	Quantità calcolate					
		r	Δ	M_1	M_2	M_3	
Febbraio . . 14.87	8m.93	1.783	0.794	8m.93	8m.93	8m.93	
Marzo . . . 4.87	8 .50	1.652	0.668	8 .39	8 .22	8 .07	
	7.88	7 .65	1.632	0.662	8 .35	8 .15	7 .97
	12.37	7 .80	1.604	0.667	8 .31	8 .09	7 .86
	15.85	8 .08	1.584	0.680	8 .33	8 .07	7 .82
	20.35	7 .99	1.558	0.717	8 .42	8 .13	7 .85
	25.33	8 .36	1.536	0.771	8 .56	8 .23	7 .93
	31.83	8 .23	1.508	0.856	8 .73	8 .36	8 .02
Aprile . . . 3.33	7 .71	1.503	0.880	8 .80	8 .41	8 .05	
	5.81	7 .78	1.489	0.930	8 .88	8 .49	8 .13
	10.31	7 .95	1.476	0.999	9 .01	8 .62	8 .23
	12.82	8 .82	1.469	1.038	9 .19	8 .67	8 .27

Con questi valori m_p ho costruito la curva di luce riportata in figura 1 nella linea a tratto marcato. Tale curva di luce presenta un aspetto molto irregolare, con rapide variazioni dello splendore apparente del nucleo. Come ho già detto, le mie osservazioni si riferiscono tutte ad un periodo precedente il passaggio al perielio, ma invece a cavallo del perigeo (6 marzo); questo può giustificare in parte l'andamento della curva di luce

trovata; ma restano sempre bene evidenti i rapidi e improvvisi incrementi di luce del nucleo.

Per determinare la legge secondo cui — quando si prescinda da queste improvvise variazioni di splendore — si può considerare sia variata la luminosità integrale del nucleo col variare delle distanze eliocentriche e geo-

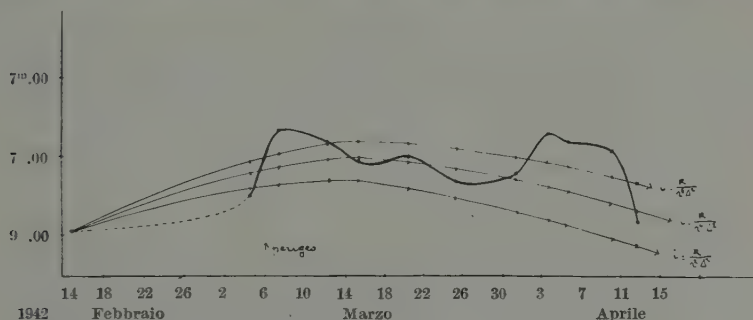


Fig. 1. — Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a). — Curve di luce: osservata e teoriche.

centriche della cometa, ho calcolato i valori teorici che avrebbe assunto (per ognuna delle date della 1ª colonna della tab. III) la sua intensità luminosa, se per le sue variazioni valessero rispettivamente le leggi:

$$[1] \quad i_1 = \frac{k}{r^2 \Delta^2} \quad ; \quad i_2 = \frac{k}{r^4 \Delta^2} \quad ; \quad i_3 = \frac{k}{r^6 \Delta^2}$$

essendo r la distanza della cometa dal Sole e Δ quella dalla Terra.

In dipendenza di ognuna di queste leggi, le grandezze teoriche sarebbero rispettivamente:

$$[2] \quad M_1 = m_0 - 5 \log(r\Delta) \quad ; \quad M_2 = m_0 + 5 \log(r^2 \Delta) \quad ; \quad M_3 = m_0 + 5 \log(r^3 \Delta).$$

Questi valori sono riportati nelle ultime tre colonne della tabella III. I valori di r e Δ corrispondenti sono stati ricavati dall'effemeride di J. P. MOLLER ⁽¹⁾, extrapolando per il 1º valore del 14 febbraio, poichè detta effemeride comincia soltanto il 22 febbraio.

Le curve della figura 1 a tratto sottile rappresentano graficamente tali leggi teoriche. Il loro punto iniziale è naturalmente arbitrario, ciascuna potendosi immaginare spostata parallelamente all'asse delle ordinate. In figura, esse sono state tracciate facendole partire dallo stesso punto iniziale corrispondente al valore della prima osservazione (pere-

⁽¹⁾ « Circ. Copenhagen », n. 901 e 907.

quata) del febbraio 14,87. Per esso corrispondono rispettivamente i valori di m_0 delle formule [2]:

$$\begin{array}{ll} m_0 = 8^m,18 & \text{per } M_1 \\ m_0 = 6,92 & \text{per } M_2 \\ m_0 = 5,68 & \text{per } M_3. \end{array}$$

Il confronto della curva di luce osservata con queste curve teoriche mostra che non è facile stabilire un paragone completo fra di esse. Come andamento generale, sembrerebbe che la variazione della luminosità si sia avvicinata alla legge $\frac{k}{r^6 \Delta^2}$, per quanto in singoli tratti parziali potrebbe assomigliarsi di più alla curva dipendente da $\frac{k}{r^4 \Delta^2}$, sempre quando si escludano le temporanee estinzioni ed incrementi della luce nucleare. In linea generale, si potrebbe concludere che le variazioni della luminosità del nucleo della cometa *Whipple-Bernasconi-Kulin* (1942 a) sono avvenute massimamente secondo una legge in cui l'esponente di r si può immaginare compreso tra -4 e -6. Si tratta quindi di una cometa normale ⁽¹⁾.

(¹) È noto, d'altra parte, che la questione della legge che lega la luminosità delle comete colla distanza eliocentrica non è ancora risolta in modo definitivo. Recentemente S. VSEKHSVYATSKY ha discusso le osservazioni di 87 comete (Cfr. « Poulkovo Circ. », 22-23, 1937), ricavandone una relazione della forma:

$$i = \frac{k 10^{-\frac{2}{2,5}(r^n-1)}}{\Delta^2}$$

la quale rappresenterebbe le osservazioni meglio della legge $i = \frac{k}{r^n \Delta^2}$ abitualmente adoperata [si veda anche utilmente « Trans. Int. Astr. Union », vol. VI, 1938, pag. 103 segg.].

Geodesia. — *Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati.* Nota⁽¹⁾ di CARLO MORELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

1. — INTRODUZIONE.

Sia $Pxyz$ una terna ortogonale di assi cartesiani, che supporremo destrorsa, con gli assi Px , Py coincidenti con le tangenti in P alle sezioni normali principali di una superficie σ regolare ma del resto qualunque dello spazio ordinario, e quindi con l'asse Pz nella direzione della normale in P a σ .

Come negli studi precedenti (4) (5), intenderemo di riferirci ad un intorno sufficientemente piccolo di P della superficie, che indicheremo pure con σ , e per il quale supporremo valga la rappresentazione cartesiana

$$z = z(x, y),$$

con $z(x, y)$ dotata di derivate prime, seconde e terze, continue in tutto il campo (x, y) proiezione di σ sul piano coordinato $z = 0$.

È noto allora che sulla superficie risulta determinato un sistema doppiamente infinito di linee geodetiche, le cui equazioni non si sanno in generale integrare, cioè non si sa da esse risalire ad una relazione in termini finiti contenente due costanti arbitrarie che insieme alla $z = z(x, y)$ determini la doppia infinità di linee in questione.

Tuttavia, fissato il punto P (del resto qualsiasi) della superficie, mediante gli sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN della geodesia classica riesce possibile di esprimere le coordinate cartesiane ortogonali di un altro punto qualunque Q dell'intorno σ in funzione dei raggi principali in curvatura R_1 , R_2 in P della superficie, della lunghezza dell'arco di geodetica che unisce P con Q , del suo azimut α in P e del suo raggio di prima curvatura $R\alpha$ pure in P .

In questi sviluppi intervengono quindi, oltre agli elementi geometrici spettanti alla superficie in P , anche degli elementi che sono relativi alla linea geodetica che passa per P e Q .

(¹) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1942-XX.

Nell'ordine degli studi recenti che generalizzano talune questioni di geodesia con la considerazione di triangoli curvilinei formati da archi di linee qualunque sopra una superficie pure qualunque (4), interessa di conoscere degli sviluppi per le coordinate cartesiane di Q più generali di quelli ora ricordati, in cui intervengano gli elementi geometrici di una linea *qualunque*, anche cioè non geodetica, che congiunga P con Q , oltre, naturalmente, agli elementi che si riferiscano alla superficie in P .

Il TOXOLO (7) ha risolto il problema assegnando per le coordinate di Q degli sviluppi accorciati analoghi a quelli di PUISEUX-WEINGARTEN e validi *in seconda approssimazione*: con semplici considerazioni si dimostra che essi, applicati all'ellissoide terrestre di riferimento internazionale di HAYFORD, sono sufficienti per operazioni con lati *non superiori ai 110 km. (campo di WEINGARTEN)*.

Poichè però nelle triangolazioni geodetiche di primo ordine è talvolta necessario superare questa misura, per esempio quando si devono collegare punti separati dal mare (4), riteniamo opportuno spingere queste formule, come già abbiamo fatto per il teorema di GAUSS (6), ad un più elevato ordine di approssimazione, considerando anche *i termini del terz'ordine*. Esse risultano così applicabili per dimensioni di lati *fino a 300 km.*, e sono quindi valide nella totalità dei casi che si possono presentare nella pratica.

In queste formule la superficie si manifesta con l'intervento dei suoi raggi principali di curvatura in P e delle loro derivate prime in questo punto rispetto alle variabili x, y , mentre la linea passante per P e Q interviene con la lunghezza dell'arco PQ , l'azimut in P , il raggio di curvatura in P della sezione normale tangente in P alla linea, ed inoltre mediante i valori in P della curvatura geodetica γ e delle sue prime due derivate intrinseche, cioè calcolate rispetto all'arco della linea considerata.

Per ottenere questi sviluppi useremo le *formule di Frenet generalizzate*, che in questo procedimento tengono proprio il posto dell'equazioni delle geodetiche (2).

A tal fine, sia C una linea qualunque tracciata su σ ed uscente da P , di equazioni parametriche

$$x^1 = x^1(s) \quad , \quad x^2 = x^2(s) \quad ,$$

(4) Nella triangolazione geodetica italiana i lati che collegano l'isola di Pantelleria alla Sicilia sono di circa 130 km., mentre raggiungono 198 km. quelli che uniscono la Sicilia alle isole Maltesi e 232 km. circa quelli che legano l'arcipelago toscano alla Sardegna.

In Europa il più grande triangolo è quello che unisce l'Africa alla Spagna, il cui lato maggiore è di 270 km.

(2) Ed a queste infatti si riducono quando la linea considerata è una geodetica.

con x^1, x^2 funzioni continue e derivabili fino al quarto ordine, ed il cui quadrato dell'elemento lineare sia dato dalla forma

$$[1] \quad ds^2 = \sum_{r,s}^2 a_{rs} dx^r dx^s.$$

Sia inoltre t un vettore unitario tangente a C nel suo punto corrente Q di ascissa curvilinea s , diretto nel verso assunto come positivo sulla curva; esso è un vettore superficiale, e le sue componenti contravarianti (1) t^1, t^2 saranno

$$[2] \quad t^1 = \left(\frac{dx^1}{ds} \right)_Q, \quad t^2 = \left(\frac{dx^2}{ds} \right)_Q.$$

Infine indichiamo con n un secondo vettore unitario, situato sulla normale principale in Q a C e diretto verso la concavità della curva in Q ; e con $\frac{1}{r}$ il valore assoluto della curvatura geodetica di C nel punto Q . Allora, se poniamo

$$v = \pm n$$

con v^1, v^2 componenti contravarianti di v , e conveniamo in conformità di assumere $\gamma = +\frac{1}{r}$ ($\gamma = -\frac{1}{r}$) quando si prenda $v = +n$ ($v = -n$), le formule di FRENET generalizzate (2) relative al punto P sono:

$$[3] \quad \frac{dt^i}{ds} = \gamma v^i - \sum_{jh}^2 \Gamma_{jh}^i t^j t^h,$$

$$[4] \quad \frac{dv^i}{ds} = -\gamma t^i - \sum_{jh}^2 \Gamma_{jh}^i v^j t^h, \quad (i = 1, 2).$$

2. - SIMBOLI DI CHRISTOFFEL DI SECONDA SPECIE.

LORO DERIVATE PRIME E SECONDE NEL PUNTO P .

Per il calcolo degli sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN generalizzati avremo bisogno dei valori dei simboli di CHRISTOFFEL Γ_{jh}^i di seconda specie della forma [1] e delle loro derivate prime e seconde nel punto P . Essi sono definiti (3) dalla relazione.

$$[5] \quad \Gamma_{jh}^i = \Sigma_l a^{il} \left[\begin{matrix} j & h \\ l \end{matrix} \right],$$

(1) V. per esempio (3), pag. 113.

(2) V. per esempio (2), pagg. 103-107.

(3) V. per esempio (1), pag. 64.

dove a^{li} indica il reciproco di a_{li} , e

$$[6] \quad \begin{bmatrix} j & h \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{jh}}{\partial x^l} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x^h} \right)$$

indica il simbolo di CHRISTOFFEL a tre indici di prima specie.

Perciò, osserviamo intanto che, con le notazioni di MONGE

$$[7] \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

ed intendendo $x^1 = x$, $x^2 = y$, per i coefficienti della forma [1] abbiamo, come è noto, le espressioni

$$[8] \quad a_{11} = 1 + p^2, \quad a_{12} = a_{21} = pq, \quad a_{22} = 1 + q^2,$$

e quindi per gli elementi reciproci a^{rs} degli elementi a_{rs} del discriminante a della [1]:

$$[9] \quad a^{11} = \frac{1 + q^2}{1 + p^2 + q^2}, \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{pq}{1 + p^2 + q^2}, \quad a^{22} = \frac{1 + p^2}{1 + p^2 + q^2},$$

con

$$a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 1 + p^2 + q^2.$$

Dalle [6] per le [8] e [7] segue subito che i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie della forma [1] hanno i valori

$$[10] \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{bmatrix} = pr, & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} = ps, & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} = pt, \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} = qr, & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} = qs, & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{bmatrix} = qt. \end{cases}$$

Inoltre, per la particolare scelta degli assi di riferimento risulta nel punto P

$$[11] \quad p = q = 0, \quad r = \frac{1}{R_1} = K_1, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{R_2} = K_2,$$

dove, per uniformità con quello che segue, introduciamo i simboli $K_1 = \frac{1}{R_1}$, $K_2 = \frac{1}{R_2}$.

Dalle [10] segue intanto che tutti i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie della forma [1] sono nulli in P ; e quindi per le [5] lo sono anche quelli di seconda specie.

Da ciò risulta che, poichè derivando le [5] per esempio rispetto ad x si ha

$$[12] \quad \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x} = \sum_l^2 \frac{\partial a^{li}}{\partial x} \begin{bmatrix} j & h \\ l \end{bmatrix} + \sum_l^2 a^{li} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} j & h \\ l \end{bmatrix},$$

possiamo limitarci a scrivere in P

$$\frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x} = \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y} = \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix},$$

da cui, osservando che per le [9] si ha in P

$$[13] \quad a^{11} = a^{22} = 1, \quad a^{12} = 0,$$

otteniamo senz'altro

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_{jh}^i = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} j & h \\ i & \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_{jh}^i = \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} j & h \\ i & \end{bmatrix};$$

cioè, per le [10] e [11], ed introducendo il simbolo a due indici K_{ih} definito dalla

$$K_{ih} = \frac{1}{R_i R_h},$$

dove i, h possono assumere una qualunque delle permutazioni con ripetizione dei due indici 1, 2, avremo nel punto P :

$$[14] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x} = K_{11}, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x} = K_{12}, \quad \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial y} = K_{12}, \\ \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial y} = K_{22}. \end{array} \right.$$

Per ottenere le derivate seconde dei simboli di CHRISTOFFEL nel punto P , deriviamo ancora, per esempio rispetto ad x , la [12]; otterremo:

$$[15] \quad \frac{\partial^2 \Gamma_{jh}^i}{\partial x^2} = \sum_2^2 \frac{\partial^2 a^{li}}{\partial x^2} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix} + 2 \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial a^{li}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix} + \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix}.$$

Sempre nel punto P , la prima sommatoria al secondo membro di questa è nulla per la presenza dei fattori $\begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix}$; per la seconda, si vede facilmente che in ogni caso il prodotto è nullo; sicchè possiamo scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_{jh}^i = \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix},$$

ed analogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Gamma_{jh}^i = \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Gamma_{jh}^i = \sum_1^2 a^{li} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{bmatrix} j & h \\ l & \end{bmatrix},$$

da cui per le [13] otteniamo senz'altro in P :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Gamma_{jh}^i &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} j & h \\ i \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Gamma_{jh}^i &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{bmatrix} j & h \\ i \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Gamma_{jh}^i &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{bmatrix} j & h \\ i \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Introducendo il simbolo a tre indici K_{ijh} definito dalla

$$K_{ijh} = \frac{1}{R_i R_j R_h},$$

dove ijh possono assumere una qualunque delle disposizioni con ripetizione dei due indici 1, 2 considerati tre a tre, ed osservando che nel punto P si ha per le [7] ed [11]

$$[16] \quad \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_P = -K_{11} R'_{1y}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right)_P = -K_{22} R'_{2x},$$

dove abbiamo posto

$$R'_{ix} = \frac{\partial R_i}{\partial x}, \quad R'_{iy} = \frac{\partial R_i}{\partial y}, \quad (i = 1, 2),$$

per le [10] e [11] si ottengono nel punto P le seguenti formule per le derivate seconde dei simboli di CRISTOFFEL di seconda specie rispetto alle coordinate x, y :

$$[17] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^1}{\partial x^2} &= -3 K_{111} R'_{1x}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^1}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \Gamma_{12}^1}{\partial x^2} = -2 K_{111} R'_{1y}, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^1}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Gamma_{12}^1}{\partial x \partial y} = -K_{122} R'_{2x}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{12}^1}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^1}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^1}{\partial x^2} &= -K_{112} R'_{1x} - 2 K_{122} R'_{2x}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^1}{\partial x \partial y} &= -K_{112} R'_{1y} - K_{122} R'_{2y}, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^1}{\partial y^2} &= -K_{222} R'_{2x}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} &= -K_{111} R'_{1y}, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^2}{\partial x \partial y} &= -K_{112} R'_{1x} - K_{122} R'_{2x}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{11}^2}{\partial y^2} &= -2 K_{112} R'_{1y} - K_{122} R'_{2y}, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{12}^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^2}{\partial x^2} = -K_{112} R'_{1y}, & \frac{\partial^2 \Gamma_{12}^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^2}{\partial x \partial y} = -2 K_{222} R'_{2x}, \\ \frac{\partial^2 \Gamma_{22}^2}{\partial y^2} &= -3 K_{222} R'_{2y}, \end{aligned} \right.$$

dove tutte le derivate che figurano nei secondi membri s'intendono sempre calcolate nel punto P .

Indichiamo ora con φ l'azimut della linea C in P contato a partire dall'asse Px nel verso positivo delle rotazioni fissato sul piano tangente in P . In questo punto le [2] diventano allora

$$[18] \quad t^1 = \cos \varphi, \quad t^2 = \sin \varphi,$$

e le componenti contravarianti del vettore \mathbf{r} saranno

$$[19] \quad v^1 = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi, \quad v^2 = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \varphi.$$

Si ha quindi in P :

$$[20] \quad t^1 = v^2, \quad t^2 = -v^1.$$

Nel seguito noi avremo bisogno delle derivate prime e seconde dei simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie non più rispetto alle coordinate x, y , ma rispetto all'arco s . Per calcolarle, osserviamo che per un generico s si ha per le [2]

$$\frac{d\Gamma_{jh}^i}{ds} = \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x} t^1 + \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y} t^2;$$

sostituendo in queste le [14], otterremo nel punto P

$$[21] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Gamma_{11}^1}{ds} = K_{11} t^1, \quad \frac{d\Gamma_{12}^1}{ds} = 0, \quad \frac{d\Gamma_{22}^1}{ds} = K_{12} t^1, \\ \frac{d\Gamma_{11}^2}{ds} = K_{12} t^2, \quad \frac{d\Gamma_{12}^2}{ds} = 0, \quad \frac{d\Gamma_{22}^2}{ds} = K_{22} t^2. \end{array} \right.$$

Derivando ancora rispetto ad s , otterremo

$$\frac{d^2 \Gamma_{jh}^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 \Gamma_{jh}^i}{\partial x^2} (t^1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Gamma_{jh}^i}{\partial x \partial y} t^1 t^2 + \frac{\partial^2 \Gamma_{jh}^i}{\partial y^2} (t^2)^2 + \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x} \frac{dt^1}{ds} + \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial y} \frac{dt^2}{ds},$$

e quindi, poichè le [3] diventano in P

$$[22] \quad \frac{dt^i}{ds} = \gamma^i,$$

per le [14], [17] e [18] otterremo le seguenti formule per le derivate prime e seconde intrinseche dei simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie nel punto P :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \Gamma_{11}^1}{ds^2} &= -3 K_{141} R'_{1x} \cos^2 \varphi - 4 K_{141} R'_{1y} \sin \varphi \cos \varphi - \\
&\quad - K_{122} R'_{2x} \sin^2 \varphi - K_{141} \gamma \sin \varphi, \\
\frac{d^2 \Gamma_{12}^1}{ds^2} &= -2 \cos \varphi (K_{141} R'_{1y} \cos \varphi + K_{122} R'_{2x} \sin \varphi), \\
\frac{d^2 \Gamma_{22}^1}{ds^2} &= -K_{142} \cos \varphi (R'_{1x} \cos \varphi + 2 R'_{1y} \sin \varphi) - \\
&\quad - 2 K_{122} \cos \varphi (R'_{2x} \cos \varphi + R'_{2y} \sin \varphi) - \\
&\quad - K_{222} R'_{2x} \sin^2 \varphi - K_{142} \gamma \sin \varphi, \\
\frac{d^2 \Gamma_{11}^2}{ds^2} &= -K_{122} \sin \varphi (R'_{2y} \sin \varphi + 2 R'_{2x} \cos \varphi) - \\
&\quad - 2 K_{142} \sin \varphi (R'_{1y} \sin \varphi + R'_{1x} \cos \varphi) - \\
&\quad - K_{141} R'_{1y} \cos^2 \varphi + K_{142} \gamma \cos \varphi, \\
\frac{d^2 \Gamma_{12}^2}{ds^2} &= -2 \sin \varphi (K_{142} R'_{1y} \cos \varphi + K_{222} R'_{2x} \sin \varphi), \\
\frac{d^2 \Gamma_{22}^2}{ds^2} &= -K_{112} R'_{1y} \cos^2 \varphi - 4 K_{222} R'_{2x} \sin \varphi \cos \varphi - \\
&\quad - 3 K_{222} R'_{2y} \sin^2 \varphi + K_{142} \gamma \cos \varphi.
\end{aligned}$$

[23]

BIBLIOGRAFIA.

- (1) BIANCHI L., *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I. (Spoerri, Pisa, 1902).
- (2) EISENHART L. P., *Riemannian geometry*. (Princeton University Press, 1927).
- (3) LEVI-CIVITA T., *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*. (Stock, Roma, 1925).
- (4) MORELLI C., *Formule fondamentali per l'estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque*. (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. XIII, fasc. 17, Roma, 1942).
- (5) MORELLI C., *Estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque*. (« Rend. R. Accademia d'Italia », vol. III, ser. 7^a, fasc. 10, 1942).
- (6) MORELLI C., *Il teorema di Gauss generalizzato in quarta approssimazione*. (« L'Universo », I. G. M., Firenze, a. XXIII, n. 6, 1942).
- (7) TONOLO A., *Sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati*. (« Rend. R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, serie 6^a, fasc. 10, 1939).

Geodesia. — *Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati.* Nota ⁽¹⁾ di CARLO MORELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

Indicata con σ una superficie regolare, ma del resto qualunque, dello spazio ordinario e con P un suo punto generico, fissiamo come sistema di riferimento una terna ortogonale di assi cartesiani, che supponiamo destrorsa, con l'asse Pz in direzione della normale in P a σ e con gli assi Px, Py coincidenti con le tangenti in P alle sezioni normali principali, di cui R_1, R_2 siano i raggi (principali) di curvatura.

Sia allora C una linea qualunque tracciata su σ ed uscente da P , di equazioni parametriche cartesiane

$$[1] \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s) \quad ,$$

con $x(s), y(s), z(s)$ funzioni continue e derivabili fino al quarto ordine. Indicato con Q un punto (variabile) di C di coordinate x, y, z , gli sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN generalizzati dal TONOLO (2) permettono di esprimere le coordinate cartesiane ortogonali di Q in funzione della lunghezza dell'arco \widehat{PQ} , dell'azimut φ in P , del raggio R_φ di curvatura in P della sezione normale ivi tangente a C , dei valori in P della curvatura geodetica γ e della sua derivata prima intrinseca $\dot{\gamma}$, nonché dei raggi principali di curvatura in C , quando Q sia compreso in un intorno di P piccolo tanto che siano trascurabili tutti i termini a partire dal terzo ordine: applicati all'ellissoide terrestre di riferimento, essi risultano validi per dimensioni di lati non superiori ai 110 km.

Nelle operazioni con grandi triangoli geodetici del primo ordine (per esempio quando si devono collegare punti separati dal mare; v. (1), Introduzione) si è costretti talvolta a superare questa misura. Abbiamo quindi ritenuto opportuno di estendere questi sviluppi, trascurando appena i termini a partire dal quarto ordine, in modo da renderli applicabili per dimensioni di lati fino a 300 km. e quindi sufficienti per la totalità dei casi che si presentano nella pratica.

(1) Pervenuta all'Accademia il 27 luglio 1942-XX.

Gli elementi che in essi intervengono in più rispetto a quelli del TONOLO sono le derivate prime in P dei due raggi principali di curvatura rispetto alle variabili x, y e la derivata seconda $\ddot{\gamma}$ in P della curvatura geodetica γ .

Alcune formule necessarie agli sviluppi che seguono sono state calcolate in (1).

Indicando con $PQ = l$ l'ascissa curvilinea positiva di Q rispetto a P constata su C e sviluppando le [1] in serie di MAC-LAURIN, otteniamo

$$[2] \quad \begin{cases} x = l \frac{dx}{ds} + \frac{l^2}{2!} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{l^3}{3!} \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{l^4}{4!} \frac{d^4x}{ds^4} + \dots, \\ y = l \frac{dy}{ds} + \frac{l^2}{2!} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{l^3}{3!} \frac{d^3y}{ds^3} + \frac{l^4}{4!} \frac{d^4y}{ds^4} + \dots, \\ z = l \frac{dz}{ds} + \frac{l^2}{2!} \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{l^3}{3!} \frac{d^3z}{ds^3} + \frac{l^4}{4!} \frac{d^4z}{ds^4} + \dots, \end{cases}$$

ove le derivate che figurano nei secondi membri vanno calcolate per $s = 0$, cioè nel punto P .

Per il calcolo di queste derivate, osserviamo che in coordinate cartesiane ortogonali per qualsiasi punto di C le [2] di (1) diventano

$$[3] \quad t^1 = \frac{dx}{ds}, \quad t^2 = \frac{dy}{ds},$$

e quindi il calcolo delle derivate successive della x e della y si riduce al calcolo delle derivate delle t^1, t^2 rispettivamente, *ma di ordine inferiore di una unità*.

Per fissare le idee, prendiamo in considerazione per esempio lo sviluppo [2] di MAC-LAURIN della coordinata x ; ricordando le [3], nonché le [21], [18], [19], [3], [4] di (1) ed il fatto che in P sono nulli tutti i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie, otterremo per le prime due derivate che figurano al secondo membro della prima delle [2] le espressioni seguenti nel punto P :

$$[4] \quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dt^1}{ds} = -\gamma \sin \varphi,$$

$$[5] \quad \frac{d^3x}{ds^3} = \frac{d^2t^1}{ds^2} = -\dot{\gamma}^2 \cos \varphi - \dot{\gamma} \sin \varphi - \frac{1}{R_1} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2} \right) \cos \varphi.$$

Ma, denotando con $R\varphi$ il raggio di curvatura della sezione normale tangente in P alla curva C , si ha per la formula di EULERO

$$[6] \quad K\varphi = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi,$$

dove conserviamo le notazioni introdotte in (1):

$$K_i = \frac{1}{R_i}, \quad (i = 1, 2, \varphi);$$

analogamente scriveremo nel seguito

$$K_{ij} = \frac{1}{R_i R_j}, \quad (i, j = 1, 2, \varphi);$$

$$K_{ijk} = \frac{1}{R_i R_j R_k}, \quad (i, j, k = 1, 2, \varphi).$$

Quindi la [5] si trasforma nella seguente:

$$[7] \quad \frac{d^3 x}{ds^3} = -\gamma^2 \cos \varphi - \dot{\gamma} \sin \varphi - K_{1\varphi} \cos \varphi.$$

Per ottenere la derivata quarta, derivando tre volte rispetto ad s la [3] di (1), otteniamo:

$$[8] \quad \frac{d^4 x}{ds^4} = \frac{d^3 t^1}{ds^3} = \ddot{\gamma} v^1 + 2 \dot{\gamma} \frac{dv^1}{ds} + \gamma \frac{d^2 v^1}{ds^2} - \sum_{jh} \frac{d^2 \Gamma_{jh}^1}{ds^2} t^j t^h - \\ - 2 \sum_{jh} \frac{d \Gamma_{jh}^1}{ds} \left(\frac{dt^j}{ds} t^h + t^j \frac{dt^h}{ds} \right) - \sum_{jh} \Gamma_{jh}^1 \left(\frac{d^2 t^j}{ds^2} t^h + 2 \frac{dt^j}{ds} \frac{dt^h}{ds} + t^j \frac{d^2 t^h}{ds^2} \right).$$

Si vede intanto subito, derivando la [4] di (1) rispetto ad s e tenendo conto delle [21], [18], [19], [22] di (1), che nel punto P si ha:

$$[9] \quad \frac{d^2 v^1}{ds^2} = \gamma^2 \sin \varphi - \dot{\gamma} \cos \varphi + (K_{11} - K_{12}) \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

Inoltre, la prima sommatoria al secondo membro della [8] diventa, per le [6] e per le [23] di (1):

$$[10] \quad \sum_{jh} \frac{d^2 \Gamma_{jh}^1}{ds^2} t^j t^h = -K_{1\varphi} \gamma \sin \varphi - 3 K_{11\varphi} R'_{1x} \cos^2 \varphi - 7 K_{22\varphi} R'_{2x} \sin^2 \varphi - \\ - 8 K_{11\varphi} R'_{1y} \sin \varphi \cos \varphi + 2 (K_{112} R'_{1x} \cos \varphi - K_{122} R'_{2y} \sin \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cos \varphi + \\ + 6 (K_{112} R'_{1y} \cos \varphi + K_{222} R'_{2x} \sin \varphi) \sin^3 \varphi,$$

dove abbiamo posto

$$\frac{\partial R_i}{\partial x} = R'_{ix}, \quad \frac{\partial R_i}{\partial y} = R'_{iy}, \quad (i = 1, 2).$$

Infine, la seconda sommatoria al secondo membro della [8] diventa, per le [18], [19], [21] e [22] di (1):

$$[11] \quad \sum_{jh} \frac{d \Gamma_{jh}^1}{ds} \left(\frac{dt^j}{ds} t^h + t^j \frac{dt^h}{ds} \right) = 2 \gamma (K_{12} - K_{11}) \varphi \cos^2 \varphi.$$

Sostituendo allora i valori dati dalle [9], [10], [11] nella [8], e tenendo ancora conto delle [4], [18] e [19] di (1), si ottiene:

$$[12] \quad \frac{d^4 x}{ds^4} = \gamma^3 \sin \varphi - \ddot{\gamma} \sin \varphi - 3\dot{\gamma} \cos \varphi + 5\gamma (K_{11} - K_{12}) \sin \varphi \cos \varphi + \\ + K_{1\varphi} \gamma \sin \varphi + 3 K_{11\varphi} R'_{1x} \cos^2 \varphi + 7 K_{22\varphi} R'_{2x} \sin^2 \varphi + \\ + 8 K_{11\varphi} R'_{1y} \sin \varphi \cos \varphi - 2 (K_{112} R'_{1x} \cos \varphi - K_{122} R'_{2y} \sin \varphi) \sin^2 \varphi \cos \varphi - \\ - 6 (K_{112} R'_{1y} \cos \varphi + K_{222} R'_{2x} \sin \varphi) \sin^3 \varphi.$$

Introducendo le [3], [4], [7], [12], nonché la [18] di (1), nello sviluppo [2] di MAC-LAURIN relativo alla coordinata x , otteniamo per essa la formula seguente:

$$[13] \quad x = l \cos \varphi - \frac{l^2}{2} \gamma \sin \varphi - \frac{l^3}{6} (\gamma^2 \cos \varphi + \dot{\gamma} \sin \varphi + K_{1\varphi} \cos \varphi) + \\ + \frac{l^4}{24} [\gamma^3 \sin \varphi - \ddot{\gamma} \sin \varphi - 3 \dot{\gamma} \cos \varphi + 5 \gamma (K_{11} - K_{12}) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ + K_{1\varphi} \gamma \sin \varphi + 3 K_{11\varphi} R'_{1x} \cos^2 \varphi + 7 K_{22\varphi} R'_{2x} \sin \varphi + \\ + 8 K_{11\varphi} R'_{1y} \sin \varphi \cos \varphi - 2 (K_{112} R'_{1x} \cos \varphi - K_{122} R'_{2y} \sin \varphi) \sin^2 \varphi \cos \varphi - \\ - 6 (K_{112} R'_{1y} \cos \varphi + K_{222} R'_{2x} \sin \varphi) \sin^3 \varphi] + \dots$$

Un procedimento perfettamente simile a quello ora esposto, ma relativo alla coordinata y , conduce allo sviluppo:

$$[14] \quad y = l \sin \varphi + \frac{l^2}{2} \gamma \cos \varphi - \frac{l^3}{6} (\gamma^2 \sin \varphi - \dot{\gamma} \cos \varphi + K_{2\varphi} \sin \varphi) - \\ - \frac{l^4}{24} [\gamma^3 \cos \varphi - \ddot{\gamma} \cos \varphi + 3 \dot{\gamma} \sin \varphi - 5 \gamma (K_{12} - K_{22}) \sin^2 \varphi \cos \varphi + \\ + K_{2\varphi} \gamma \cos \varphi - 7 K_{11\varphi} R'_{1y} \cos^2 \varphi - 3 K_{22\varphi} R'_{2y} \sin^2 \varphi - \\ - 8 K_{22\varphi} R'_{2x} \sin \varphi \cos \varphi + 2 (K_{122} R'_{2y} \sin \varphi - K_{112} R'_{1x} \cos \varphi) \sin \varphi \cos^2 \varphi + \\ + 6 (K_{122} R'_{2x} \sin \varphi + K_{112} R'_{1y} \cos \varphi) \cos^3 \varphi] + \dots$$

Per ottenere infine il terzo sviluppo in questione, derivando successivamente rispetto ad s la funzione

$$z = z[x(s), y(s)] = z(s)$$

risulta

$$\frac{dz}{ds} = p \frac{dx}{ds} + q \frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = r \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2s \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + t \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + p \frac{d^2 x}{ds^2} + q \frac{d^2 y}{ds^2},$$

$$\frac{d^3 z}{ds^3} = \frac{\xi^3 z}{\xi x^3} \left(\frac{dx}{ds} \right)^3 + 3 \frac{\xi^3 z}{\xi x^2 \xi y} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 \frac{dy}{ds} + 3 \frac{\xi^3 z}{\xi x \xi y^2} \frac{dx}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{\xi^3 z}{\xi y^3} \left(\frac{dy}{ds} \right)^3 + \\ + 3r \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + 3s \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{dy}{ds} + 3s \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dx}{ds} + 3t \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{dy}{ds} + p \frac{d^3 x}{ds^3} + q \frac{d^3 y}{ds^3}.$$

Ne consegue, nel punto P , per le [3], [4], nonchè per le [11], [16], [18], [19] di (1):

$$\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 z}{ds^3} = & -K_{11} R'_{1x} \cos^3 \varphi - 3 K_{11} R'_{1y} \sin \varphi \cos^2 \varphi - 3 K_{22} R'_{2x} \sin^2 \varphi \cos \varphi - \\ & - K_{22} R'_{2y} \sin^3 \varphi - 3 \gamma K_1 \sin \varphi \cos \varphi - 3 \gamma K_2 \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della [6], si hanno le formule seguenti:

$$[15] \quad \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$[16] \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = K_\varphi,$$

$$[17] \quad \begin{aligned} \frac{d^3 z}{ds^3} = & -K_{11} (R'_{1x} \cos \varphi + 3 R'_{1y} \sin \varphi) \cos^2 \varphi - \\ & - K_{22} (3 R'_{2x} \cos \varphi + R'_{2y} \sin \varphi) \sin^2 \varphi - 3 \gamma (K_1 - K_2) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

dove, al solito, le derivate ai secondi membri si intendono sempre riferite al punto P .

Sostituendo quindi le [15], [16], [17] nella terza delle [2], risulta per la coordinata z lo sviluppo seguente:

$$[18] \quad \begin{aligned} z = & \frac{1}{2} K_\varphi l^2 - \frac{1}{6} [K_{11} (R'_{1x} \cos \varphi + 3 R'_{1y} \sin \varphi) \cos^2 \varphi + \\ & + K_{22} (3 R'_{2x} \cos \varphi + R'_{2y} \sin \varphi) \sin^2 \varphi + 3 \gamma (K_1 - K_2) \sin \varphi \cos \varphi] l^3 + \dots \end{aligned}$$

Le formule [13], [14], [18] costituiscono i nuovi sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN generalizzati; le derivate che vi figurano s'intendono sempre calcolate nel punto P .

Se nelle [13], [14], [18] trascuriamo i termini che sono almeno del terz'ordine, otteniamo le formule corrispondenti del TONOLO (2).

BIBLIOGRAFIA.

- (1) MORELLI C., *Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN generalizzati*. (« Rend. R. Accademia d'Italia », vol. IV, serie 7, fasc. 1, 1942-XXI).
- (2) TONOLO A., *Sviluppi di PUISEUX-WEINGARTEN generalizzati*. (« Rend. R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, serie 6, fasc. 10, 1939).

Geofisica. — *Sulla interpretazione delle misure eötvössiane nella prospezione del sottosuolo.* Nota ⁽¹⁾ di PIETRO TORTORICI, presentata da CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — I metodi di prospezione del sottosuolo hanno richiamato, negli ultimi anni, l'attenzione degli studiosi sia dal lato teorico che dal punto di vista tecnico e pratico.

Fra questi metodi hanno preso particolare sviluppo quelli relativi alla interpretazione delle misure eseguite con la bilancia di EÖTVÖS.

Desidero esporre qui poche riflessioni su questo argomento, per mettere meglio in rilievo qualche punto sul quale non mi pare si sia fermata abbastanza l'attenzione di numerosi e valenti ricercatori che hanno dato contributi essenziali in questo genere di ricerche.

Le considerazioni che esporrò sono di natura puramente teorica, ma, se non erro, devono essere tenute ben presenti prima di trarre conclusioni da ogni insieme di misure effettuate con la bilancia.

2. — In quel che segue prescindendo dunque dalle modalità pratiche sull'uso della bilancia e, per ogni punto nel quale si fece stazione, suppongo di possedere i cosiddetti *effetti geologici* o le *perturbazioni sotterranee*; cioè suppongo che le misure siano state depurate dei *valori normali* e abbiano subito le *correzioni topografica e cartografica*, secondo quanto insegna la teoria dello strumento ⁽²⁾.

3. — Prendiamo in esame il problema se, note in una regione qualsiasi le azioni dovute a masse sotterranee (*effetti geologici*), si possa fare qualche precisazione sulla loro entità, sulla loro ubicazione e sulla loro forma.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 24 settembre 1942-XX.

⁽²⁾ (Cfr. A. VENTURI. *Teoria della bilancia di torsione di Eötvös*. « Atti della R. Acc. di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo », serie 3^a, vol. IX, 1908; G. BOAGA. *Teoria della bilancia di torsione*. « L'Universo », anno XXII XXIII, 1942-XX.

Alcuni Autori, schematizzando, come è necessario, il problema, hanno supposto dapprima l'esistenza nel sottosuolo di un corpo omogeneo di massa M , di forma e posizione conosciuta (sfera, cilindro, parallelepipedo, gradino, ecc.) e ne hanno determinato analiticamente le azioni esterne calcolando il campo gravitazionale generato da quella massa e costruendo, su particolari piani verticali, interessanti grafici relativi al campo suddetto; hanno poi concluso che, viceversa, ove con la bilancia si riscontrassero effetti geologici di quel tipo (ciò che agevolmente si riconosce dai relativi grafici facilmente costruibili), nel sottosuolo deve esistere una massa ben determinata, in forma e posizione, che produce quegli effetti ⁽¹⁾.

In altre parole, la configurazione del campo esterno (limitatamente agli effetti geologici) caratterizzerebbe la massa in grandezza, forma e posizione nel sottosuolo.

Qualche altro Autore ⁽²⁾, allo stesso scopo, considera invece le deviazioni della verticale dovute parimenti a masse note presupposte nel sottosuolo e conclude, in modo analogo, che ove la bilancia di Eötvös fornisca deviazioni di un dato tipo, queste determinano una corrispondente massa sotterranea.

Il problema è importante e merita, secondo me, una accurata e rigorosa analisi.

4. — Reputo inutile ripetere o riportare calcoli già eseguiti da altri, pei quali rimando ai lavori citati, ed espongo senz'altro le mie considerazioni.

Per fissare le idee mi riferisco al caso più semplice, e cioè che nel sottosuolo, di densità h , si abbia una massa perturbante omogenea di forma sferica e densità σ , col centro a profondità p .

In primo luogo, per maggiore chiarezza di quanto dirò fra poco, torna opportuno distinguere la *massa perturbante* (quella producente cioè gli effetti geologici in considerazione) dal *corpo sotterraneo* limitato dalla medesima superficie sferica.

⁽¹⁾ Cfr. G. BOAGA: 1. *Modello di campo gravitazionale generato da una massa sferica sotterranea su punti di particolari piani verticali. Interpretazione delle misure eötvössiane*. « Bollettino del Comitato Nazionale per la Geodesia e Geofisica del C. N. R. », 1937; 2. *Sulla localizzazione di un corpo sferico mediante misure eötvössiane*. « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », 1936; A. MARCANTONI: 1. *Sulla localizzazione di un corpo sferico o assimilabile ad una sfera mediante misure eötvössiane*. Note I e II. « Rivista di Geofisica pura e applicata », vol. II, 1940; 2. *Sulla individuazione di una massa sotterranea isolata mediante misure con la Bilancia di Torsione di Eötvös*. « Rivista Geomineraria », 1941.

⁽²⁾ Cfr. C. AQUILINA, *Sulla possibilità di prospezione del sottosuolo con le deviazioni della verticale*. « La Ricerca Scientifica », n. 11 del 1941-XX. pag. 1126.

Infatti, la configurazione esterna accennata del campo si ha immergendo nel sottosuolo, col centro a profondità p , la sfera di cui si è fatta parola, ma questa immersione deve avvenire senza variazione alcuna nella distribuzione preesistente delle masse interne, cioè il corpo immerso deve compenetrare le masse preesistenti nel sottosuolo di guisa che, in definitiva, il corpo sotterraneo risultante è ancora sferico e la sua densità in ogni punto è $\sigma + h$ (h essendo costante o no).

A riprova di ciò, se si pensa di asportare la massa sferica perturbante, allo esterno non deve più aversi deformazione del *campo gravitazionale normale*, mentre è chiaro che se si asporta il corpo sotterraneo (secondo la definizione ora data) nel terreno resta una cavità sferica ed il campo esterno primitivo (quello cioè che si aveva prima di immergere la massa omogenea perturbante) risulta alterato.

Benchè sia notissimo, è opportuno ricordare qui che la bilancia di EÖTVÖS si presta solo a ricerche *puramente locali* e quando dico di *asportare una massa* intendo dire che deve farsi astrazione dalla medesima o ritenerla trasferita a distanza così grande da non influenzare la bilancia.

5. — Dopo di che, il punto sul quale desidero richiamare l'attenzione è quello accennato alla fine dell'articolo 3 sulla inversione dei fatti esaminati: io dico cioè che *la configurazione del campo esterno* (dovuto ad una massa perturbante nel sottosuolo) *rilevata con la bilancia, non autorizza ad alcuna conclusione sulla localizzazione e sulla forma della massa stessa.*

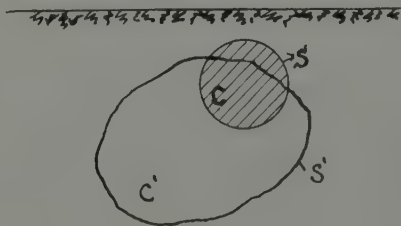


Fig. 1.

Supposto, infatti, di considerare un corpo C , di massa perturbante M , di densità σ , limitato dalla superficie S , tutto interno alla Terra, si associ ad esso un corpo arbitrario C' di *attrazione esterna nulla* (e però di massa totale nulla), limitato da una superficie S' , immerso pure tutto nel sottosuolo e che contenga nel suo interno, tutto o in parte, il corpo C ⁽¹⁾.

(1) Cfr. P. PIZZETTI: 1. *Principi della Teoria meccanica della figura dei pianeti*, § 43, pag. 101, Pisa, Spoerri, 1913; 2. *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra*, « Annali di Matematica », tomo XVII, serie III.

Se σ è la densità nel punto generico di C , σ' quella nel punto generico di C' , h la densità nel sottosuolo prima di introdurre la massa perturbante M ed il corpo C' , allora la densità in un punto P della intersezione dei due corpi C e C' è $\sigma + \sigma' + h$ e quella in un punto di C' , esterno a C , è $\sigma' + h$.

Le condizioni cui bisogna assoggettare la densità σ' sono:

$$\sigma + \sigma' + h \geq 0, \quad \sigma' + h \geq 0$$

ed il corpo C' può determinarsi in quanti si vogliano modi.

Ne segue che l'azione esterna (effetti geologici) dovuta al corpo C è la stessa di quella dovuta al corpo $C + C'$ nel quale, con opportuna scelta di C' , può non restare traccia della primitiva distribuzione della massa di C .

In altre parole, al corpo C , senza che all'esterno il campo subisca alterazione alcuna, se ne può sostituire un altro $C + C'$ di forma e posizione totalmente diversa. Solamente la massa perturbante M è rimasta invariata ed anche il suo centro di massa, ma ciò non ha evidentemente alcun valore ai fini della prospezione mineraria.

Quanto alla distribuzione della massa nel nuovo corpo, si ricordi che in C' può assegnarsi *arbitrariamente* la funzione $\Delta_2 \sigma'$ cioè il laplaciano della densità.

6. — Benchè non occorra aggiungere altro, non sarà inutile, data l'importanza dell'argomento, tornare all'esempio della sfera e mostrare come sia possibile pervenire alle stesse conclusioni con mezzi più diretti ed elementari.

Consideriamo dunque il corpo sferico C , tutto nel sottosuolo, col centro a profondità p e nel quale sia uniformemente distribuita, con densità σ , la massa perturbante M .

Il campo esterno alla Terra (effetti geologici) dovuto a questa massa perturbante è, come abbiamo ricordato, ben noto. Per trattare in un primo modo il nostro problema, serviamoci della *espansione sferica* intro-

pag. 225, 1910; G. LAURICELLA, *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna*. « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XX, 1911, fasc. II; C. MINEO: 1. *Sulla distribuzione della massa nell'interno di un corpo in corrispondenza a un'assegnata azione esterna*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIV, fasc. 10, 1915; 2. *Distribuzioni di massa nell'interno della Terra compatibili con i valori della gravità in superficie*. « Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Palermo », vol. XIV, 1929; 3. *Distribuzioni della massa nell'interno di un pianeta compatibili con una assegnata azione esterna*. « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », anno VIII, n. 2, 1929.

dotta dallo SCHIAPARELLI. Questa consiste nel sostituire ad una massa concentrata in un punto P una massa uguale distribuita secondo strati sferici omogenei con centro in P .

È evidente che con tale trasformazione, la quale può ripetersi quante volte si vuole, l'azione esterna di un corpo al quale appartenga P , non viene cambiata.

Isoliamo dunque, nella massa sferica omogenea M , una sferetta γ di centro P e massa μ e sostituiamo a quest'ultima massa un corpo sferico Γ , di raggio arbitrario ρ , a strati omogenei e pure di massa μ . Il raggio ρ si sceglierà in modo che il corpo sia tutto interno alla Terra. Se questo procedimento si applica a un numero arbitrario di sferette omo-

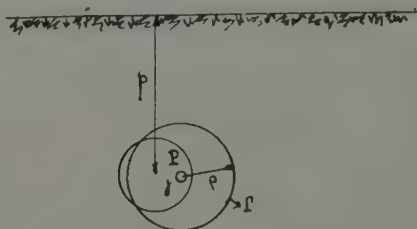


Fig. 2.

genee prefissate nella massa perturbante M , senza punti interni comuni, e si dispone opportunamente dei raggi ρ di espansione, alla massa M se ne sostituisce una bensì uguale, ma di forma pressochè arbitraria e con distribuzione della densità non più uniforme.

Siccome poi in un corpo sferico Γ (in tutti o in parte) si può, volendo, avere strati finiti omogenei, il procedimento può ancora ripetersi su sferette omogenee isolate in questi strati, e così la massa M può in parte essere allontanata quanto si voglia dal centro della sua primitiva forma sferica. In altre parole, della massa sferica perturbante non resta più traccia.

7. — Un secondo modo molto semplice di trattare la questione, e più generale del precedente, si ha introducendo le *sferule* del PIZZETTI.

È noto che dicesi *sferula* un corpo sferico di raggio arbitrario R , costituito da strati omogenei e di massa totale nulla.

Detta $\varphi(r)$ la densità di una *sferula* a distanza r dal suo centro, per individuare uno di questi corpi occorre e basta determinare una funzione $\varphi(r)$ tale che si abbia:

$$\int_0^R r^2 \varphi(r) dr = 0.$$

Nella scelta della funzione $\varphi(r)$ si ha una grandissima arbitrarietà e ad essa possono assegnarsi anche altre condizioni, ad esempio, che sia:

$$\varphi(0) = \alpha \quad , \quad \varphi(R) = \beta$$

con α e β prefissati ad arbitrio.

Se ponessi $\beta = -\frac{\alpha}{3}$, l'espressione più semplice di $\varphi(r)$ è quella lineare:

$$\varphi(r) = -\frac{4\alpha}{3R}r + \alpha$$

e questa sarebbe sufficiente per trattare il nostro problema.

È meglio mettersi però in condizioni leggermente più generali e più adatte al nostro scopo.

Si fissi per $\varphi(r)$ l'espressione quadratica:

$$\varphi(r) = ar^2 + br + c \quad (a, b, c, \text{ costanti})$$

con la condizione ulteriore che, essendo λ un numero *positivo* arbitrariamente fissato, sia, per qualunque r :

$$\varphi(r) > -\lambda$$

o, ciò che è lo stesso, il minimo di $\varphi(r)$, in $(0, R)$, sia maggiore di $-\lambda$. Detto allora λ_0 un numero positivo, minore di λ , si hanno le condizioni:

$$\begin{cases} \frac{a}{5}R^2 + \frac{b}{4}R + \frac{c}{3} = 0, \\ a > 0, \\ c - \frac{b^2}{4a} = -\lambda_0. \end{cases}$$

Ne segue:

$$[1] \quad c = -\frac{3}{5}aR^2 - \frac{3}{4}bR,$$

e per b la condizione:

$$[2] \quad 5b^2 + 15aRb - (20a\lambda_0 - 12a^2R^2) = 0.$$

Imponendo al discriminante di quest'ultimo trinomio in b la condizione di non essere negativo, si trae per a :

$$0 \leq a \leq \frac{80}{3} \frac{\lambda_0}{R^2}.$$

Se, fissato R ad arbitrio, si sceglie a in modo che sia:

$$0 < a < \frac{5}{3} \frac{\lambda_0}{R^2}.$$

l'equazione [2] ammette due radici distinte b_1, b_2 con

$$b_1 < 0 < b_2.$$

Se per b si sceglie il valore b_1 , risulta:

$$c = \varphi(0) > 0,$$

mentre, se si sceglie il valore b_2 , risulta:

$$c = \varphi(0) < 0.$$

Dunque può farsi in modo che in prossimità del centro la densità della sferula sia, a piacere, o negativa o positiva.

Quanto ai valori $\varphi(R)$ della densità in superficie, si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= aR^2 + bR + c = \frac{2}{5} aR^2 + \frac{b}{4} R + 3 \left(\frac{a}{5} R^2 + \frac{b}{4} R + \frac{c}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{5} aR^2 + \frac{b}{4} R. \end{aligned}$$

Se ponesi $b = b_2$, è $\varphi(R) > 0$; per $b = b_1$ si ha invece:

$$\varphi(R) = \frac{R}{40} [aR - \sqrt{\Delta}] < 0, \left(b_1 = -\frac{3}{2} aR - \frac{\sqrt{\Delta}}{10}, \Delta = 400 a\lambda_0 - 15 a^2 R^2 \right).$$

Cioè, nei due casi, gli strati prossimi alla superficie della sferula hanno corrispondentemente densità di segno diverso che nel centro e perciò, a volontà, o positiva o negativa.

Se, invece, si sceglie a in modo che sia:

$$\frac{5}{3} \frac{\lambda_0}{R^2} < a < \frac{80}{3} \frac{\lambda_0}{R^2},$$

le due radici b_1, b_2 della [2] sono ambedue negative:

$$b_1 < b_2 < 0.$$

Detti c_1, c_2 i corrispondenti valori di c , secondo la [1] si ha:

$$c_1 = \varphi(0) = \frac{3}{40} R (7 aR + \sqrt{\Delta}) > 0,$$

$$c_2 = \varphi(0) = \frac{3}{40} R (7 aR - \sqrt{\Delta})$$

e si ha $c_2 \leq 0$ secondo che, ordinatamente, è:

$$a \leq \frac{25}{4} \frac{\lambda_0}{R^2}.$$

Quanto ai valori $\varphi(R)$ della densità in superficie, per $b = b_1$, è:

$$\varphi(R) < 0 \quad \text{se} \quad a < \frac{25\lambda_0}{R^2}$$

e, invece:

$$\varphi(R) > 0 \quad \text{se} \quad a > \frac{25\lambda_0}{R^2},$$

mentre, per $b = b_2$, è $\varphi(R) > 0$ in ogni caso.

Allora, in corrispondenza della radice b_1 , è:

$$\varphi(0) > 0 \quad \text{e} \quad \varphi(R) > 0 \quad \text{se} \quad a > \frac{25\lambda_0}{R^2},$$

mentre, in corrispondenza alla radice b_2 , è:

$$\varphi(0) > 0 \quad \text{e} \quad \varphi(R) > 0 \quad \text{se} \quad a > \frac{25}{4} \frac{\lambda_0}{R^2}.$$

In ciascuno di questi casi i due zeri di $\varphi(r)$ sono interni allo intervallo $(0, R)$ e la corrispondente sferula di raggio R ha densità positiva sia nelle vicinanze del centro, sia nelle vicinanze della superficie.

Denoteremo brevemente con $\Sigma(\lambda_0, R)$ una qualunque delle sferule che possono costruirsi nella maniera indicata.

8. Ciò posto, si prenda in considerazione il corpo sferico C di massa perturbante M , di densità σ costante, immerso nel sottosuolo di densità h (anche non costante).

Se h_0 è il minimo della densità h (o almeno il minimo in una regione sufficientemente estesa intorno a C), denoti ora λ_0 un numero positivo minore di h_0 e σ , ed al corpo C si associ la sferula $\Sigma(\lambda_0, R)$ con la condizione di situarla tutta interna alla Terra e in modo da avere una parte comune con C . Si ottiene così il corpo $C + \Sigma$ (cioè il corpo del sottosuolo interno alle superficie di C o Σ) avente uguale massa perturbante di C e con la medesima azione esterna, inoltre con densità positiva in ogni punto, se escludiamo che nel sottosuolo ci siano delle cavità.

Se questo caso si verificasse, si disporrà la sferula in modo da non avere punti comuni con la cavità, ovvero in modo che nei punti comuni la densità risulti positiva.

Del resto, una cavità del sottosuolo può pensarsi *preventivamente colmata* introducendo una sferula di raggio abbastanza grande, con den-

sità negativa al centro e positiva alla superficie, e facendo in modo che la cavità stessa rimanga tutta interna allo strato più lontano dal centro, a densità positiva, della sferula.

Se ora σ_0 e h_0 sono i minimi (positivi) della densità del corpo $C + \Sigma$ e λ_0 è un numero positivo minore di σ_0 e h_0 , associamo a $C + \Sigma$ la sferula $\Sigma'(\lambda_0, R')$. Ne dedurremo un corpo $C + \Sigma + \Sigma'$ a densità ovunque positiva, e, così proseguendo, potremo pervenire a un corpo finale, sempre di massa perturbante M , che nulla ha più a vedere con la massa sferica primitiva e producente allo esterno la medesima azione.

9. — L'esempio trattato credo che basti a provare quanto ho asserito.

In luogo di corpi sferici ad attrazione esterna nulla si sarebbero potuti adoperare corpi ellissoidici aventi la stessa proprietà ovvero altri, ma ciò non ha importanza per la conclusione. Del resto, quanto fu detto al n. 5 è del tutto generale. Considerazioni analoghe possono farsi negli altri casi di masse perturbanti (cilindri, strati, gradini, ecc.) ed i procedimenti esposti possono ripetersi senza modifiche essenziali.

Se queste mie osservazioni sono fondate, deve appunto concludersi che la configurazione del campo esterno, dedotta esplorando con la bilancia di EÖTVÖS, non può, da sola, portare ad alcuna congettura attendibile sulla distribuzione delle masse nel sottosuolo. Ciò non significa però che le misure eötvössiane non abbiano un grande valore.

Ma, affinchè possa mettersi avanti qualche ipotesi plausibile, è necessario, come è già avvenuto in vari casi, tenere ben presenti i risultati di tutti gli altri metodi di prospezione e, soprattutto, è necessaria una completa e profonda conoscenza geologica dei luoghi.

Solo allora, se confortata cioè da molte coincidenze geofisiche, una congettura sulla distribuzione delle masse potrà essere ritenuta verosimile agli effetti di una ricerca mineraria e suggerire le opere di accertamento, in generale così difficili e costose.

Fisica (Fisica teorica). — *Sull'interpretazione dei « potenziali anticipati » della meccanica ondulatoria e su un « principio di finalità » che ne discende.* Nota ⁽¹⁾ di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dall'Accademico ROBERTO MARCOLONGO.

1. Mi propongo, in questa Nota, di completare in alcuni punti una teoria unitaria di tutti i fenomeni finora conosciuti (fisici, chimici, biologici, ecc.), che ho discusso fin dal gennaio scorso in alcune conversazioni private con vari colleghi, e che si trova esposta in due miei lavori, attualmente in corso di pubblicazione ⁽²⁾.

2. In tali lavori ho dimostrato che, poichè l'energia cinetica di una particella è sempre data, a meno di un fattore costante, dalla somma dei quadrati dei momenti, la corrispondente equazione di SCHRÖDINGER, nella meccanica ondulatoria, ha sempre come termini d'ordine più elevato (a meno di un fattore costante), quelli del Laplaciano

$$[1] \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

e invece la sola derivata prima $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ rispetto al tempo, e ciò qualunque sia la particella considerata (elettrone, protone, ecc.). Considerando ormai come definitivamente acquisite al nostro patrimonio scientifico la struttura corpuscolare ondulatoria di tutto il nostro Universo e la validità della teoria di relatività ristretta, segue allora necessariamente che, per avere

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1942-XXI.

⁽²⁾ *Principi di una teoria unitaria del mondo fisico e biologico fondata sulla meccanica ondulatoria e relativistica.* Memoria presentata nel luglio scorso alla Pontificia Accademia delle Scienze.

Die antizipierten Potentiale der Wellenmechanik als Bilder von biologischen Vorgängen. Nota riassuntiva della Memoria precedente, inviata nell'agosto scorso, a « Naturwissenschaften », per il tramite del prof. M. VON LAUE.

l'invarianza relativistica delle equazioni ondulatorie, i termini [1] d'ordine più elevato debbono completarsi in quelli dell'operatore di D'ALEMBERT

$$[2] \quad \square \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

e quindi si arriva alla conclusione notevole che, pur non conoscendosi completamente le vere equazioni ondulatorie (cioè *relativisticamente invarianti*) per tutte le varie specie di particelle (sono note le sole equazioni di Dirac per l'elettrone), *si conoscono però sicuramente i loro termini* [2] *d'ordine massimo e quindi il loro «cono caratteristico», che è sempre quello della luce*, come per l'equazione di D'ALEMBERT, e inoltre si sa che *tali equazioni restano invarianti cambiando il segno del tempo*, poichè tale cambiamento non è altro che una particolare trasformazione di LORENTZ, e ciò anche se le equazioni non sono omogenee, ma si ha una sorgente puntiforme all'origine dei tempi.

3. Riguardo alla conclusione, d'importanza capitale, circa la uguale struttura del cono caratteristico (della «luce») di *tutte* le vere equazioni ondulatorie, si potrebbe però sollevare il dubbio che il ragionamento precedente possa cadere in difetto quando, invece di uno *scalare* di campo ψ (come nelle equazioni di SCHRÖDINGER), viene a figurare come incognito un ente più complesso (di carattere spinoriale per esempio) *con più componenti* (caso che si verifica per l'appunto nelle equazioni di DIRAC, in cui figurano *quattro* componenti ψ); l'eliminazione di questo dubbio costituisce uno degli scopi del presente lavoro.

Intanto per un tale ente complesso ψ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) a m componenti, le equazioni ondulatorie di 2° ordine si ottengono applicando a queste componenti una sostituzione lineare, i cui coefficienti sono operatori differenziali del 2° ordine, ed eguagliando i risultati a certi termini noti, cioè si ha:

$$[3] \quad \sum_1^m A_{ik} \psi_k = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in cui però per la parte d'ordine più elevato degli operatori differenziali A_{ik} seguitano a valere le considerazioni precedenti relative alla forma della energia cinetica, e quindi tale parte sarà sempre data dall'operatore di D'ALEMBERT, applicato alle singole componenti. Le equazioni [3] saranno dunque del tipo più particolare

$$[4] \quad \square \psi_i + \sum_1^m B_{ik} \psi_k = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in cui i B_{ik} sono solo operatori di 1° ordine. Il dubbio sulla struttura del cono caratteristico può dunque sussistere solo per gli eventuali sistemi differenziali di 1° ordine.

$$[5] \quad \sum_1^m C_{ik} \psi_k = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

da cui i sistemi differenziali [3] o [4] del 2° ordine possono eventualmente pensarsi dedotti (come appunto nelle equazioni di DIRAC), mediante l'applicazione di altri operatori di 1° ordine C'_{ri} .

Ma pei sistemi a derivate parziali lineari generali del tipo [3], in cui i coefficienti A_{ik} rappresentino operatori differenziali d'ordine qualunque, le varietà caratteristiche $\varphi = 0$ si ottengono prendendo di ogni coefficiente i soli termini d'ordine più elevato, sostituendo in questi le operazioni di derivazione rispetto alle diverse variabili col prodotto ordinario delle corrispondenti derivate di φ rispetto alle stesse variabili (con che si ottiene per ogni operatore A_{ik} una forma algebrica A_{ik} nelle derivate parziali prime della φ) e infine eguagliando a zero il determinante di queste forme \bar{A}_{ik} . Quando gli operatori A_{ik} sono tutti dello stesso ordine v , e quindi le forme A_{ik} dello stesso grado v , si ottiene allora una equazione omogenea nelle derivate parziali prime della φ , di ordine mv , che, pensando queste derivate come coordinate omogenee di giacitura di una faccetta passante per il punto considerato, ci dà proprio l'equazione del cono involuppo di faccette caratteristiche uscenti dal punto.

Nel caso particolare di un sistema [5] di equazione del 1° ordine, gli operatori C_{ik} danno luogo a *forme lineari* \bar{C}_{ik} nelle derivate parziali della φ , e l'equazione del cono caratteristico, che si ottiene eguagliando a zero il determinante delle \bar{C}_{ik} è proprio d'ordine m . Se dal sistema [5] di 1° ordine si deduce poi un sistema di 2° ordine, combinando linearmente le sue equazioni con altri operatori di 1° ordine C'_{ri} , a cui corrispondano certe *forme lineari* C'_{ri} , nelle derivate parziali della φ , è però evidente che le forme di secondo grado che corrispondono agli operatori di 2° ordine $\sum_i C'_{ri} C_{ik}$ (nuovi coefficienti del sistema) sono proprio date da $\sum_i C'_{ri} \bar{C}_{ik}$, cioè dai prodotti delle righe per le colonne delle due matrici delle forme \bar{C}'_{ri} e \bar{C}_{ik} , e quindi l'equazione del cono caratteristico del sistema di 2° ordine si ottiene proprio eguagliando a zero il prodotto $|\bar{C}'_{ri}| |\bar{C}_{ik}|$ dei due determinanti di quelle matrici. Questo cono involuppo di classe $2m$ deve dunque spezzarsi nei due coni involuppi di classe m ciascuno, caratteristici per il sistema [5] e per il sistema di coefficienti C'_{ri} . Ma poichè il sistema di 2° ordine a cui si perviene è proprio del tipo [4] (per cui il cono caratteristico si ottiene eguagliando a 0 un determinante con tutti gli elementi nulli, meno quelli della diagonale principale, tutti uguali alla forma di 2° grado corrispondente

all'operatore di D'ALEMBERT, la quale, eguagliata a zero, rappresenta per l'appunto il cono della luce) avremo che da un lato il suo cono caratteristico dovrà ridursi *al cono della luce, contato m volte*, dall'altro dovrà spezzarsi nei due coni caratteristici, dello stesso ordine m , di [5] e dell'altro sistema di coefficienti C' , e quindi *questi coni caratteristici dovranno anch'essi ridursi necessariamente al cono della luce, contato ciascuno $\frac{m}{2}$ volte* (da cui segue che m è di necessità un numero pari, nel caso delle equazioni di DIRAC è $m = 4$, e il loro cono caratteristico è infatti quello della luce, contato doppiamente). Resta così dimostrata completamente l'affermazione fatta che *le vere equazioni ondulatorie (relativamente invarianti) di tutte le particelle dell'Universo, hanno sempre per cono caratteristico il cono della luce, contato eventualmente con una conveniente molteplicità*.

4. Da quanto precede, segue allora senz'altro (v. lavori citati) che fra le soluzioni di tali equazioni ondulatorie, corrispondenti a *sorgenti* puntiformi (e cioè alle sorgenti, necessariamente corpuscolari, effettivamente esistenti nell'Universo), possono distinguersi due grandi categorie, e cioè una data dalle soluzioni che sono identicamente nulle *prima* della sorgente, e quindi anche al di fuori del semicono caratteristico che *segue* la sorgente stessa, cioè al di fuori degli eventi *futuri* rispetto a questa, l'altra data invece dalle soluzioni delle equazioni ondulatorie che sono identicamente nulle *dopo* la sorgente, e quindi anche al di fuori del semicono caratteristico che *precede* la sorgente, cioè al di fuori degli eventi *passati* rispetto a questa. Di conseguenza le soluzioni della prima categoria potranno essere diverse da zero solo nel semicono del *futuro* uscente dalla sorgente e rappresenteranno dunque perturbazioni ondose che, col crescere del tempo, si propagheranno per onde sferiche *divergenti*, a partire dalla sorgente, e saranno perciò dette, analogamente a quanto si fa per l'equazione di D'ALEMBERT, soluzioni del tipo dei *potenziali ritardati*; mentre le soluzioni della seconda categoria potranno esser diverse da zero solo nel semicono del passato, e rappresenteranno quindi fenomeni propagantisi per onde sferiche *convergenti* verso la sorgente, nella quale vengono assorbiti, scomparendo completamente dopo di essa; queste soluzioni si diranno dei *potenziali anticipati*.

Nei lavori citati ho dimostrato due importanti teoremi pei fenomeni (ondulatori) rappresentati dai potenziali ritardati, che vengono chiamati fenomeni *entropici*, e cioè:

1° Condizione necessaria e sufficiente perchè un fenomeno sia entropico è che esso *obbedisca al principio di causalità*, abbia cioè una *causa*, che viene anzi a identificarsi con la sorgente, da cui il fenomeno stesso promana (essa è infatti la condizione necessaria e sufficiente per-

chè una soluzione identicamente nulla *prima* cessi di esserlo *dopo*; questi fenomeni sono dunque *causabili*, *provocabili* sperimentalmente a nostro arbitrio nei laboratori, col porre in atto la relativa sorgente, e comprendono quindi la quasi totalità dei fenomeni, specialmente fisici e chimici, finora studiati.

2° Per tutta l'immensa categoria dei fenomeni entropici vale sempre il secondo principio della termodinamica (da cui il loro nome), come è immediatamente evidente per il fatto che le onde sferiche divergenti che li rappresentano vengono sempre, col crescere del tempo, a sovrapporsi e mescolarsi sempre più, portando a un sempre maggiore mescolamento dei fenomeni stessi, cioè a una maggiore *entropia*.

Riguardo poi agli eventuali fenomeni che potrebbero essere rappresentati dai *potenziali anticipati*, e che ho chiamato fenomeni *diectropici*, valendomi del fatto che col cambiare il verso del tempo le equazioni ondulatorie restano invariate, mentre i due tipi di soluzioni (potenziali ritardati e anticipati) si scambiano l'uno nell'altro, dalle proprietà precedenti dei fenomeni entropici, ho potuto dedurre facilmente delle corrispondenti proprietà dei fenomeni *diectropici* (che non essendo causabili, potranno al più essere *osservati*, ma non *provocati* da noi, come avviene per la cosiddetta radiazione cosmica e per molti fenomeni vitali) e cioè:

3° Condizione necessaria e sufficiente perchè un fenomeno sia diectropico è che esso obbedisca al *principio di finalità*, vada cioè evolvendo verso uno *scopo*, un *fine*, dopo il quale il fenomeno stesso scompaia come tale, fine che si identifica con la sorgente, posteriore nel tempo, nel quale il fenomeno viene a riassorbirsi.

4° Per tutti i fenomeni diectropici varrebbe poi un principio generale, in certo senso opposto al 2° principio della termodinamica, dovendo per essi, col crescere del tempo, diminuire il mescolamento, e quindi *crescere la differenziazione* (o « diectropia » di un sistema diectropico, da cui il nome).

Osservando che sono proprio questi principî di *finalità* e di *differenziazione* sempre maggiore che vediamo in opera nei fenomeni della vita, quando non si voglia negar l'evidenza per partito preso (basti pensare alla *formazione dell'occhio*, e di altri organi complicatissimi dell'uomo e degli animali superiori) e che ne costituivano anzi finora i misteri più profondi, si conclude nei lavori già citati con l'ammettere *l'effettiva esistenza nella realtà dei fenomeni diectropici*, rappresentati dai potenziali anticipati, e manifestantisi specialmente, per le loro caratteristiche sopra ricordate, proprio come i *fenomeni tipici* della vita, per cui questa (*non provocabile* da noi in laboratorio) viene a distinguersi sostanzialmente dai comuni fenomeni fisici e chimici (da noi *provocabili* in laboratorio), che pure accompagnando spesso, nei fenomeni biologici, i fenomeni diectropici caratteristici della vita, non ne costituiscono però l'essenza.

In conclusione possiamo dunque dire che, se immaginiamo un fenomeno ondulatorio come « dovuto » alla sua sorgente, come avente nella sorgente il « suo centro propulsore », tutti i fenomeni dell'Universo, che sono di necessità ondulatori, si distribuiscono in due grandi categorie, secondo che il loro centro propulsore si trova nel *passato*, nel qual caso esso si presenta a noi come *causa* del fenomeno (*entropico*), o nel *futuro*, nel qual caso, invece, esso ci appare come il *fine* verso cui tende o evolve il fenomeno (*diectropico*).

5. Osservando poi che la maggior parte degli atti coscienti di un uomo normale sono sempre rivolti a *fini* futuri (fanno eccezione, per esempio, gli atti di *vendetta*, che hanno in una precedente offesa il loro centro propulsore, la loro *causa*), tali atti finalistici verrebbero poi a inquadrarsi anch'essi fra i fenomeni diectropici, che verrebbero così a costituire il tessuto fondamentale dei fenomeni di coscienza, caratteristici della nostra personalità.

Anzi, ricollegando la nostra personalità con un complesso di fenomeni *diectropici*, sarebbe anche spiegato il fatto importantissimo della *diversità sostanziale con cui appaiono a noi i due versi del tempo*, assolutamente inspiegabile con le sole equazioni ondulatorie fondamentali dell'Universo, del tutto simmetriche, come abbiamo visto, rispetto alle due direzioni del tempo. Tale diversità sostanziale sarebbe infatti dovuta a ciò che noi, in quanto centri di fenomeni coscienti, rivolti a fini, cioè diectropici, *saremmo legati indissolubilmente con un verso ben determinato del tempo*, il che ci permetterebbe di distinguere in modo essenziale i fenomeni (diectropici) dello stesso tipo nostro, da quelli, entropici, del tipo opposto. Questa spiegazione della diversità dei due versi del tempo costituisce un altro dei completamenti interessanti dei lavori già citati, che formano l'oggetto della presente Nota.

Chimica. — *Spettro ultravioletto di assorbimento del pirrolo e del N-Deuteriopirrolo in fase vapore* ⁽¹⁾. Nota di GIULIO MILAZZO, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico GIAMBATTISTA BONINO.

Vari studiosi hanno già esaminato lo spettro di assorbimento nell'ultravioletto del pirrolo. Tra di essi sono da ricordare in ordine di tempo HARTLEY e DOBBIE ⁽³⁾, PURVIS ⁽⁴⁾, KORSCHUN e ROLL ⁽⁵⁾, FRIEDLI ⁽⁶⁾, MENCZEL ⁽⁷⁾, SCHEIBE e GRIENEISEN ⁽⁸⁾. Dato che però il problema è ancora aperto ho ritenuto opportuno riesaminare tale composto allo stato di estrema purezza ⁽⁹⁾ in fase vapore, per eliminare qualsiasi influenza delle molecole del solvente, con mezzi sperimentali e conoscenze teoriche più affinati, confrontandolo inoltre collo spettro del N-deuteriopirrolo per individuare con maggiore probabilità sia il salto elettronico, sia le oscillazioni molecolari.

PARTE SPERIMENTALE.

I campioni di pirrolo sintetico e di N-deuteriopirrolo sono stati preparati e purificati nell'Istituto di chimica-fisica della R. Università di Bologna diretto dall'Ecc.za prof. G. B. BONINO. Nello spettro Raman

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma. Laboratorio di Chimica-fisica.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

⁽³⁾ W. N. HARTLEY, J. J. DOBBIE, « J. chem. Soc. », 73, 603 (1898).

⁽⁴⁾ J. E. PURVIS, « J. chem. Soc. », 97, 1655 (1910).

⁽⁵⁾ G. KORSCHUN, C. ROLL, « Bull. Soc. chim. France », IV, 33, 55 (1923).

⁽⁶⁾ H. FRIEDLI, « Bull. Soc. chim. biol. », 6, 908 (1924).

⁽⁷⁾ S. MENCZEL, « Z. physik. Chem. », 125, 161 (1927).

⁽⁸⁾ G. SCHEIBE, H. GRIENEISEN, « Z. physik. Chem. », B 25, 52 (1933).

⁽⁹⁾ Per rendersi conto della estrema purezza necessaria nello studio di queste sostanze basta osservare come nello spettro Raman del pirrolo sintetico siano assenti alcune righe, debolissime, dovute ad impurèzze, presenti invece nel pirrolo proveniente da olio di Dippel, anche dopo i più raffinati trattamenti di purificazione. Cfr. G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, « Rend. Accad. Lincei » [6] 25, 489 (1937).

del pirrolo sono assenti le righe del doppio legame $C=C$, ed è quindi lecito considerare i due campioni estremamente puri. Essi sono stati introdotti nell'apparecchio fuori del contatto dell'aria, sotto vuoto spinto ($p < 10^{-5}$ mm Hg) e distillati ancora una volta sotto la propria tensione di vapore tra la temperatura ambiente e la temperatura della miscela acetone-anidride carbonica solida, in una provetta direttamente collegata col tubo di assorbimento.

Sono stati usati due spessori differenti (18 e 50 cm), variando la pressione tra un massimo determinato dalla tensione di vapor saturo a temperatura ambiente ed un minimo corrispondente alla totale scomparsa dell'assorbimento. Per variare la pressione dei vapori della sostanza esaminata si è fatta variare la temperatura del bagno termostatico in cui stava immersa la provetta contenente la sostanza, collegata col tubo di assorbimento. Per determinare la pressione attuale di ogni spettrogramma si è fatto uso delle curve di tensione di vapore, pubblicate e discusse in altra nota ⁽¹⁾, misurando semplicemente la temperatura del bagno termostatico con una termopila di due elementi rame-costantina in serie, la quale permette un'esattezza di $\pm 0,5^\circ$.

Lo spettrografo in quarzo usato (Zeiss Chemiker III) permette la misura di spettri di assorbimento fino a 2000 \AA (50.000 cm^{-1}), non permette quindi lo studio dello spettro ultravioletto completo di queste sostanze. La sua dispersione media nel campo spettrale in cui tali sostanze presentano assorbimento è di $5,4 \text{ \AA/mm}$. La sorgente luminosa è costituita dal continuo dell'idrogeno con le righe del mercurio sovrapposte, utilizzate come righe di riferimento per la misura delle lunghezze d'onda.

Poichè le varie bande di assorbimento sono molto larghe e sfumate e ad esse si sovrappone inoltre un assorbimento continuo notevole, la loro lunghezza d'onda è stata misurata fotometrando gli spettri col grande fotometro registratore ZEISS ⁽²⁾ e misurando sulle fotometrie registrate le lunghezze d'onda dei massimi riferite alle righe del mercurio. La figura 1 mostra una di tali fotometrie per dare un'idea dell'aspetto delle bande. L'errore che si compie in tale misura dipende evidentemente dall'esattezza colla quale si può localizzare il massimo: essa è circa $\pm 15 \text{ cm}^{-1}$ per le bande con massimo ben definito, un pò maggiore per quelle individuate soltanto da leggere ondulazioni o da flessi della curva fotometrica.

Gli spettri delle due sostanze esaminate sono molto simili ed alle loro bande compete un ordinamento analogo. Nelle tabelle 1 e 2 sono

(1) G. MILAZZO, « Boll. scient. Fac. chim. ind. Bologna », 1941, 94.

(2) Le fotometrie sono state eseguite col fotometro in dotazione al Laboratorio astrofisico della Specola Vaticana in Castel Gandolfo, diretto dal prof. A. GAT-TERER, che tengo a ringraziare particolarmente ancora una volta per la cortesia colla quale mi ha ospitalmente permesso di lavorare nel suo laboratorio.

raccolte tutte le osservazioni relative alle bande osservate. A maggior comprensione di esse bisogna però aggiungere alcuni chiarimenti.

La larghezza delle bande è stata misurata a metà altezza ed è praticamente invariabile al variare della pressione.

L'unità di misura dell'intensità relativa, $1/P \cdot D$, cioè l'inverso della pressione alla quale la banda è appena visibile per lo spessore dello strato di vapore attraversato dal fascio di raggi, permette di paragonare le intensità relative anche se fotografate con spessori diversi ed è quindi preferibile alla semplice relazione $1/P$ che sovente s'incontra nella letteratura. Poichè però queste sostanze, oltre ad uno spettro di bande presentano un assorbimento continuo nella stessa regione spettrale, è molto difficile

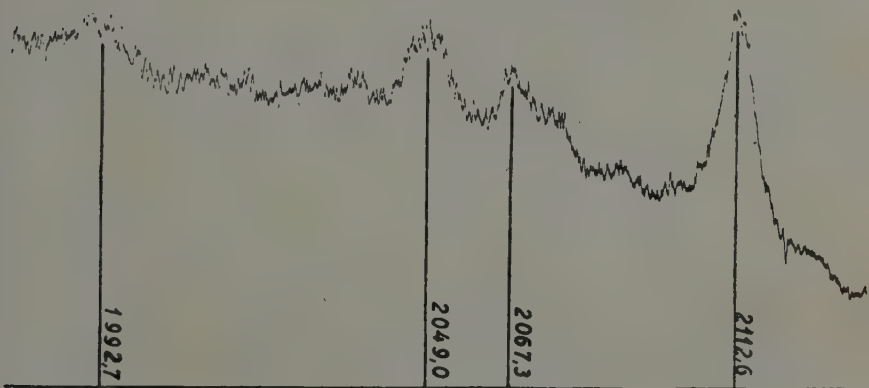


Fig. 1.

la misura esatta, anche soltanto relativa delle intensità. *I valori dati nelle tabelle hanno quindi un carattere piuttosto indicativo dell'andamento della distribuzione delle intensità, che non veramente quantitativo*, e ciò anche per altre ragioni di fotometria fotografica illustrate in seguito. È inoltre da notare che, dati gli spessori a disposizione e le tensioni di vapore saturo a temperatura ambiente (circa 8 mm Hg per il pirrolo e circa 5 mm Hg per il deuteriopirrolo), non è possibile osservare bande il cui coefficiente di estinzione molecolare, definito dalla legge di LAMBERT-BEER, sia minore di 6 e rispettivamente di 10.

Nelle tabelle è compreso anche l'ordinamento probabile delle singole bande individuato dagli stati iniziale e finale; per mezzo della lettera A si indica lo stato elettronico fondamentale, mentre colla lettera C si indica il livello elettronico eccitato; il numero tra parentesi indica il valore delle oscillazioni accoppiate allo stato iniziale o finale ed il fattore per il quale moltiplicare l'oscillazione sta ad indicare il numero di quanti dell'oscillazione in esame. Il valore delle oscillazioni allo stato fonda-

mentale è stato preso dal lavoro di BONINO e MANZONI-ANSIDEI⁽¹⁾, mentre per lo stato eccitato i valori relativi sono stati ricavati dallo spettro ultravioletto.

Nel calcolo della frequenza teorica in base all'ordinamento non è stato possibile tenere conto del fattore di anarmonicità, per un numero di quanti di oscillazione maggiore di 1, perchè tale valore è incognito.

TABELLA 1.

Pirrolo.

$\lambda_{\text{aria}} \text{ \AA}$	$\nu_{\text{vuoto}}^* \text{ cm}^{-1}$	Larghez. cm^{-1}	Intensità I/P·D	S T A T I		$\nu_{\text{calc.}}^* \text{ cm}^{-1}$
				iniziale	finale	
2172.6	46013	116	1	A (649 × 2)	C (0)	46022
† 2141.3	46686	—	1	A (649)	C (0)	46671
2112.6	47320	178	4	A (0)	C (0)	47320
2067.3	48357	94	2	A (0)	C (1037)	48357
2049.0	48789	200	2	A (0)	C (1469)	48789
1992.7	50166	190	1.2	A (0)	C (1469 × 2)	50258

TABELLA 2.

N-Deuteriopirrolo.

$\lambda_{\text{aria}} \text{ \AA}$	$\nu_{\text{vuoto}}^* \text{ cm}^{-1}$	Larghez. cm^{-1}	Intensità I/P·D	S T A T I		$\nu_{\text{calc.}}^* \text{ cm}^{-1}$
				iniziale	finale	
2174.7	45969	85	0.51	A (652 × 2)	C (0)	45973
† 2156.2	46363	—	0.35	A (912)	C (0)	46365
† 2142.0	46671	—	0.35	A (652)	C (0)	46625
2114.5	47277	160	2.0	A (0)	C (0)	47277
2075.9	48156	50	0.51	A (0)	C (869)	48156
2038.4	48331	74	0.51	A (0)	C (1054)	48331
† 2051.7	48724	—	0.51	A (652)	C (1054 × 2)	48733

I due spettri sono schematicamente rappresentati nella figura 2.

⁽¹⁾ G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, « Rend. Accad. Lincei », VI, 25, 494 (1937).

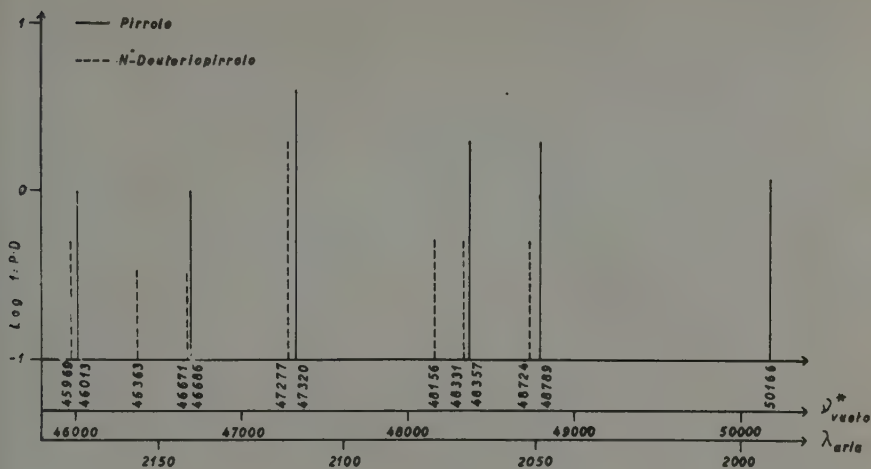


Fig. 2.

INTERPRETAZIONE DEGLI SPETTRI.

Queste due sostanze presentano spettri molto simili sia per l'aspetto delle bande, sia per la loro posizione che per l'andamento della distribuzione delle intensità; mentre l'intensità relativa delle bande del pirrolo è circa doppia di quella delle corrispondenti bande del deuteriopirrolo.

La banda 0.0 è molto probabilmente la 47300 cm^{-1} , praticamente coincidente nei due spettri, la qual cosa è facilmente comprensibile dato che la configurazione elettronica della molecola del pirrolo presumibilmente resta invariata per la sostituzione di un atomo di idrogeno con un atomo di deuterio.

Verso le frequenze minori si notano soltanto le prebande corrispondenti alle oscillazioni allo stato fondamentale 649 cm^{-1} per il pirrolo, e rispettivamente 652 cm^{-1} per il deuteriopirrolo; per quest'ultimo anche la 912 cm^{-1} sebbene dubbia.

A tale riguardo è da notare che la prebanda 1.0 dell'oscillazione 650 cm^{-1} presenta una intensità uguale o addirittura leggermente minore che non la prebanda 2.0 fatto questo apparentemente contraddittorio dato che si ha senza dubbio un maggior numero di molecole al primo quanto di oscillazione del livello elettronico fondamentale, che non al secondo. Infatti, secondo la distribuzione di BOLTZMANN, il rapporto tra il numero di molecole allo stato fondamentale privo di oscillazioni ed il numero di molecole con due quanti è circa 500, molto maggiore del rapporto tra le bande 0.0 e 2.0 che è invece circa 4. Da questa osservazione si ricava

che il salto 2-0 è *relativamente* molto più probabile del salto 0-0. Senza indagare oltre per il momento sulle cause di tale spostamento di probabilità è lecito ammettere in prima approssimazione una probabilità intermedia per il salto 1-0, per cui si calcola che la prebanda corrispondente, tenuto conto delle intensità delle bande 0-0 e 2-0 e dei numeri relativi di molecole presenti nei vari stati debba avere una intensità uguale a 2 per il pirrolo ed una intensità uguale ad 1 per il deuteriopirrolo. Si osservano sperimentalmente invece le intensità 1 e rispettivamente 0,35, cioè lievemente inferiori. Tale disaccordo diventa però facilmente comprensibile qualora si tengano presenti le seguenti tre cause di errore fotometrico concordanti nel far apparire *relativamente* minori le intensità delle bande poste nel campo delle minori lunghezze d'onda rispetto alle intensità delle bande poste invece nel campo delle onde più lunghe:

a) la rapida diminuzione di intensità del fondo continuo di emissione della sorgente luminosa verso le maggiori frequenze;

b) l'aumento dell'assorbimento continuo della sostanza nella stessa direzione;

c) il continuo appiattirsi, sempre nella stessa direzione, della curva di annerimento delle lastre fotografiche, già di per sé non molto ripida, accoppiato alla contemporanea diminuzione della sensibilità dell'emulsione.

Verso le maggiori frequenze si osserva una banda, per ogni sostanza, corrispondente ad una oscillazione al livello elettronico eccitato il cui valore è 1469 cm^{-1} per il pirrolo e 1054 cm^{-1} per il deuteriopirrolo. Il rapporto tra queste due frequenze è 1,40, praticamente uguale al valore teorico 1,37 del rapporto tra le frequenze della oscillazione di valenza N-H ed N-D al livello elettronico fondamentale (1). Ciò porta ad attribuire queste due frequenze all'oscillazione di valenza N-H e N-D allo stato elettronico eccitato, dato che anche in tale stato elettronico la differenza tra le due sostanze deve essere attribuita con ogni probabilità soltanto alla differenza di massa tra l'atomo di idrogeno e quello di deuterio e non ad una differente configurazione elettronica.

Una seconda osservazione conferma tale ordinamento e cioè la forte variazione percentuale dell'energia di oscillazione nel passare dal livello elettronico fondamentale a quello eccitato 56,7 % per il pirrolo e 58,4 %, per il deuteriopirrolo, alla cui origine sta un forte indebolimento della forza di legame dato che le masse oscillanti restano invariate. La conseguenza di un tale indebolimento è una più probabile decomposizione della molecola, quindi un accorciamento della vita media dello stato eccitato con conseguente minore definizione della riga spettrale corrispon-

(1) G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, « Rend. Accad. Lincei », VI, 25, 490 (1937).

dente al relativo salto elettronico. Questa osservazione rende inoltre perfettamente conto della presenza dell'assorbimento continuo sovrapposto alle bande.

Si osserva ancora una banda per ogni sostanza corrispondente ad una oscillazione allo stato elettronico eccitato, che per il pirrolo ha il valore di 1037 cm^{-1} e per il deuteriopirrolo ha il valore di 869 cm^{-1} , con un rapporto tra le due frequenze di 1,19 uguale al rapporto tra le frequenze RAMAN 1204 cm^{-1} del pirrolo (assente nel deuteriopirrolo) e 1012 cm^{-1} del deuteriopirrolo (assente nel pirrolo). È quindi probabile che si tratti della stessa oscillazione per le due sostanze, eccitabile anche nell'ultravioletto, alla quale prende parte sia l'atomo di idrogeno, e rispettivamente di deuterio, legato all'azoto, sia il resto della molecola. Quindi l'influenza della variazione di massa per la sostituzione dell'atomo di idrogeno coll'atomo di deuterio risulta minore che non nel caso precedente e per conseguenza il rapporto tra le due frequenze sarà minore di 1,37. Dato che a questa oscillazione prendono parte anche altri legami, oltre quello N-H e rispettivamente N-D, i quali in conseguenza del salto elettronico hanno subito un indebolimento minore è naturale che la variazione percentuale dell'energia di oscillazione sia anch'essa minore che non nel caso precedente. Essa è infatti circa 14 %.

Lo studio degli spettri di assorbimento di altri pirroli variamente sostituiti permetterà di approfondire l'interpretazione dello spettro ultravioletto di questa classe di corpi.

Le sostanze esaminate mi sono state fornite gentilmente dall'Ecc.za il prof. G. B. BONINO della R. Università di Bologna, che ringrazio ancora vivamente per l'interesse continuo dimostrato al lavoro e per le numerose discussioni avute in merito.

Geologia. — *Osserrazioni nuove sul sedimento delle cosiddette « argille scagliose ».* Nota ⁽¹⁾ di EUGENIA MONTANARO GALLITELLI, presentata da GIUSEPPE CHIECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Mai il BIANCONI avrebbe pensato, quando introdusse « provvisoriamente » nella scienza il nome di « argille scagliose », accompagnandolo con l'analisi di un gesso argilloso di Monte Paderno, con 42 % di CaSO_4 , che questo terminé, rappresentante un tipo strutturale piuttosto che un tipo litologico chimicamente e mineralogicamente definibile, avrebbe attecchito così saldamente e avrebbe dilagato fino a indicare tutta la desolata distesa argillosa della nostra media montagna.

A distanza di più di un secolo il termine « argille scagliose » domina ancora nella letteratura geologica dell'Appennino settentrionale, e, quel che più conta, sembra rappresentare ancora, nelle nostre carte geologiche, un'entità a sé; per quanto già nel 1855 DODERLEIN ⁽²⁾ insinuasse che « questa roccia ha composizione e caratteri diversi a seconda delle singole località e dei piani stratigrafici cui appartiene » e più esplicitamente ancora, nel 1880, il nostro UZIELI spezzasse più di una lancia contro la tendenza ad interpretare le argille scagliose come caratterizzanti un unico periodo geologico.

I dibattiti in tema di argille scagliose, sballottate fra la Creta e l'Eocene, si fecero via via più vivaci, alimentando una ricca letteratura che è fuor di luogo riassumere in questa breve nota. Oggi, le sintesi appenniniche della scuola di Stille interpretano tutte quante le argille scagliose come costituenti le Liguridi di Steinmann, comprendendole cronologicamente fra il Giura e la Creta. La fronte della grande falla, avviluppando in parte e disturbando il terziario cosiddetto postettonico, si avanzerebbe oltre la regione collinosa — interessata da piegamenti per la maggior parte miocenici — fino a raggiungere l'avanfossa recente, sotto la valle padana.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1942-XX.

⁽²⁾ P. DODERLEIN, *Dell'acqua minerale della Salvarola presso Sassuolo*. Dal « Messaggero di Modena », n. 1188-89, pag. 18. Modena, 30 giugno e 2 luglio 1855.

SACCO, per conto suo, persiste invece a sostenere l'età esclusivamente sopracretacea della formazione, sempre globalmente intesa.

Le scarse prove paleontologiche furono fino ad oggi dedotte, come è noto, esclusivamente dai resti fossili contenuti nelle arenarie, nei calcari, nelle radiolariti e nei diaspri che, traslatandosi con disarmonico moto assieme alle argille straordinariamente plastiche, vennero da queste stirate, spezzate, slabbrate e convogliate come blocchi per lo più caoticamente immersi nella massa ⁽¹⁾. Ora, ben giustamente ANELLI osservava molti anni fa: « è mia opinione che durante i movimenti orogenetici le cosiddette argille scagliose abbiano potuto asportare alle svariate formazioni frammenti o magari veri e propri lembi che oggi appaiono in essi inglobati. Cosicchè gli scarsi fossili in essi rinvenuti non possono, a mio parere, esser sempre considerati come documenti sicuri per risolvere il problema della loro posizione cronologica » ⁽²⁾.

D'altra darte, il sedimento argilloso, l'effettivo corpo della formazione, era sempre stato concordemente ritenuto « azoico », sulla falsariga delle vecchie cognizioni: « In questa roccia... mai si incontrano fossili o avanzi organici, sebbene abbondantissimi sieno questi nelle altre rocce contemporanee della formazione » ⁽³⁾. Ne venne che tale azoicità, accettata da allora in poi come articolo di Fede, accrebbe quanto mai le difficoltà per una ristretta disamina stratigrafica, radicando la tendenza a intendere in modo forse troppo comprensivo tutto quanto è argilla scagliosa, e vietando anche la possibilità di vagliare, attraverso l'elemento paleontologico, le condizioni paleogeografiche originarie della formazione.

Un dato nuovo fu portato qualche anno fa dal GREIG ⁽⁴⁾ col rinvenimento di una microfauna oligocenica in una formazione di cosiddette argille scagliose di Vallezza — formazione la cui oligocenicità era già stata sospettata anni prima dall'ANELLI, ma senza l'appoggio di reperti paleontologici. In seguito, altri lembi dell'Oligocene basale (red bed) vennero riconosciuti per l'Appennino emiliano.

Restava tuttavia il sedimento della falda ligurica tipica, dell'argilla scagliosa, cioè, sorreggente le ofioliti e a immediato contatto con queste. Dall'esame del materiale di Vallezza il GREIG dichiara nel suo lavoro di non avere ottenuto alcun pratico risultato; e a tutt'oggi nulla di

⁽¹⁾ Gli stessi frammenti di *Ichthyosaurus campylodon* Cart. e di *Capelliniosuchus mutinensis* Sim. (dinosauro sec. GORTANI e NOFSCA) che ho potuto osservare, portano le cavità obliterate da materiale arenaceo.

⁽²⁾ M. ANELLI, *Tettonica dell'Appennino Parmense e Reggiano*. « Boll. Soc. geol. It. », vol. 42, 1923, pag. 379. Roma, 1924.

⁽³⁾ P. DODERLEIN, op. cit., pag. 19.

⁽⁴⁾ A. GREIG, *Descrizione geologica e cenni sullo sviluppo della miniera di Vallezza*. « Atti R. Acc. Sc. Lett. Arti Modena », ser. II, vol. V, Modena, 1937.

nuovo mi risulta che sia stato pubblicato circa ritrovamenti di microfaine nel sedimento argilloso della formazione ofiolitifera.

Iniziai nel maggio-giugno di quest'anno — incoraggiata dal prof. ANELLI, che desidero per questo ringraziare qui vivamente — il rilevamento, tuttora in corso, della regione collinosa modenese compresa tra il T. Guerro e il T. Tiepido, nell'intento di ricercare, attraverso gli elementi stratigrafico-paleontologici e tettonici, le vicende paleogeografiche che interessarono questa regione appenninica tra il finire del Miocene e la trasgressione piacentiana.

Iniziato lo studio nella valle del Guerro, ebbi occasione di osservare, a contatto col cosiddetto Mio-pliocene, una formazione argillosa — sui caratteri morfologici della quale riferirò in altro luogo — del solito color grigio-verdastro con venature e chiazze rossigne, e indicata sul foglio Modena della Carta geologica d'Italia come « argille scagliose » sopracretacee. L'assenza completa di tracce ofiolitiche e dei caratteristici cospicui blocchi calcarei e arenacci, nonchè altri elementi che credo inopportuno riferire qui, mi indussero a prelevare alcuni campioni del materiale argilloso per un controllo microscopico.

L'esame dello scarso residuo dei lavaggi ⁽¹⁾ mi ha rivelato la presenza di una faunetta a radiolari piuttosto scarsa ma ben identificabile, e di una scarsissima rappresentanza di globigerine.

Non posso per il momento dire nulla dell'esame sistematico della fauna e delle eventuali deduzioni cronologiche che se ne potranno trarre, essendo la ricerca tuttora in corso. Noto qui soltanto che, mentre le scarse globigerine appaiono in stato piuttosto precario di conservazione, rappresentate solo dai testimoni più minuti, i radiolari si presentano in condizioni soddisfacenti (sono per lo più Sphaeroidea), fossilizzati probabilmente in opale, come fa supporre il color bianco-lattiginoso degli individui. Non manca qualche rarissima spicola di spugne, ma null'altro è stato possibile mettere finora in evidenza.

Nel dubbio che i radiolari potessero provenire da vicini diaspri o da radiolariti inglobate nelle argille, esplorai minutamente la zona, ma non ne trovai la benchè minima traccia; d'altronde, a parte il fatto della presenza delle globigerine, credo che ben difficilmente avrebbero potuto liberarsi in modo così perfetto individui completi nei loro contorni da rocce quali il diaspro, nelle quali i fossili fanno un corpo solo con la silice che li cementa.

Altro fatto osservato, e del quale mi sembra convenga tener conto, è che la maggior copia di fossili proviene dal sedimento argilloso rosso.

⁽¹⁾ Sui caratteri di tali residui non porto qui alcun dato, essendone in corso lo studio petrografico nell'Istituto di Mineralogia di Modena.

mentre quello grigio-verdastro ne appare assai povero: non solo, ma i pochi individui separati da quest'ultimo mostravano per lo più, dove rotti, la cavità intracapsulare obliterata da residuo argilloso rosso.

Animata dall'interessante reperto e prima ancora di iniziarne lo studio sistematico, volli tentare la ricerca microscopica sulla tipica formazione con ofioliti, dato che la presenza di queste ultime dovrebbe da sola escludere ogni possibile confusione con altre argille scagliose strutturalmente identiche, ma nulla aventi a che fare con la falda ligure. Come ho detto sopra, nessun esame microscopico ha potuto finora mettere in luce alcuna fauna, e fino ad oggi si esclude unanimemente, date le azioni dinamometamorfiche cui con ogni evidenza queste argille dovettero soggiacere, la possibilità che qualche fauna, se pure si depositò nel sedimento, abbia potuto salvarsi dalla distruzione.

Iniziai così, seguendo un programma ben definito, un prelevamento sistematico che è tuttora in corso, e del quale riferisco intanto i primi risultati.

Madonna di Puianello. — Prelevai il materiale argilloso tra Puianello e Banzuola, presso i cosiddetti « bombi », a pochi passi dall'affioramento di un modesto spuntone calcareo-diabasico. L'argilla scagliosa è qui accompagnata dal classico corteggio arenaceo-calcareo delle Liguridi. Non ho osservato diaspri.

Lo scarso residuo del sedimento argilloso ha rivelato al binoculare a circa 154 ingrandimenti, la presenza di una faunetta variata e ottimamente identificabile a radiolari, soprattutto *Sphaeroidea* e *Cyrthoidea*. Fatto curiosissimo e, per quanto mi consta, mai rilevato finora, è inoltre che tutti questi minutissimi individui, perfettamente conservati in ogni particolare di struttura e di ornamentazione (tolti, s'intende, gli aculei che mancano), sono fossilizzati *in pirite*. Escludo anche in questo caso che provengano da disfacimento di diaspri, sia, come dissi sopra, perchè non vedo come ciò avrebbe potuto permettere una così perfetta eliminazione della ganga (in questo caso assai più tenace dell'incluso), sia, in questo caso particolare, perchè non mi risulta che rocce silicee abbiano mai presentato in sezione sottile radiolari a capsula piritizzata (¹). Tenderei piuttosto ad ammettere che in questi individui, liberi nella massa argillosa impregnata di sali di ferro, si sia verificata la sostituzione della capsula (sostituibile, come è noto, con una certa facilità anche da carbonato di calcio) con solfuro di ferro formatosi in presenza di idrogeno solforato. Non è da dimenticare che siamo in prossimità della salsa, i così-

(¹) L. CAYEUX, *Les roches sédimentaires de France. Roches siliceuses*. Parigi, 1929.

detti « bombi » di Puianello. Scarsissimi i Foraminiferi, ascrivibili quasi esclusivamente a Globigerine.

Montagnana-Montardone. — Argilla scagliosa grigio-verdastra prelevata sul lato sinistro del T. Tiepido, sopra l'indicazione di quota 252 del foglio Modena della Carta geol. d'Italia, ove è indicato un piccolo affioramento ofiolitico. Il residuo presenta in complesso le stesse caratteristiche di quello di Puianello: la fauna è però assai più scarsa, e i radiolari vi sono solo in parte piritizzati.

Varana. — La formazione ofiolitica si insinua qui come un cuneo entro le arenarie di Serramazzone, provocando forti disturbi locali ben visibili nelle vicinanze di Casellanuova, ove appaiono le bancate della ben nota arenaria gialla completamente raddrizzate, con lembi divelti dalla formazione, frantumati, trascinati poscia inglobati dalla massa argilloscistosa. È proprio entro questa sacca che si annida il cospicuo affioramento serpentinoso — uno fra i più notevoli della media montagna modenese — cui il minuscolo paese di Varana deve il suo aspetto particolarmente pittoresco.

Prelevai campioni freschi di argille scagliose rispettivamente rossa ⁽¹⁾ e grigio-verdastra a profondità di circa un metro, a pochi passi dal mulino, posto sulla riva sinistra del T. Fossa; e indicato anche nella tavoletta « Monfestino » dell'I. G. M. presso quota 405.

Il residuo dell'argilla rossa, che, come per gli altri campioni, ho liberato di ogni corpo estraneo prima del lavaggio, ha rivelato la presenza di una notevole fauna a Foraminiferi, in parte assai minuta, in parte addirittura macroscopica, se si consideri che alcuni gusci sorpassano il millimetro di diametro.

La separazione del materiale è tuttora in corso, tanto più che la scarsità del residuo richiede il prelievo di abbondante materiale argilloso; altrettanto dicasi per l'esame sistematico della fauna.

Lo stato dei fossili, abrasì e logorati in superficie, a volte contorti addirittura, accusa la loro costipazione entro l'argilla e la partecipazione alla profonda metamorfosi che la interessò. Mancano completamente i Radiolari, o tutt'al più sono rappresentati da qualche sporadico individuo. Compagno invece, con una certa frequenza, minuscoli denti di squalo e altri dentini, non ancora identificati, a sezione circolare, perfettamente conservati.

Ma non meno interessante è che fino a tutt'oggi non mi è stato invece possibile rintracciare il minimo resto di organismo nel residuo dell'argilla grigio-verdastra raccolta a pochi passi di distanza dalla rossa.

⁽¹⁾ Da una chiazza di color rosso bruno scuro, di poco più di un metro di diametro, passante gradualmente all'argilla grigio-verdastra.

Sarà necessario intensificare le ricerche, poichè non è escluso che tale sterilità possa essere apparente o occasionale. Comunque, questo fatto comincia per me a mettere in dubbio che veramente queste striscie rosse nelle argille scagliose altro non siano che adunamenti diagenetici di sali di ferro. Tantopiù che è sintomatico il fatto che qualcosa di simile, come ho detto sopra, ho notato esaminando comparativamente le argille rosse e quelle grigio-verdastre della valle del Guero.

Emerge dunque dal presente esame iniziale:

1° che l'esame microscopico di sei campioni di « argille scagliose » provenienti da quattro diverse località del basso e medio Appennino modenese ha rivelato per ben cinque di essi la presenza di microfaune ben determinabili;

2° che da luogo a luogo le microfaune hanno tipo di fossilizzazione e *habitus* diversi, accusando età o per lo meno condizioni di facies diverse;

3° che in alcuni tipi di argille scagliose esiste una singolare fauna a radiolari piritizzati;

4° che in due diverse località, aventi facies e presumibilmente età diverse fra loro, si riscontra uniformemente che il sedimento argilloso rosso è fossilifero mentre il corrispondente sedimento grigio è povero di resti o addirittura sterile, fatto che mette in dubbio l'essenza esclusivamente diagenetica delle concentrazioni rossigne nelle argille scagliose.

Fisiologia. — *Di un microfono elettrolitico* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ dell'Accademico SILVESTRO BAGLIONI e di ANGELO MANFREDI.

In una precedente Nota presentata alla R. Accademia d'Italia nella seduta del 16 gennaio 1942-XX ⁽³⁾, uno di noi, partendo dall'ipotesi che l'organo cocleare funziona come un normale microfono, che però presenta caratteri specifici non paragonabili a quelli di alcuno dei microfoni conosciuti ed in uso, si riprometteva di condurre ricerche atte a realizzare un modello fisico di tale particolare tipo di microfono.

Abbiamo perciò condotto negli ultimi mesi numerose ricerche ⁽⁴⁾ in tal senso sulle quali intendiamo qui brevemente riferire, osservando tuttavia fin da ora che il lavoro è appena iniziato e prosegue ulteriormente sviluppandosi.

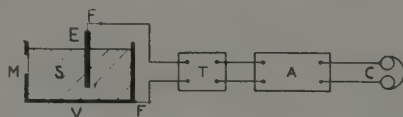


Fig. 1. — Prima disposizione sperimentale. — *V* vaschetta di zinco. — *M* membrana di mica. — *S* soluzione. — *E* elettrodo di rame. — *F* fili conduttori diametro mm. 0,01. — *T* trasformatore adattatore di impedenza. — *A* amplificatore. — *C* cuffia.

Una prima serie di esperienze aventi carattere puramente orientativo è stata condotta con il dispositivo illustrato nella figura 1.

V è una vaschetta di zinco (rappresentata in sezione) delle dimensioni di circa 6. 8. 18 cm³, munita lateralmente di una apertura circolare chiusa da una membrana *M* di mica.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Roma e nell'Istituto Nazionale di Elettroacustica del C. N. R.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 4 luglio 1942-XX.

⁽³⁾ S. BAGLIONI, *Topografia ed eccitabilità degli organi di senso dell'orecchio interno dell'uomo*, «Atti della R. Acc. d'Italia», S. VII, 3, 1942, pagg. 395-409.

⁽⁴⁾ La parte sperimentale è dovuta ad Angelo Manfredi.

La vaschetta contiene una soluzione S di cui appresso diremo, ed in questa è immerso un elettrodo E di rame. Vaschetta ed elettrodo sono collegate per mezzo di un trasformatore adattatore di impedenza T , ad un amplificatore di tensione A alla cui uscita è una cuffia C .

Riempita la vaschetta con una soluzione assai diluita, acida o basica, si può chiaramente sentire all'auricolare C il suono di un diapason in vibrazione il cui stelo sia appoggiato sulla membrana M . Essendo però l'amplificazione necessaria abbastanza elevata (intorno ad $80 \div 90$ dB),

prima e fondamentale cura nell'esecuzione delle esperienze è stata quella di allontanare ogni causa di errore od effetto secondario, dovuto cioè ad altre cause, che accompagnasse l'effetto da studiare.

Per eliminare dannosi effetti di microfonicità abbiamo quindi curata una particolare sospensione elastica delle varie parti mediante sostegni di gomma piuma: la vaschetta fu allontanata dall'amplificatore e disposta su tavolo separato, anch'esso montato su piedi di gomma. I tratti di conduttore F furono realizzati con larghe spirali di rame di mm. 0,01 di diametro per eliminare ogni possibilità di trasmissione meccanica delle vibrazioni.

Si poteva poi supporre che l'elettrodo immerso nel liquido vibrasse e che l'effetto osservato fosse dovuto a variazioni di capacità come in un microfono condensatore: questa ipotesi era peraltro poco plausibile per il fatto che la tensione continua di polarizzazione agli elettrodi sarebbe stata soltanto la debole f. e. m. dell'elemento voltaico formato dalla coppia zinco-rame ($0,6 \div 0,8$ V).

Per eliminare tuttavia ogni possibile dubbio si è costruita una coppia di elettrodi circolari rigidi (vedi fig. 2) del peso di Kg. 1, uno di rame ed uno di zinco uniti fortemente mediante viti passanti attraverso boccole di ebanite. Questa coppia fu immersa nel liquido (contenuto questa volta in vaschetta di vetro) sostenendola mediante sostegni esterni elastici.

Stabilito che l'effetto anche in questa esperienza permaneva immutato e che quindi non vi erano cause di errore, abbiamo studiato in numerose successive esperienze la sua dipendenza dagli elementi geometrici in giuoco.

Si è potuto così stabilire in linea di prima e grossolana approssimazione che l'effetto:



Fig. 2. — Coppia di elettrodi circolari rigidi ($3/4$ g. n.). — A destra viti di bloccaggio isolate con boccole di ebanite. —

In alto viti di contatto.

1° è proporzionale alla superficie degli elettrodi;

2° è inversamente proporzionale allo spessore dello stato di liquido interposto tra la membrana (zona di applicazione della forza vibromotrice) e gli elettrodi;

3° appare indipendente dalla distanza fra gli elettrodi, in specie se questa distanza è piccola in paragone della distanza tra la membrana e gli elettrodi stessi.

Parallelamente a questa serie di esperienze, altre ne venivano condotte per indagare sul comportamento delle differenti soluzioni adoperabili.

Si è potuto stabilire che l'effetto si presenta (più o meno intensamente) in tutte le soluzioni acide, basiche, saline ed in altri liquidi complessi contenenti oltre che elettroliti anche colloidali.

Particolarmente interessante è dal nostro punto di vista quest'ultimo fatto poichè nell'organo cocleare gli organi recettivi sono immersi appunto in una soluzione organica di tipo colloidale.



Fig. 3. — Seconda disposizione sperimentale. — *O* oscillatore a battimenti. — *P* amplificatore di potenza. — *V_E* vibratore elettrodinamico. — *T_R* trasformatore. — *A* amplificatore. — *V_T* voltmetro a tubo elettronico.

Ottimi risultati si sono, per esempio, ottenuti con una soluzione abbastanza concentrata di latte vaccino senza alcuna aggiunta di altre sostanze.

L'intensità dell'effetto dipende, come del resto è facilmente prevedibile, dalla concentrazione della soluzione adoperata.

Allo scopo di determinare tale dipendenza si è modificata la disposizione sperimentale di cui alla figura 1 in modo da poter misurare le tensioni all'uscita dell'amplificatore corrispondenti a varie concentrazioni della soluzione, mantenendo, ben si intende, costante la forza vibromotrice applicata alla membrana.

Il ricevitore auricolare è stato perciò sostituito da un voltmetro elettronico a valvola e il diapason da un apposito vibratore elettrodinamico.

La figura 3 mostra la nuova disposizione sperimentale. *O* è un oscillatore a battimenti ⁽¹⁾ che attraverso l'amplificatore di potenza *P* pilota il vibratore elettrodinamico *V_E*: le rimanenti parti sono rimaste inalte-

⁽¹⁾ A. MANFREDI, *Apparecchiatura automatica per registrazione di curve di livello*. « Alta Frequenza », 10, 43, 1941.

rate, solo che al posto dell'auricolare C troviamo il voltmetro a tubo elettronico V_T .

Anche questa volta si è avuto cura di eliminare ogni eventuale causa di errore, studiando una particolare schermatura elettrica atta ad escludere ogni fenomeno di induzione.

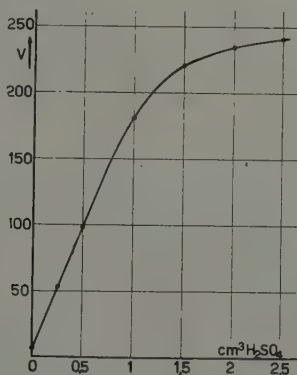


Fig. 4. — Acidificazione di cm³. 30 di acqua mediante aggiunta di H₂SO₄ puro concentrato al 96 % nella quantità indicata in ascisse.

L'oscillatore a battimenti e l'amplificatore sono stati inoltre disposti a parecchi metri di distanza dalle altre parti del complesso; il vibratore, anch'esso lontano dalla vaschetta, comunica con la membrana per mezzo di un'asta di legno A di cm. 50 di lunghezza.

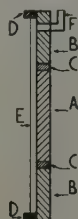


Fig. 5. — Sezione di microfono elettrolitico a strato liquido con grande superficie. — A elettrodo circolare in rame. — B anello concentrico in zinco. — C anello isolante in ebanite. — D anelli in ebanite di sostegno della membrana. — E membrana. — F tubo di riempimento.

In queste prime esperienze la frequenza dell'oscillatore a battimenti è stata mantenuta costante (300 Hz); così pure l'ampiezza di vibrazione del vibratore. La concentrazione della soluzione veniva variata aggiungendo a poco a poco il soluto all'acqua distillata contenuta nella vaschetta. La figura 4 mostra uno dei grafici ottenuti.

Presentiamo, per concludere, in figura 5, in sezione, e in figura 6 in fotografia, assieme al vibratore elettrodinamico, un tipo di microfono elettrochimico di maggiore sensibilità. L'elettrodo di rame *A* è un disco centrale mentre quello di zinco *B* è una corona circolare concentrica isolata dal primo elettrodo da un anello di ebanite *C*. Il liquido si riduce ad uno strato sottile (circa mm. 1) tra la membrana *E* (di mica o di celluloido) e gli elettrodi. Il tubo *F* serve per il riempimento. La maggiore sensibilità è determinata dalla grande superficie degli elettrodi e dal piccolo spessore dello strato del liquido.

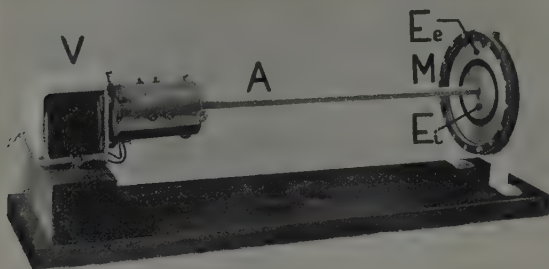


Fig. 6. — Fotografia del microfono elettrolitico e del vibratore elettrodinamico ad esso applicato (1/8 g. n.). — *M* microfono. — *V* vibratore. — *A* asta di collegamento in legno. — *Ei* elettrodo interno in rame. — *Ee* elettrodo esterno in zinco.

È opportuno notare che con gli elettrodi rigidi adiacenti concentricamente, si esclude in modo assoluto il funzionamento per capacità. Con questo tipo di microfono si è potuta riprodurre agevolmente la normale voce parlata.

A questa prima Nota seguirà un'altra più completa nella quale si descriveranno molte altre esperienze già fatte ed in corso, intese sia a determinare il comportamento delle soluzioni colloidali sia a stabilire se l'effetto in questione è determinato da variazioni di conducibilità elettrica dell'elettrolita o da variazioni della forza elettromotrice dell'elemento voltaico costituente la cellula. Possiamo comunque dire fin da ora che l'effetto rilevato appare assai più cospicuo di quel che farebbe prevedere la teoria e l'esperienza circa le variazioni di f. e. m. di una pila soggetta a pressioni continue; precisamente circa 50-100 volte più intenso.

Biologia. — *Sulla spiralizzazione dei cromosomi durante la meiosi maschile di « Gryllotalpa gryllotalpa L. »* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di ARMIDA MARIANI, presentata da UMBERTO PIERANTONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La spiralizzazione dei cromosomi durante la meiosi è oggetto di controversia, e posso indicare come probabili le seguenti due modalità. O esiste una spirale composta, cioè una spirale a giri piccoli, avvolta in una spirale a giri grandi, (NEBEL e RUTTLE, 1936 ⁽³⁾; DARLINGTON, 1937 ⁽⁴⁾; DARLINGTON e UPCOTT, 1939 ⁽⁵⁾); oppure esiste una spirale sola, a giri molto grandi, più ampia di quella che ha luogo nelle mitosi comuni (HUSKINS e SMITH, 1935 ⁽⁶⁾). L'una e l'altra di queste teorie cercano di dare ragione del maggior accorciamento dei cromosomi meiotici in confronto di quelli mitotici, fatto che si osserva nel materiale più diverso. Siccome le spirali piccole sono al limite della visibilità, STRAUB (1939) ⁽⁷⁾ ritiene che la loro esistenza non sia sempre dimostrata.

Essendo la conoscenza della spiralizzazione assai scarsa negli animali, ho intrapreso una ricerca sui fenomeni presentati da *Gryllotalpa gryllotalpa* L., che non era ancora stato studiato a questo proposito; nel più recente lavoro sulla spermatogenesi di questa specie (WINIWARTER, 1927 ⁽⁸⁾), non sono infatti abordati problemi strutturali. Questi sono invece stati presi in considerazione da BARIGOZZI (in corso di stampa), che si è occupato però della spiralizzazione dei cromosomi di cellule

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Milano, diretto dal prof. S. Ranzi. Le ricerche sono state condotte per consiglio e guida del prof. C. Barigozzi.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 31 agosto 1942-XX.

⁽³⁾ NEBEL B. R. e RUTTLE M. L., 1936, « Z. f. Zellf. mikr. Anat. », 26, 281.

⁽⁴⁾ DARLINGTON C. D., 1937, *Recent advances in Cytology*, Churchill, London.

⁽⁵⁾ DARLINGTON C. D. e UPCOTT M. B., 1939, « Chromosoma », 1, 23.

⁽⁶⁾ HUSKINS C. L. e SMITH S. G., 1935, « Ann. Bot. », 49, 119. (citato da Straub, 1939).

⁽⁷⁾ STRAUB J., 1939, « Z. f. Bot. », 33, 65.

⁽⁸⁾ WINIWARTER H., 1927, « Arch. de Biologie », 37, 515.

somatiche del grillotalpa (cellule di rivestimento del testicolo), servendosi solo come raffronto delle varie fasi spiralizzate e despiralizzate della meiosi.

Del resto ho trovato che le notizie sulla fine struttura dei cromosomi meiotici sono assai limitate anche nelle altre specie di Ortotteri, perchè ho rintracciato solo le ricerche seguenti: una di LUCAS e STARK (1931) ⁽¹⁾ su *Melanoplus femur-rubrum*, una di MAKINO (1936) ⁽²⁾ su *Podisma*, e, infine, quella di NEBEL e RUTTLE (1937) ⁽³⁾ su *Dissosteira carolina*. In quest'ultimo lavoro non si legge chiaramente che le spirali, durante la meiosi, siano due, sebbene STRAUB, citandolo, gli attribuisca di asserire l'esistenza di una spirale composta. MAKINO affermerebbe pure l'esistenza di due spirali.

Materiale e metodo. — Il materiale fu raccolto da me nell'estate dell'anno 1941, nei dintorni di Milano, e precisamente a Rozzano, sulla



Fig. 1. — Stadio pachitene non spiralizzato: sono indicati solo tre cromosomi appaiati. Ingr. circa 1750 volte. Colorazione col carminio acetico.

provinciale Milano-Binasco-Pavia. Le gonadi delle larve e delle ninfe furono preparate con carminio acetico, e montate in euparal. In parte vennero fissate in Zenker formolico e colorate col metodo di FEULGEN (idrolisi 15'). L'osservazione fu eseguita con luce monocromatica verde. Le misurazioni dei cromosomi furono ottenute misurando con un curvimetro i disegni ricavati con la camera lucida di ABBE.

Osservazioni. — Lo stadio pachitene è quello dal quale sono partita. Esso si presenta dapprima completamente despiralizzato, come risulta dalla figura 1. Ho voluto misurare la lunghezza dei filamenti, e siccome

⁽¹⁾ LUCAS F. F. e STARK M. B., 1931, « J. Morph. », 52, 91.

⁽²⁾ MAKINO S., 1936, « J. Fac. Sci. Hokkaido », VI, 5, 29, (citato da Straub, 1939).

⁽³⁾ Op. cit.

ve ne sono di più o di meno lunghi, ho preso in considerazione solo quelli di massima dimensione, per non correre il rischio di comparare tra loro elementi diversi. La lunghezza media trovata fu di circa 30 μ . Questo



Fig. 2. - Stadio pachitene spiralizzato: prima spiralizzazione. Ingr. circa 1750 volte. Colorazione Feulgen.



Fig. 3. - Stadio diplotene iniziale: a destra vi è una tetrade con chiasmi terminalizzati. Ingr. circa 1750 volte. Colorazione Feulgen.

tipico pachitene si evolve in uno stadio più corto e spesso, nel quale si intravedono delle spire piccole, numerose e irregolari. Questa fase non mostra alcuna spaccatura longitudinale (non è dunque ancora diplotene), e ha dei contorni indecisi. La lunghezza dei cromosomi in questo stadio (fig. 2) è in media di μ 9,4, con uno spessore di μ 0,5. Questo pachitene tardivo è dunque accorciato con un coefficiente di circa 3,2 rispetto alla fase precoce (¹). Sempre mantenendo le stesse dimensioni, i coniuganti si staccano poi rapidamente per restare uniti mediante i soli chiasmi,

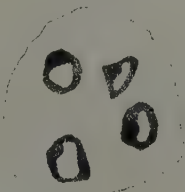


Fig. 4. - Stadio di diacinesi con chiasmi terminalizzati. Ingr. circa 1750 volte. Colorazione Feulgen.

che sono pochi e malamente visibili. Essi si terminalizzano, e nella figura 3 si vede già un anello, che risulta dalla terminalizzazione di due chiasmi. Il fenomeno è più progredito nella figura 4, dove si nota un impicciolimento armonico di tutto l'anello. In questo stadio frequente di diacinesi, la lunghezza di ogni coppia di cromatidi è di circa μ 6,8, e

(¹) $3,2 = \frac{\text{lunghezza pachitene precoce}}{\text{lunghezza pachitene tardivo}}$, e corrisponde al coefficiente di spiralizzazione secondo DARLINGTON e UPCOTT (1939).

indica dunque un ulteriore accorciamento rispetto al pachitene tardivo e spiralizzato. Fino a questo punto non si può parlare di spiralizzazione composta. Però da questo momento si manifesta una serie di grandi spire (3-4), come appare dalla figura 5, che rappresenta un aspetto assai tipico. Spesso questo stadio si presenta in modo un pò irregolare, e le spirali piccole si intravedono soltanto. La lunghezza del filamento, immaginando distese le spirali maggiori, sembra mantenere la stessa lunghezza dello stadio precedente, ma le misurazioni sono difficilissime. A questo punto comincia la deposizione di matrice, e si arriva infine alla tetrade globosa e compatta rappresentata nella figura 6, lunga circa $5\ \mu$, cioè $1/6$ del filamento



Fig. 5. - Seconda spiralizzazione.
Ingr. circa 1750 volte. Colorazione Feulgen.



Fig. 6. - Metafase di I divisione di maturazione; assetto cromosomico completo. Ingr. circa 1750 volte. Colorazione Feulgen.

pachitene. Con ciò siamo ormai alla metafase I. La seconda mitosi maturativa presenta cromosomi troppo piccoli per poter compirvi osservazioni strutturali.

In nessun punto della meiosi si possono contare i cromatidi, e tanto meno i mezzi cromatidi, la cui presenza, in questa specie, non è in alcun modo provata. Il conteggio dei cromosomi metafasici dà costantemente 9, che corrisponde al numero 18 riscontrato nelle spermatogonie. Posso così notare che il materiale da me studiato possiede un assetto diploide finora non riscontrato in Italia settentrionale, dove, anche in località vicine a quella da me studiata, si incontrano solo grillitalpa con 12 cromosomi.

Concludendo, durante gli stadi che vanno dal pachitene alla metafase della I divisione, si incontra prima una spiralizzazione pachitenica, poi un diplotene con terminalizzazione di chiasmi e forme anulari, a cui segue un impieciolimento generale; infine una spiralizzazione a giri grandi e non regolari. Non esiste uno stadio diffuso, come si osserva in molti altri casi.

* * *

La meiosi maschile del grillotalpa – come il migliore materiale botanico (*Tradescantia*, *Rhoco*, *Gasteria* ecc.) – presenta il vantaggio di avere due spiralizzazioni distinte, separate da una fase intermedia che corrisponde al diplotene. È quindi possibile prospettare l'esistenza di una spirale composta nei cromosomi dalla prometafase in poi; per affermare questo però in forma definitiva bisognerebbe poter vedere contemporaneamente le due spirali, come risulta dalle figure di Ôura (1936) ⁽¹⁾ per la metafase I di *Tradescantia reflexa*. Nel mio caso, questa osservazione non è possibile date le esigue dimensioni dei cromosomi, e perciò credo che sarebbe anche lecito pensare che le piccole spirali del pachitene tardivo si svolgano per formare le grandi spirali nella diacinesi tardiva. Contro questa ipotesi, però, stanno i due fatti seguenti: 1° la brevità dei cromosomi metafasici; 2° il fatto che – nel passaggio tra il diplotene e la diacinesi – i filamenti nè si allungano nè si assottigliano.

In conclusione io tenderei ad ammettere, come più verisimile, l'esistenza, già nella prometafase I, di una spirale composta, derivante da due spiralizzazioni distinte.

Questa tesi corrisponde a quella espressa da DARLINGTON (1937) ⁽²⁾ da NEBEL e RUTTLE (1937) ⁽²⁾ e da DARLINGTON e UPCOTT (1939) ⁽²⁾; contrasterebbe invece con quella di HUSKIN e SMITH (1935) ⁽²⁾. La formazione delle spirali piccole durante un momento molto precoce corrisponde alla teoria generale della spiralizzazione composta.

L'impicciolimento che si osserva al principio della diacinesi non sembra riferibile a fenomeni di spiralizzazione.

Riassumendo: in *Gryllotalpa gryllotalpa* L. con 18 cromosomi (forma finora non conosciuta) gli stadi della meiosi dal pachitene alla metafase della I divisione di maturazione mostrano due successive spiralizzazioni, di aspetto tale da rendere verisimile l'esistenza di una spirale composta allo stadio di prometafase I.

⁽¹⁾ ÔURA G., 1936, « Z. f. Mikrosk. », 53.

⁽²⁾ Op. cit.

Indirizzo morfologico, indirizzo biochimico e problemi biologici.

Relazione ⁽¹⁾ dell'Accademico ACHILLE RUSSO

Nella trattazione di alcuni problemi, che possono sorgere durante gli studi, nel campo delle scienze biologiche, fu seguito l'indirizzo morfologico o quello chimico, ritenendosi ora l'uno ora l'altro possa fornire utili risultati. Ma, poichè uno di essi, il morfologico, nel momento attuale, si direbbe quasi essere stato sopraffatto da quello chimico, non ostante nella seconda metà dell'Ottocento e nei primi anni di questo secolo, esso abbia avuto non pochi cultori e sia stato tenuto in grande onore per i risultati conseguiti, specie nel campo della *Citologia*, ho creduto trattare tale tema dal punto di vista metodologico, scegliendo alcuni problemi fra i molti, che potrebbero corroborare questa breve Relazione.

Sebbene oggi sia opinione diffusa, in Biologia, un notevole progresso possa soltanto raggiungersi con l'analisi chimica o chimico-fisica della sostanza vivente, a me, innanzi tutto, pare opportuno rilevare che, se in tale opinione è un programma di alto valore scientifico, già collaudato da conquiste di verità, che, con altri indirizzi, non si potevano conseguire, non è affatto utile al progresso della Biologia, l'aver trascurato o addirittura messo da parte l'indirizzo morfologico, soprattutto quello citologico, necessario strumento di ricerca nelle discipline naturalistiche, che hanno per base la conoscenza delle strutture più sottili degli organismi viventi.

È da osservare, al riguardo, che la sovrapposizione dei chimici su i morfologi non derivi da antagonismo, ma da cause diverse, soprattutto, secondo il mio parere, dal fatto che, specialmente la *Biochimica*, si è messa da qualche tempo su di una strada di progresso singolare, dovuto allo sviluppo della tecnica, che ha avuto la possibilità di basarsi su teorie generali molto geniali, mentre alcune discipline morfologiche, come la *citologia* e la *microchimica*, non ostante recenti applicazioni della Fisica.

⁽¹⁾ Letta nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

non si son potute avvantaggiare di quei progressi tecnici, che indirizzano i ricercatori verso nuove conquiste.

Dal diverso sviluppo della tecnica, dalla diversa valutazione dei due indirizzi e dalla diversa forma mentale, costituitasi nei cultori della chimica e della morfologia, ne è derivato che, invece di un'intesa, per una migliore soluzione di determinati problemi biologici, ciascun gruppo ha preferito lavorare su linee parallele; per cui la mancata collaborazione ha avuto per effetto una dispersione di energie, essendo avvenuto, tra l'altro, che, a notevole distanza di tempo, con indirizzo chimico, fu trattato lo stesso problema già trattato dai morfologi, senza che i cultori di chimica mostrassero di essere a conoscenza del lavoro, che quelli avevano compiuto.

Difatti, alcuni problemi, relativi ai fenomeni iniziali dello sviluppo, specialmente per quanto riguarda l'attrazione delle due cellule sessuali, dopo varie ricerche contrastanti fra loro, furono trattati dai chimici, come KÜHN e MOEVUS, i quali, tra il 1937 ed il 1940, isolarono da un'alga cloroficea del genere *Clamydomonas* e da un echinoide, l'*Arbacia pustulosa*, un ormone, che ha relazione con un particolare pigmento carotenoidale nell'alga, con un *echinocroma* nell'echino, cui dettero il nome di *gamone*, il quale, all'esperimento, risultò essere l'agente di attrazione degli spermatozoi e della loro agglutinazione con l'elemento sessuale femminile. Tale ormone si diffondeva nel liquido ambiente a notevole distanza, bastando un milligrammo per sensibilizzare 10 ettolitri di acqua.

Ma, analoga ricerca era stata fatta, circa 25 anni prima (1914), da alcuni morfologi, fra i quali LILLIE, individuando, specialmente nelle ova della stessa *Arbacia*, una sostanza colloidale, diffusibile all'esterno, che aveva lo stesso potere di attrazione, e che fu detta *fertilizina*. Le ricerche micrografiche hanno dimostrato tale sostanza risieda nel nucleo ovulare, dal quale, per la rottura della membrana, durante il periodo maturativo, passa nel protoplasma, dove si localizza nella *zona corticale* per diffondersi successivamente nell'ambiente esterno. I risultati di pura morfologia furono integrati con adatti esperimenti, sia perchè gocce di acqua, nella quale avevano soggiornato per qualche tempo le ova mature, erano capaci di attrarre anche gli spermatozoi, sia perchè, producendo degli *extraovati*, con la puntura delle ova, come fece CHAMBERS, essi, provenendo dalla zona centrale dell'ovoplasma, non avevano potere di attrazione, mentre la zona corticale, rimasta in sito, lo possedeva spiccatissimo.

Ricerche zoologiche, con indirizzo citologico, hanno fornito una conferma ai risultati morfologici sopra cennati, in quanto in un unicellulare, *Cryptochilum echini*, fu da me osservata l'emissione dalla periferia del nucleo sessuale, il *miconucleo*, di una *sostanza siderofila*, che si localizza nel punto del protoplasma dove i due gameti debbono congiungersi.

Se i reperti di pura morfologia furono variamente confermati, per ciò che riguarda i rapporti tra la maturazione delle cellule sessuali e la fuoriuscita dal nucleo di una sostanza chemiotropicamente positiva, non è mancata qualche eccezione, che ne ha menomato il carattere di generalità, come fu osservato in alcuni Anellidi del genere *Nereis*, nei quali anche le ova immature possono attrarre gli spermatozoi.

Il LILLIE, che portò il massimo contributo di ricerche ai fatti sopra cennati, deviando dal campo della pura osservazione della forma, che è di competenza dei morfologi, fu indotto a formulare delle ipotesi che, per quanto programmatiche, sono un segno dell'esaurimento della ricerca positiva.

A tale riguardo è opportuno rilevare che il LILLIE stesso, senza alcuna collaborazione dei chimici, i quali avrebbero trovato nei dati positivi, già acquisiti, di pura morfologia, l'adattamento per analisi più precise e risolutive, in mancanza di una intesa, ha ipoteticamente soltanto potuto supporre che l'emissione di sostanza nucleare avvenga in qualunque periodo dello sviluppo, e che essa abbia, in qualunque tempo, il potere di attivare la *fertilizzina*, già presente nell'ovoplasma, la quale, funzionando da *zimogene*, si trasformerebbe nella forma attiva, come nei comuni fermenti.

* * *

Diversamente di quanto sopra fu esposto, in questi ultimi anni, si è avuta una maggiore collaborazione, quasi sincrona, tra chimici e morfologi, nella trattazione di altri problemi su i fenomeni iniziali dello sviluppo, ottenendosi risultati più omogenei e di più alto valore scientifico.

Lo studio dei fenomeni d'*induzione* e di *determinazione* di alcune strutture embrionali, fu iniziato, con metodo morfologico-sperimentale, da SPEMANN, MANGOLD ed altri nel 1932-39 e, nello stesso periodo, dai chimici, tra i quali NEEDHAM e suoi allievi. Com'è noto, un lembo ectodermico del labbro superiore della gastrula di Rana, trapiantato in altro embrione di Rana, nel punto d'impianto si sviluppa un secondo embrione con il tubo neurale, con la corda dorsale e con i segmenti primordiali o somiti.

Si è detto che il lembo innestato abbia capacità organizzativa e che l'*innesto* o induttore ed il *portainnesto* o recettore sia necessario collaborino tra loro perchè si produca il nuovo individuo, come pure si è parlato di un *evocatore* di potenze ereditarie latenti. Nel momento però, in cui la ricerca sperimentale e morfologica era per esaurirsi in alcune ipotesi, le ricerche biochimiche, in seguito alle prime esperienze di BAUTZMANN (1932), hanno dimostrato che poltiglie del labbro superiore della gastrula, anche dopo essere state bollite, conservavano il potere induttivo, per cui la

formazione di un nuovo essere non era da attribuirsi ad una specifica attività cellulare, ma ad un fattore di natura chimica. Si concludeva, pertanto, che lo stimolo iniziale, per il prodursi di un secondo embrione, fosse da attribuire ad ormoni specifici, i quali agirebbero allo stesso modo del prodotto delle ghiandole a secrezione interna, il quale esercita la sua azione al di fuori ed indipendentemente dalle cellule endocrine, che lo hanno elaborato.

Nuovi risultati, relativi al fenomeno induttivo ed evocatorio, in questi ultimi anni, furono ottenuti con indirizzo prevalentemente chimico; uno dei quali, fra i più significativi per la possibile estensione a campi diversi della Biologia e della Patologia, si è che determinati composti, come *lipidi* del gruppo degli *steroli*, o derivati dagli *idrocarburi* od altri, come l'*acido oleico* e *linoleico*, sperimentati da FISCHER e da altri, hanno funzione ormonica ed induttiva. A ciò si aggiunga che l'induzione può anche essere esercitata da sostanze diverse, prelevate da organi animali, specie dal fegato dei mammiferi, finanche da un Celenterato idroide, l'*Idra verde*, i cui pezzi, innestati in un embrione di Rana, inducono la formazione di altro embrione con tubo neurale, corda dorsale e somiti (WADDINGTON e WOLSKY).

Risultati così singolari fanno ritenere che, per una maggiore chiarificazione dei problemi sopra cennati, che sono connessi alle sostanze induttive, messe in evidenza con i metodi, di cui dispone la chimica, come anche di quelli su le *auxine*, ritenute necessarie all'accrescimento e per alcuni tropismi dei vegetali, o di quelli su gli *ormoni metamorfici* degli insetti, la collaborazione dei citologi, finora non richiesta dai chimici, potrebbe dare un valido apporto, specialmente per la localizzazione di tali sostanze nel complesso cellulare e sui fenomeni conseguenti.

* * *

Frattanto, se si dà uno sguardo alle ricerche, fatte molti anni or sono dai citologi, si rileva che le indagini su le manifestazioni formali della cellula, avevano tracciato la via, seguita con tanto successo dai chimici, indagini che oggi sembrano tanto lontane dalle moderne conquiste della biochimica.

ANGELO RUFFINI, difatti, ha avvalorato l'importanza degli *ormoni*, quali attivatori ed iniziatori dello sviluppo, fondandosi su le secrezioni interne, da lui rilevate nel 1916 e da una sua allieva, la MARCHETTI, nel 1917, nei blastomeri, formati dall'ovo degli Anfibi, e nelle cellule delle zone organoformative, che iniziano la formazione dei tessuti e degli organi. Secondo RUFFINI, come, durante lo sviluppo, si ha la produzione di un secreto, che, con le sue sostanze osmoticamente attive, eccita le cellule delle zone organoformative, così nell'ovo sarebbero dei *precormoni*,

che, secondo un'ipotesi, formulata nel 1914 da GLEY e PACCHIONI, lo predisporrebbero a compire la sua funzione specifica.

Alcune mie ricerche confermarono la concezione del RUFFINI, per cui esse, a più ragione, possono far ritenere che un ormone, prodotto di secrezione interna, esista anche nell'ovo. Fin dal 1907 (Atti R. Accademia Nazionale Lincei), difatti, avevo osservato che nelle Coniglie, trattate con *lecitina*, le cellule del follicolo ovarico, per i caratteri morfologici, presentavano accresciuta e quindi più evidente di quel che non era stato possibile rilevare da precedenti osservatori, la funzione di secrezione interna e che il secreto, oltre a penetrare nell'ovo, attraverso la *zona pellucida*, contribuiva alla formazione del liquido follicolare, come meglio ho dimostrato in una Memoria pubblicata nel 1918 (Atti Accademia Gioenia). Tenendo presente tali dati micrografici di pura citologia, si può oggi dire che successivi ricercatori, senza ricordare le originarie premesse morfologiche, con altri metodi e con indirizzo pratico, constatarono che un *ormone sessuale*, che chiamarono *follicolina* o *estrina*, causa dell'*estro*, è presente nel *liquor folliculi*, adoperato oggi a scopo curativo e profilattico, e che un ormone, simile a quello che mette in *calore*, per la stessa sua origine, poteva essere presente anche nell'ovoplasma.

RUFFINI, spirito eminentemente speculativo e sostenitore di un *neovitalismo*, fondato su le secrezioni interne, ritenne esse siano la causa del primo impulso riproduttivo, per cui, affermando tale necessità essere stata intravista finanche dagli antichi filosofi e naturalisti ed espressa col nome di *entelechia* o *forza finalistica* da ARISTOTELE e da altri, venuti dopo, come *sforzo formativo*, *nisus formativus*, additava una nuova via ai morfologi sperimentatori ed ai biochimici, che affrontarono il gran problema negli anni successivi.

* * *

Ma, nello studio dei fenomeni iniziali dello sviluppo, indipendentemente dall'azione che esercita lo spermio penetrato nell'ovo o da quella che potrebbe essere esercitata da fattori esterni fisici e chimici o da fattori interni minerali ed enzimatici, che funzionerebbero da catalizzatori biologici, oggi, date le nuove conoscenze, possiamo mettere in linea un reperto micrografico di CAMILLO GOLGI, da lui posto in evidenza nel 1898 con un particolare metodo microtecnico, al quale reperto, per la sua struttura, dette il nome di *apparato reticolare*.

Dall'anno in cui fu reso noto fino ad oggi, tale apparato, addossato al nucleo cellulare, ha subito non poche chiarificazioni su la sua struttura, su la sua natura chimica e sul suo valore funzionale, per cui grande è il merito del GOLGI di averlo svelato, anche se oggi la forma di reticolo sia ritenuta un artefatto dipendente dalla tecnica adoperata.

È opportuno soffermarsi, per quanto sommariamente, sul reperto di GOLGI, non solo per onorare la memoria di uno dei più grandi biologi italiani contemporanei, ma anche perchè esso ci offre un esempio tipico di quanto possa valere l'indirizzo morfologico come substrato di nuove acquisizioni.

Dopo alcuni anni d'incertezza e di scetticismo su la reale esistenza dell'apparato reticolare (1), quale nuovo organo cellulare, non ostante allievi del GOLGI, come PENSA, MARCORA, VERATTI, PERRONCITO, lo avessero osservato in cellule di tessuti diversi, al Convegno dell'*Unione Zoologica italiana*, tenuto a Bormio nel 1908, il GOLGI stesso, con l'ostensione di molti preparati microscopici, annunciava tale apparato potesse spostarsi rispetto al nucleo nelle cellule gastriche durante l'atto secretorio (2), e due anni dopo, nel 1910, A. PERRONCITO metteva nella miglior luce che esso era indipendente dal *condrioma* e che rappresentava un organo particolare della cellula, in quanto si riproduceva, dividendosi prima della divisione nucleare; mentre, nel 1924, A. CORTI lo metteva in rapporto con la formazione di vacuoli, che costituivano il *lacunoma*.

Nel 1928 furono pubblicati i primi risultati delle ricerche di CARMELO CIACCIO, il quale, con sottile analisi microchimica, dimostrò che l'apparato di GOLGI, pure essendo un organite cellulare, muta di forma e di struttura secondo i metodi tecnici di preparazione, che, nella sua costituzione chimica, entra un complesso di sostanze *lipoproteiche* e che esso esercita la sua azione sul metabolismo, specialmente su la produzione del secreto nelle cellule glandulari. Il CIACCIO a tale sistema dette il nome di *ergoplasto*, che limitò in una zona di protoplasma iustanucleare, che chiamò *zona X*.

A distanza di 10 anni, nel 1937, nell'Istituto d'*Istologia sperimentale* dell'Università di Utrecht, HIRSCH ed allievi si dedicarono allo studio dell'apparato di GOLGI, identificando la stessa zona di protoplasma, segnalata da CIACCIO, che denominarono *campo di GOLGI*, con funzione prevalentemente secretoria. Tali autori studiarono il processo di formazione dei vacuoli, che si formerebbero nei fili dell'apparato golgiano, che chiamarono *presostanza del reticolo*, la quale riprenderebbe ritmicamente la sua attività, perchè, dopo essersi svuotata dal suo contenuto,

(1) Nel febbraio 1901, quando si discuteva su l'esistenza di un *apparato reticolare*, GOLGI, trovandosi a Roma, fu invitato da B. GRASSI a preparare alcune cellule nell'Istituto di Anatomia comparata ed, a tale scopo, furono fatti spedire dalla Stazione Zoologica di Napoli due esemplari viventi di *Torpedo marmorata*. GOLGI preparò con il suo metodo, le cellule nervose dei gangli spinali, senza che alcuno dei presenti potesse dare un significato all'*apparato reticolare*.

(2) In tale riunione il GOLGI, interrogato, niente seppe o volle dire sulla funzione dell'*apparato reticolare*.

formerebbe nuovi vacuoli, in rapporto ai processi metabolici, che si svolgono nella cellula.

Secondo HIRSCH e YÄRVI (1937-1940), ai quali si debbono nuovi studi su l'apparato reticolare, esso avrebbe anche la funzione di presiedere alla fissazione della *Vitamina C*, antiscorbutica, in quanto l'*acido ascorbico*, riconoscibile nei preparati microscopici con il metodo GIROUD-LEBLOND, introdotto negli animali da esperimento, il gatto, si presenta nella *presostanza* e successivamente nei prodotti della secrezione delle cellule pancreatiche e salivari, prese in esame.

Non tutti però ammettono la *Vitamina C* sia elaborata dal sistema di GOLGI, ritenendola piuttosto un prodotto di adsorbimento, localizzato nei fili del reticolo, come alcuni metalli, che sarebbero anche adsorbiti dallo stesso sistema. Secondo HIRSCH, sarebbe dimostrato però che la *presostanza* del sistema golgiano, se non ha alcuna azione costruttiva per gli idrati di carbonio, può elaborare diverse *proteine*, i *grassi neutri* ed i *lipidi*; il che modificherebbe la teoria di ALTMANN e KREHL su l'origine delle goccioline di grasso, dentro le cellule, dai granuli mitocondriali, teoria, che, in questi ultimi anni, ha avuto la maggiore fortuna.

Ma, recentemente, l'apparato reticolare fu messo anche in relazione con l'origine del *deutolecite*, considerando le ova partecipi della natura glandolare. Secondo SLUITER (1940), allievo di HIRSCH, nel Pollo, mentre negli ovociti di 1° ordine l'apparato ha la forma tipica ed è a lato della vescicola germinativa, negli stadi successivi, dentro la *presostanza* si formerebbero dei granuli, che darebbero origine ad un prodotto lipoideo di forma globulare, che si spargerebbe nel restante protoplasma. I resti del reticolo o della formazione massiva, che spesso lo rappresenta, ridotti in frammenti, occuperebbero, insieme a granuli mitocondriali, una zona a lato della vescicola germinativa, che fu detta anche *campo di Golgi*.

H. VAN DEL BROEK, altro allievo di HIRSCH, studiando la funzione dell'apparato di GOLGI nei più giovani stadi dell'ovogenesi di *Ascaris lumbricoides*, mette in relazione i prodotti metabolici, che vi si formano, con tre distinte fasi, percorse da tale apparato, in quanto nella 1ª e nella 3ª fase si formerebbero, in relazione alla *presostanza*, condizionatamente, delle *proteine*, nella 2ª dei *lipidi*.

I mutamenti del reticolo golgiano, nelle fasi che esso percorre, potrebbero far ritenere che altre formazioni citoplasmatiche, note con diversi nomi, come il *Nebenkern* di BÜTSCHLI, l'*idiazoma* di MEVES, le *couche vitellogène* di O. VAN DER STRICHT, l'*oosoma* di SILVESTRI (1914), descritte durante lo sviluppo di varie cellule sessuali maschili e femminili, o i *fili ergastoplasmici* del PRENANT, descritti nelle cellule ghiandolari, specialmente durante la secrezione latte, potrebbero avere lo stesso significato biologico e far pensare che il loro diverso aspetto derivi dal momento funzionale o dalle fasi che esso percorre o dai diversi metodi di fissazione.

Per tanto, si può dire che, nel complesso fenomeno della secrezione, considerato quale proprietà essenziale delle cellule, non sempre dimostrabile con i mezzi di cui oggi dispone la tecnica microscopica (PRENANT, RUFFINI), il reperto di GOLGI ha condotto a notevoli chiarificazioni sui problemi, relativi alla produzione del secreto, e che esso è stato il punto di partenza e di avviamento per nuovi studi. La ricca letteratura, che si è accumulata negli ultimi quarant'anni intorno al reperto micrografico di GOLGI, attesta, in ogni caso, quali sviluppi insospettati possano promuovere i dati morfologici, integrati da scienze collaterali.

* * *

Ma, le attuali conoscenze su l'apparato di GOLGI, quale organo cellulare, che presiede alle secrezioni, potrebbero richiamare ai problemi, avanti cennati, sui fattori che stimolano l'ovo e le zone organoformative ad iniziare le nuove strutture. La localizzazione della *Vitamina C* nel campo di GOLGI e la sua presenza nel secreto delle cellule ghiandolari, potrebbe far ritenere che, oltre agli ormoni, anche le vitamine esercitano una particolare azione su i primi fenomeni dello sviluppo, come è dimostrato da dati sperimentali, forniti da culture di piante diverse (*pisello, pomodoro, fagiolo, girasole* ed altre), che, trattate con l'*aneurina* della *Vitamina B₁* o con un fitormone contenente l'*acido ascorbico* della *Vitamina C*, accelerano i processi morfogenetici. Dall'identità dei risultati sperimentali e dal fatto che l'ovo, fornito anche di apparato reticolare, è considerato un elemento glandulare, appare confermato sempre più il concetto del RUFFINI su le secrezioni stimolatrici dei primi fenomeni dello sviluppo.

Analoga funzione di attivatori avrebbero alcuni *alcaloidi*, per cui potrebbe ritenersi tali prodotti, insieme agli *ormoni* ed alle *vitamine*, siano legati da un fenomeno comune, quello delle secrezioni.

Che gli alcaloidi possano avere una funzione analoga a quella degli ormoni e delle vitamine, quali attivatori dello sviluppo, sembrerebbe essere stato messo in chiaro, per la prima volta, nel 1917, da CIAMICIAN e RAVENNA, i quali osservarono che alcuni di essi, supposti ormoni vegetali, introdotti artificialmente nelle piantine di fagiolo e di granturco, specialmente la *cianidrina* dell'*aldeide benzoica* o *nitrile mandelico*, oltre ad accelerare lo sviluppo, ne modificavano i caratteri, tanto da fare ritenere le forme così modificate delle *mutazioni artificiali* o *indotte*.

Più recentemente però, nel 1936, ricerche di TORRISI, eseguite nel Laboratorio di ANTONINO CLEMENTI, hanno dimostrato direttamente nella pianta, *Lupinus albus*, che l'alcaloide, la *lupanina*, diminuisce nei semi germogliati nelle due prime settimane, ma che, dalla 3^a settimana,

esso aumenta, localizzandosi prevalentemente nei semi, e che tali variazioni sono influenzate da energie esterne, come la luce.

In questo caso, l'alcaloide appare in funzione degli stadi di sviluppo e delle condizioni dell'ambiente esterno, ma, non si potrebbe dire che esso, in un primo tempo, essendosi esaurito, non sia stato impiegato come attivatore nei primi momenti dello sviluppo e che l'aumento successivo non sia una manifestazione di atti secretori, correlata alla funzione di un'*ergoplasto* o *campo di GOLGI*, o di altre analoghe formazioni cromatoidi ovulari, che, durante lo sviluppo, quali iniziatori di una *via germinale*, si localizzano nella *1ª cellula sessuale* della nuova gonade per trasmettersi alle successive generazioni. Spetta ai chimici, per tanto, studiare se e come nella compagine di tali formazioni possa compiersi la sintesi dei prodotti metabolici, necessari alla costituzione del *germe*. Le ricerche biochimiche s'intreccerebbero così con quelle citologiche e sperimentali, facendoci auspicare, per lo studio dei problemi sopra cennati e di altri, che, per brevità, furono omessi, venga sempre più attuata la collaborazione fra i cultori di tali discipline.

Matematica. — *Su una questione relativa all'analisi periodale* ⁽¹⁾. Nota di LUIGI AMERIO, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Come è noto, l'*analisi periodale* di una funzione $\varphi(t)$, continua nell'intervallo $0 - T$, si effettua determinando delle opportune funzioni $\varphi_n(t)$, del tipo

$$[1] \quad \varphi_n(t) = \sum_0^{v_n} p_{k,n}(t) e^{\lambda_{k,n} t},$$

dove le $\lambda_{k,n}$ sono costanti reali o complesse e i $p_{k,n}(t)$ polinomi, in modo che risulti uniformemente, in $0 \leq t \leq T$,

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t).$$

Ora da una teoria generale elaborata dal prof. PICONE per le necessità dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo risulta che il problema così è posto indeterminato a meno che non si limiti superiormente nella [1] il grado dei polinomi e il numero dei termini. In altre parole, occorre che le $\varphi_n(t)$ siano integrali di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, di ordine variabile da funzione a funzione ma non superiore a un certo R . Indicata con C_R la totalità delle funzioni che soddisfano ad equazioni di un tal tipo, mi è stato proposto dal prof. PICONE di dimostrare che la $\varphi(t)$ stessa risulta allora, necessariamente, una funzione della classe C_R .

È appunto di tale questione che mi occupo in questa Nota, nella quale considero anche tipi di convergenza più generali di quella uniforme.

Introdotta la trasformato di LAPLACE a intervallo di integrazione finito relative alle $\varphi_n(t)$ e alla funzione limite $\varphi(t)$, si dimostra che se $\varphi(t)$ è continua essa appartiene effettivamente alla classe C_R . Se poi la $\varphi(t)$ non è continua in tutti i punti di $0 - T$ (e un semplicissimo esempio mostra che questa caso può effettivamente presentarsi), si dimostra che $\varphi(t)$ è equivalente a una funzione $\bar{\varphi}(t)$ ⁽³⁾ della classe C_R .

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

⁽³⁾ Cioè risulta $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$ quasi ovunque in $0 \leq t \leq T$.

1. — Sia $F(t)$ una funzione sommabile nell'intervallo finito $0 \leq t \leq T$ e p un parametro complesso.

Considerata la trasformata di LAPLACE a intervallo di integrazione finito della $F(t)$:

$$L_T(F) = \int_0^T e^{-pt} F(t) dt,$$

la quale è una trascendente intera in p , cominciamo col dimostrare il seguente lemma.

Se risulta

$$L_T(F) = \frac{\sum_0^{N-1} p^h (\lambda_h - e^{-pT} \mu_h)}{\sum_0^N a_{N-h} p^h},$$

con λ_h, μ_h, a_h costanti complesse, $a_0 \neq 0$, $N \geq 1$, allora $F(t)$ è equivalente in $0 \leq t \leq T$ a una funzione $G(t)$ che soddisfa all'equazione differenziale

$$\sum_0^N a_h G^{(N-h)}(t) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. — Essendo $a_0 \neq 0$, la funzione razionale

$$g(p) = \frac{\sum_0^{N-1} \lambda_h p^h}{\sum_0^N a_{N-h} p^h}$$

è la trasformata di LAPLACE di una funzione $G(t)$ ⁽⁴⁾.

Precisamente, se con α_i indichiamo le radici del polinomio

$$[2] \quad \sum_0^N a_{N-h} p^h$$

e con β la massima parte reale di tali radici, si ha, nel semipiano $R(p) > \beta$,

$$g(p) = \int_0^\infty e^{-pt} G(t) dt.$$

(4) V. ad esempio: G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin, Springer (1937), pagg. 323-324.

Analogamente esiste una funzione $H(t)$ tale che risulti, nello stesso semipiano,

$$\frac{\sum_0^{N-1} \mu_h p^h}{\sum_0^N a_{N-h} p^h} = \int_0^\infty e^{-pt} H(t) dt.$$

Se poniamo allora

$$k(p) = e^{-pT} \frac{\sum_0^{N-1} \mu_h p^h}{\sum_0^N a_{N-h} p^h}$$

e definiamo per $0 \leq t < \infty$ una funzione $K(t)$, ponendo $K(t) = 0$ per $0 \leq t \leq T$, $K(t) = H(t - T)$ per $t > T$, otteniamo, nel semipiano $R(p) > \beta$,

$$k(p) = \int_0^\infty e^{-pt} K(t) dt.$$

Essendo poi

$$L_T(F) = g(p) - k(p),$$

si ha quasi ovunque, per $0 \leq t < \infty$,

$$F(t) = G(t) - K(t).$$

Siccome per $0 \leq t \leq T$ è $K(t) = 0$, si ha allora quasi ovunque, in tale intervallo,

$$F(t) = G(t).$$

Basta perciò dimostrare che $G(t)$ soddisfa all'equazione

$$[3] \quad \sum_0^N a_h G^{(N-h)}(t) = 0$$

ciò che è immediato. Infatti se r_i è la molteplicità della radice α_i del polinomio [2], si ha

$$g(p) = \sum_1^M \sum_1^{r_i} \frac{c_{i,k}}{(p - \alpha_i)^k} \quad (r_1 + r_2 + \dots + r_M = N).$$

indicando con $c_{i,k}$ delle costanti.

Siccome risulta, per $R(p) > R(\alpha_i)$,

$$\frac{1}{(p - \alpha_i)^k} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha_i t} dt$$

e siccome la funzione

$$t^{k-1} e^{a_i t}$$

soddisfa alla [3], la tesi è provata.

Dimostriamo ora il seguente teorema che risolve completamente la questione proposta.

Sia $\{\varphi_n(t)\}$ una successione di funzioni della classe C_R e $\varphi(t)$ una funzione sommabile in $0 \leq t \leq T$.

Se risulta per tutti i valori di p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_T(\varphi_n) = L_T(\varphi),$$

allora $\varphi(t)$ è equivalente a una funzione $\bar{\varphi}(t)$ della classe C_R .

DIMOSTRAZIONE. — Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione $\bar{\varphi}(t)$ equivalente alla $\varphi(t)$ e integrale di una equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine $\leq R$.

Per questo cominciamo col porre

$$\begin{aligned} f_n(p) &= L_T(\varphi_n), \\ f(p) &= L_T(\varphi), \end{aligned}$$

e sia

$$[4] \quad \sum_{i=1}^R a_{k,n} \varphi_n^{(R-k)}(t) = 0$$

l'equazione cui soddisfa la $\varphi_n(t)$. Siccome, per un dato n , le costanti $a_{k,n}$ non sono tutte nulle, dividendo la [4] per il loro massimo modulo, si può ammettere che risulti

$$[5] \quad |a_{k,n}| \leq 1$$

e che in corrispondenza di ogni n esista almeno un k_n tale che

$$[6] \quad |a_{k_n,n}| = 1.$$

Inoltre le $f_n(p)$, $f(p)$ sono delle trascendenti intere in p e risulta, per ipotesi, qualunque sia p ,

$$[7] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p).$$

Si ha poi, per note formule ⁽⁵⁾, supposto $i \geq 1$,

$$L_T(\varphi_n^{(i)}) = p^i f_n(p) - \sum_{h=0}^{i-1} p^{i-1-h} \{ \varphi_n^{(h)}(0) - e^{-pT} \varphi_n^{(h)}(T) \}$$

⁽⁵⁾ V. ⁽⁴⁾ pag. 154.

e quindi dalla [4] si ricava

$$[8] \quad f_n(p) \sum_0^R a_{k,n} p^{R-k} = \sum_0^{R-1} a_{k,n} \sum_0^{R-k-1} p^{R-k-1-h} \{ \varphi_n^{(h)}(0) - e^{-pT} \varphi_n^{(h)}(T) \} = \\ = \sum_0^{R-1} p^h (C_{h,n} - e^{-pT} D_{h,n})$$

dove $C_{h,n}, D_{h,n}$ sono delle costanti.

Osserviamo ora che, per le [5], [6], non può essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n} = 0$$

per $k = 0, 1, \dots, R$. Esiste perciò un k tale che dalla successione $\{a_{k,n}\}$ sia possibile estrarre una successione parziale convergente a un limite $b_{\bar{k}} \neq 0$. Inoltre, per la [5], è $|b_{\bar{k}}| \leq 1$. Proseguendo di qui in modo noto si deduce che è possibile estrarre dalle successioni $\{a_{k,n}\}$, con $k = 0, 1, \dots, R$, delle successioni parziali che, per semplicità di scrittura, indicheremo ancora con $\{a_{k,n}\}$ in modo che esistano finiti e non tutti nulli i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,n} = b_k.$$

Per la [7] si ha allora, qualunque sia p ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) \sum_0^R a_{k,n} p^{R-k} = f(p) \sum_0^R b_k p^{R-k}.$$

Indicato tale limite con $\omega(p)$ e posto

$$[9] \quad \sum_0^{R-1} p^h (C_{h,n} - e^{-pT} D_{h,n}) = \omega_n(p),$$

si ricava dalla [8]

$$[10] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(p) = \omega(p).$$

Se diamo allora a p i valori

$$p_s = \frac{2s\pi i}{T}, \quad (s = 1, 2, \dots, R)$$

otteniamo dalla [9] il sistema

$$[11] \quad \sum_0^{R-1} p_s^h (C_{h,n} - D_{h,n}) = \omega_n(p_s)$$

di R equazioni lineari nelle R incognite $(C_{h,n} - D_{h,n})$.

Osserviamo ora che il determinante di tale sistema è $\neq 0$ e non dipende da n . Il sistema [11] può essere perciò risolto rispetto a $C_{h,n} - D_{h,n}$ e si deduce per la [10] che esiste finito il limite

$$[12] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (C_{h,n} - D_{h,n}).$$

Analogamente, se diamo a p i valori

$$\bar{p}_s = \frac{(2s-1)\pi i}{T}, \quad (s = 1, 2, \dots, R)$$

ricaviamo dalla [9] il sistema

$$\sum_0^{R-1} \bar{p}_s^h (C_{h,n} + D_{h,n}) = \omega_n(\bar{p}_s)$$

e quindi si deduce che esiste finito il limite

$$[13] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (C_{h,n} + D_{h,n}).$$

Dalle [12], [13] segue che esistono finiti i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{h,n} = \lambda_h,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h,n} = \mu_h.$$

Ne segue, per le [9], [10],

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^{R-1} p^h (C_{h,n} - e^{-pT} D_{h,n}) = \\ & = \sum_0^{R-1} p^h (\lambda_h - e^{-pT} \mu_h) = f(p) \sum_0^R b_{R-h} p^h \end{aligned}$$

e quindi, siccome i b_{R-h} non sono tutti nulli,

$$[14] \quad f(p) = \frac{\sum_0^{R-1} p^h (\lambda_h - e^{-pT} \mu_h)}{\sum_0^R b_{R-h} p^h}.$$

Sia b_r , con $0 \leq r \leq R$, il primo dei numeri b_0, b_1, \dots, b_R che è $\neq 0$.

Si ricava allora dalle [14]

$$[15] \quad f(p) = \frac{\sum_0^{R-1} p^h (\lambda_h - e^{-pT} \mu_h)}{\sum_0^{R-r} b_{R-h} p^h}.$$

Siccome $f(p)$ è una trasformata di LAPLACE, deve essere (*)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(p) = 0$$

a quindi dalle [15] si deduce

$$\lambda_h = 0$$

per $h \geq R - r$.

Analogamente deve essere (7), posto $p = i v$, con v reale,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(i v) = 0$$

e quindi si ha anche

$$\mu_h = 0$$

per $h \geq R - r$.

Ne segue

$$f(p) \equiv 0$$

se risulta $r = R$ e, per $r < R$,

$$f(p) = \frac{\sum_{h=0}^{R-r-1} p^h (\lambda_h - e^{-pT} \mu_h)}{\sum_{h=0}^{R-r} b_{R-h} p^h}.$$

Per il lemma precedentemente dimostrato si deduce allora che $\varphi(t)$ è equivalente a una funzione $\bar{\varphi}(t)$ la quale nell'intervallo $0 \leq t \leq T$ soddisfa all'equazione

$$\sum_{h=0}^{R-r} b_{R-r-h} \bar{\varphi}^{(h)}(t) = 0$$

e appartiene perciò alla classe C_R .

Osservazione. — Le condizioni del teorema sono sicuramente verificate se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

uniformemente in $0 \leq t \leq T$, o anche se si ha, per un valore $\alpha \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |\varphi_n(t) - \varphi(t)|^\alpha dt = 0.$$

(*) V. (4) pag. 49.

(7) V. ad esempio: M. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore*, Napoli, Rindinella (1940), pagg. 173-176.

Osserviamo però che, mentre nel caso della convergenza uniforme risulta in $0 \leq t \leq T$

$$\varphi(t) \equiv \bar{\varphi}(t),$$

questo può non avvenire se la successione $\{\varphi_n\}$ non converge uniformemente.

Si consideri infatti la successione delle $\varphi_n(t)$ appartenenti alla classe C_1 e definite dalle condizioni

$$\frac{\varphi'_n(t)}{n} + \varphi_n(t) = 0 \quad , \quad \varphi_n(0) = 1.$$

Si ha

$$\varphi_n(t) = e^{-nt}$$

e quindi

$$\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Ne segue, qualunque sia p ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-pt} \varphi_n(t) dt = \int_0^T e^{-pt} \varphi(t) dt = 0$$

e la funzione $\bar{\varphi}(t)$, dovendo riuscire ovunque nulla, differisce dalla $\varphi(t)$ nel punto $t = 0$.

Geometria. — *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie* ⁽¹⁾. Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. — Sopra una curva sghemba algebrica, irriducibile e priva di punti multipli, la quale sia intersezione semplice completa di due superficie F^λ , F^μ , le superficie dell'ordine $\rho = \lambda + \mu - 4$ staccano la serie canonica completa, le superficie d'ordine $< \rho$ serie complete speciali, le superficie d'ordine $> \rho$ serie complete non speciali ⁽³⁾.

Si può provare che, inversamente, *una curva sghemba irriducibile sulla quale le superficie di un dato ordine qualunque segano una serie lineare completa e le superficie di un ordine determinato ρ la serie canonica, è intersezione (semplice completa) di due superficie* ⁽⁴⁾.

2. — Sia C una curva, d'ordine n e genere p , per la quale risultino verificate le ipotesi precedenti.

Se $\rho = 0$ la curva C , ellittica normale, è *intersezione completa di due quadriche*.

Se $\rho = 1$ i piani staccano su C la g_n^2 canonica e dunque $n = 6$, $p = 4$. Le F^2 staccano su C una serie completa non speciale g_{12}^3 e perciò C appartiene ad una quadrica irriducibile. Le F^3 segano su C una serie completa non speciale g_{13}^4 ; il sistema lineare delle F^3 per C ha la dimensione $19 - 14 - 1 = 4$: esistono pertanto F^3 irriducibili per C : C è dunque *intersezione completa di una quadrica con una superficie cubica*. Se $\rho = 2$ le quadriche staccano su C la g_{2n} canonica. Se la dimensione di questa serie è 9 e perciò $n = 9$, $p = 10$ le F^3 staccano su C la serie completa non speciale g_{27}^{15} : C è intersezione completa di due F^3 . Se la dimensione della serie vale 8 e perciò $n = 8$, $p = 9$ C sta su una quadrica. Le F^4 staccano su C una serie

⁽¹⁾ L'argomento di questo scritto mi è stato suggerito da F. SEVERI nel lavoro di Seminario del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

⁽³⁾ SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*. « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. XVII, 1903, pag. 84.

⁽⁴⁾ La curva, in virtù delle ipotesi, risulta priva di punti multipli.

completa non speciale g_{32}^{23} e perciò il sistema lineare delle F^4 per C ha la dimensione $34 - 23 - 1 = 10$: esistono pertanto F^4 irriducibili per C : C è dunque *intersezione completa di una F^2 con una F^4* . Il teorema è provato per $\rho \leq 2$.

3. — Se $\rho > 2$ si considerino le serie segate su C dai piani dalle quadriche ... dalle F^ρ cioè le serie speciali multiple (minime complete) della g_n^3 delle sezioni piane. Siano $r_1 = 3, r_2, \dots, r_\rho$ le dimensioni di queste serie e si ponga:

$$r_1 = v_1, r_2 = r_1 + v_2, \dots, r_\rho = r_{\rho-1} + v_\rho$$

dalle quali segue:

$$r_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k.$$

Per il teorema di reciprocità di BRILL-NOETHER si ha:

$$2(r_{\rho-k} - r_k) = 2(v_{k+1} + \dots + v_{\rho-k}) = (\rho - 2k)n$$

$$2(r_{\rho-k-1} - r_{k-1}) = 2(v_{k+2} + \dots + v_{\rho-k-1}) = (\rho - 2k - 2)n$$

e per sottrazione:

$$v_{k+1} + v_{\rho-k} = n \quad (k = 0, 1, \dots, \rho).$$

Un gruppo G sezione piana di C impone alla serie $|kG|$ v_k condizioni lineari indipendenti: si possono scegliere entro G v_k punti (ma non $v_k + 1$) indipendenti rispetto a $|kG|$. E questi v_k punti sono indipendenti anche rispetto alla serie $|(k+1)G|$. Ora una F^k condotta genericamente per $v_k - 1$ di quei punti e un piano generico per il rimanente, danno una F^{k+1} che contiene i v_k punti di G ma non il gruppo G .

E dunque $v_{k+1} > v_k$. La successione delle v è pertanto crescente ⁽¹⁾.

4. — Sia ora μ l'ordine minimo delle superficie (certo irriducibili) contenenti la curva C . Avremo:

$$r_1 = \binom{4}{3} - 1, \quad r_2 = \binom{5}{3} - 1, \dots, r_{\mu-1} = \binom{\mu+2}{3} - 1$$

$$v_1 = \binom{3}{2}, \quad v_2 = \binom{4}{2}, \dots, v_{\mu-1} = \binom{\mu+1}{2}.$$

Le $v_1, v_2, \dots, v_{\mu-1}$ costituiscono una progressione aritmetica del 2° ordine. Se $\rho = 2\sigma$ la progressione non può comprendere il termine

⁽¹⁾ Cfr. CASTELNUOVO, *Sui multipli di una serie lineare*. . . « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. VII, 1893, n. 2.

$v_{\sigma+2}$ perchè non è $v_{\sigma-1} + v_{\sigma+2} = v_{\sigma} + v_{\sigma-1}$; deve essere quindi $\mu \leq \sigma - 2$ cioè $\mu \leq \frac{\rho+4}{2}$.

Se poi $\rho = 2\sigma - 1$ non può la progressione stessa comprendere il termine $v_{\sigma+1}$ perchè non è $2v_{\sigma} = v_{\sigma-1} + v_{\sigma+1}$; deve essere quindi $\mu \leq \sigma - 1$ cioè $\mu \leq \frac{\rho+3}{2}$. Si ha dunque in ogni caso:

$$\mu \leq \left[\frac{\rho+4}{2} \right].$$

Si può poi supporre $\mu \leq \rho$ perchè se fosse $\mu > \rho$ si avrebbe $\rho \leq 2$: caso già esaminato.

5. - Si consideri in primo luogo il caso di ρ pari: $\rho = 2\sigma$. Sarà $\mu = \sigma - 2 - \theta$ ($\theta \geq 0$). Se $\theta = 0$ la progressione delle v comprende i termini v_{σ} , $v_{\sigma+1}$ e perciò:

$$n = v_{\sigma} + v_{\sigma+1} = \binom{\mu}{2} + \binom{\mu+1}{2} = \mu^2$$

$$v_{\mu} = n - v_{\mu-3} = \mu^2 - \binom{\mu-1}{2}.$$

Le F^{μ} segano su C una serie speciale completa della dimensione:

$$r_{\mu} = r_{\mu-1} + v_{\mu} = \binom{\mu+2}{3} - 1 + \mu^2 - \binom{\mu-1}{2} = \binom{\mu+3}{3} - 3.$$

Le F^{μ} per C costituiscono dunque un fascio (irriducibile). E pertanto C è intersezione completa di due F^{μ} .

Se $\theta > 0$ si consideri la successione:

$$v_{\mu}, v_{\mu+1}, \dots, v_{\sigma} = v_{\mu+\theta-2}, v_{\sigma+1} = v_{\mu+\theta-1}.$$

È facile calcolare, a passo a passo, i termini di questa successione e quindi l'ordine n della curva. Intanto questo ordine, poichè la successione delle v è crescente, supera $2v_{\mu-1} = \mu(\mu+1)$ e perciò C appartiene ad una F^{μ} ma non sta su alcuna $F^{\mu+1}$ irriducibile; dunque:

$$r_{\mu} = \binom{\mu+3}{3} - 1 - \binom{3}{3}, \quad r_{\mu+1} = \binom{\mu+4}{3} - 1 - \binom{4}{3}$$

$$v_{\mu} = \binom{\mu+2}{2} - \binom{2}{2}, \quad v_{\mu+1} = \binom{\mu+3}{2} - \binom{3}{2}.$$

Se $\theta > 1$ l'ordine n della curva supera $2\nu_\mu = \mu(\mu + 3)$ e in conseguenza C non appartiene a $F^{\mu+2}$ o $F^{\mu+3}$ irriducibili; dunque:

$$r_{\mu+2} = \binom{\mu+5}{3} - 1 - \binom{5}{3} \quad , \quad r_{\mu+3} = \binom{\mu+6}{3} - 1 - \binom{6}{3}$$

$$\nu_{\mu+2} = \binom{\mu+4}{2} - \binom{4}{2} \quad , \quad \nu_{\mu+3} = \binom{\mu+5}{2} - \binom{5}{2}.$$

Così proseguendo si trova:

$$\nu_\sigma = \nu_{\mu-2+\theta} = \binom{\mu+\theta}{2} - \binom{\theta}{2} \quad , \quad \nu_{\sigma+1} = \nu_{\mu-1+\theta} = \binom{\mu+\theta+1}{2} - \binom{\theta+1}{2}.$$

E pertanto:

$$n = \nu_\sigma + \nu_{\sigma+1} = \mu(\mu + 2\theta).$$

Non esistono $F^{\mu+1}, \dots, F^{\mu+2\theta-1}$ irriducibili per C .

Se $\mu + 2\theta > \rho$ e quindi $\theta > \sigma - 2$ deve essere $\mu \leq 3$ e inversamente.

Si debbono esaminare a parte i casi $\mu = 2$, $\mu = 3$.

Sia $\mu = 2$ e perciò $\rho = 2\theta$, $n = 2(2 + 2\theta)$. Le $F^{2\theta}$ segano su C la serie canonica onde $p = 2\theta(2 + 2\theta) + 1 = (2\theta + 1)^2$. Le $F^{2\theta+2}$ segano su C una serie completa non speciale della dimensione:

$$r_{2\theta+2} = 2(2 + 2\theta)^2 - p.$$

Le $F_{2\theta+2}$ per C formano in conseguenza un sistema lineare della dimensione:

$$\binom{2\theta+5}{3} - 1 - r_{2\theta+2} - 1 = \binom{2\theta+3}{3}.$$

Esistono dunque $F^{2\theta+2}$ irriducibili per C . La curva C è pertanto intersezione completa di una quadrica con una $F^{2\theta+2}$. Si giunge alla stessa conclusione osservando che la curva C ha il genere massimo compatibile col suo ordine.

Sia ora $\mu = 3$ e perciò $\rho = 2\theta + 2$, $n = 3(3 + 2\theta)$. La $F^{2\theta+2}$ segano su C la serie canonica e pertanto $p = 3(\theta + 1)(3 + 2\theta) + 1$. Le $F^{3+2\theta}$ segano su C una serie completa non speciale della dimensione:

$$r_{3+2\theta} = 3(3 + 2\theta)^2 - p.$$

Cosicchè le $F^{3+2\theta}$ che passano per C formano un sistema lineare della dimensione:

$$\binom{2\theta+6}{3} - 1 - r_{3+2\theta} - 1 = \binom{2\theta+3}{3}.$$

Si conclude che esistono $F^{3+2\theta}$ irriducibili per C : C è dunque intersezione completa di una F^3 con una $F^{2\theta+3}$.

Sia ora $\mu + 2\theta \leq \rho$ e perciò la serie segata su C dalle $F^{\mu+2\theta}$ completa speciale. Per il teorema di reciprocità si può scrivere:

$$2(r_{\mu+2\theta} - r_{\mu-4}) = (2\theta + 4)n$$

da cui:

$$r_{\mu+2\theta} = \binom{\mu-1}{3} - 1 + \mu(\mu+2\theta)(\theta+2).$$

E pertanto la dimensione del sistema delle $F^{\mu+2\theta}$ per C vale:

$$\binom{\mu+2\theta+3}{3} - 1 - r_{\mu+2\theta} - 1 = \binom{2\theta+3}{3}.$$

Esistono dunque $F^{\mu+2\theta}$ irriducibili per C : si conclude che C è *intersezione completa di una F^μ con una $F^{\mu+2\theta}$* .

b) Nel caso di ρ dispari: $\rho = 2\theta - 1$ sarà $\mu = \sigma + 1 - \theta$ ($\theta \geq 0$).

Con un ragionamento perfettamente analogo al precedente e sul quale appare superfluo insistere, si prova che l'ordine n di C vale $\mu(\mu+2\theta+1)$ e che la curva C stessa è *intersezione completa di una F^μ con una $F^{\mu+2\theta+1}$* .

La proposizione enunciata risulta così stabilita in ogni caso.

Analisi. — *Sulle funzioni armoniche sopra la sfera.* Nota di NICOLA OBRESCHKOFF, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Consideriamo una sfera S di raggio R e indichiamo con ϑ, φ le coordinate sferiche d'un punto M di S , essendo $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$. Una funzione $u = u(\vartheta, \varphi)$ delle variabili ϑ, φ è armonica, se essa soddisfa all'equazione di BELTRAMI

$$[1] \quad \Delta_2 u = 0,$$

ove $\Delta_2 u$ è il parametro

$$[2] \quad \Delta_2 u = \frac{1}{R \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right],$$

che corrisponde all'elemento

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

In questa Nota diamo i risultati da noi ottenuti, che sono di natura assai semplice.

Siano $M_0(\vartheta_0, \varphi_0)$ un punto arbitrario di S , $M(\vartheta, \varphi)$ un punto variabile su S . Indicato con γ l'arco $\widehat{M_0 M}$, per cui

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0),$$

abbiamo dimostrato che la funzione

$$u_1 = \log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

soddisfa all'equazione [1]; tale funzione è d'importanza fondamentale nelle nostre ricerche. Grazie alla formula di BELTRAMI, che generalizza quella di GREEN, abbiamo ottenuto la formula seguente. Se C è un con-

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

torno semplice su S ed M è un punto di S nell'interno di C , per ogni funzione armonica e regolare u si ha

$$[3] \quad u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(u \frac{\partial}{\partial n} \log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

ove le derivate sono calcolate in direzione della normale esterna a C , sul piano tangente ad S . Nel caso che C sia un cerchio, la formula [3] si riduce a

$$[4] \quad u(M_0) = \frac{1}{2\pi R \operatorname{sen} \gamma_1} \int_C u ds,$$

indicando con M_0 il centro di C e con γ_1 il raggio sferico angolare di C . Queste formole sono del tutto analoghe a quelle classiche di GREEN e di GAUSS concernenti le funzioni armoniche nel piano.

Sia $\mu(M')$ una funzione integrabile del punto M' lungo C e sia $M(\vartheta, \varphi)$ un punto variabile su S . Allora la funzione delle variabili ϑ e φ

$$[5] \quad U(M) = \int_C \mu(M') \log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} ds,$$

ove γ è ancora la distanza sferica angolare dei punti M ed M' , soddisfa all'equazione [1]. Si dimostra facilmente ch'essa è continua su tutta la sfera S . $U(M)$ è il potenziale di semplice strato. La funzione

$$[6] \quad V(M) = \int_C \mu(M') \frac{\cos \psi}{\operatorname{sen} \gamma} ds,$$

ove ψ è l'angolo farmato dall'arco $\widehat{MM'}$ con la normale interna nel punto M' , soddisfa anch'essa all'equazione [1]. $V(M)$ è il potenziale di doppio strato su C . Indicando con $d\omega$ l'angolo sferico secondo cui l'elemento d'arco ds di C è visto da M , si ha

$$\frac{\cos \psi}{\operatorname{sen} \gamma} ds = d\omega.$$

Si riconosce subito che l'integrale

$$\int_C d\omega$$

è uguale a 2π , 0 , secondo che il punto M si trova all'interno di C , su C (per un punto regolare), o fuori di C . Si deduce allora il risultato seguente. Supponiamo che $\mu(M')$ sia continua in un punto M'_1 di C e

indichiamo con $V_i(M'_1)$, $V_e(M'_1)$ i valori di $V(M)$, quando il punto M s'avvicina ad M'_1 rispettivamente dall'interno o dall'esterno di C . Si ha allora

$$[7] \quad \begin{cases} V_i(M'_1) = V(M'_1) + \pi\mu(M'_1), \\ V_e(M'_1) = V(M'_1) - \pi\mu(M'_1). \end{cases}$$

Le relazioni [7] ci permettono di risolvere il problema di DIRICHLET per un contorno C su S . Sia $M(\vartheta, \varphi)$ un punto di S interno a C . Indichiamo con $g(M')$ la funzione armonica che assume i valori $\log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ su C . Allora la funzione

$$G(M') = g(M') - \log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

è armonica all'interno di C , fatta eccezione del M e s'annulla lungo C . $G(M')$ è analoga all'ordinaria funzione di GREEN. Orbene, per ogni funzione armonica e regolare u , abbiamo ottenuto la formula

$$[8] \quad u(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{dG}{dn} ds.$$

L'elemento d'una superficie a curvatura costante è

$$[9] \quad ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Con la trasformazione

$$u = R\vartheta, \quad v = \varphi$$

si riconosce che [9] si trasforma in

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Così tutti i nostri risultati valgono anche per le superficie a curvatura costante, ove si sostituiscono naturalmente, nel caso $R^2 < 0$, le funzioni trigonometriche con le funzioni iperboliche.

Consideriamo ora l'ipersfera H , data da

$$[10] \quad ds^2 = R^2 (d\vartheta^2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta d\varphi^2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen}^2 \varphi d\psi^2),$$

con $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Una funzione $u(\vartheta, \varphi, \psi)$ è armonica se soddisfa all'equazione

$$[11] \quad \Delta_2 u = 0,$$

con

$$\Delta_2 u = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen} \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen}^2 \vartheta \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \right].$$

Indichiamo con γ la distanza sferica angolare fra due punti $M(\vartheta, \varphi, \psi)$ e $M_0(\vartheta_0, \varphi_0, \psi_0)$, per cui

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 [\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos (\psi - \psi_0)].$$

Abbiamo dimostrato che la funzione

$$u_1 = \operatorname{ctg} \gamma$$

soddisfa all'equazione [11] di BELTRAMI. In forza di questa proprietà abbiamo ottenuto delle nuove formule, analoghe a quelle classiche per il caso delle ordinarie funzioni armoniche di tre variabili. Citiamo per esempio la formula: se u è una funzione armonica regolare all'interno di una superficie E di H , si ha

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_E \left(\operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{ctg} \gamma \right) d\tau.$$

Le formule da noi ottenute valgono anche per ogni spazio di RIEMANN a tre dimensioni e di curvatura costante. Così abbiamo ottenuto, in tali spazi, una meccanica di cui abbiamo qui esposti alcuni dei nostri risultati preparatori.

Matematica. — *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari.* — I. *Proprietà generali.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — In un lavoro che sto ultimando verrà studiato ampiamente l'intorno del 2° ordine di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r , in una coppia regolare di punti corrispondenti, dal punto di vista proiettivo, affine e metrico ⁽²⁾.

Alla base di queste mie ricerche è la considerazione di certi semplici enti il cui insieme chiamo *configurazione caratteristica* della trasformazione puntuale. Il fondamentale interesse di questa nozione consiste nel fatto che la configurazione caratteristica individua pienamente la trasformazione fino all'intorno del 2° ordine, sicchè ogni proprietà relativa all'intorno del 2° ordine della trasformazione stessa si traduce in una proprietà della configurazione caratteristica e inversamente.

Nei nn. 2, 3, 4 definisco la configurazione caratteristica ed enuncio alcune proprietà di essa, senza darne le dimostrazioni. Nei nn. 5, 6 dò un saggio delle applicazioni che se ne possono fare nella risoluzione di alcuni

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942–XXI.

⁽²⁾ Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari ho pubblicato recentemente i seguenti lavori: *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Note I e II, « Rend. della Reale Accademia d'Italia », ser. 7, vol. III, pag. 718, 1942; *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane*, « Rendiconti di Matematica », ser. 5, vol. III, pag. 216, 1942; *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna », ser. 9, vol. X, pag. 7, 1942; *Sull'annullarsi, in un punto, della matrice Jacobiana di m funzioni in n variabili*, « Rend. della R. Accademia d'Italia », ser. 7, vol. III, pag. 209, 1942; *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna », ser. 9, vol. IX, pag. 19, 1942; *Superficie della V_4^6 di Segre e relative trasformazioni puntuali*, « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Bologna », ser. 9, vol. IX, pag. 133, 1942; Ricordo anche il recente lavoro di BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Memorie della Reale Accademia d'Italia », ser. 6, vol. XIII, pag. 837, 1942.

problemi, mettendo in viva luce alcuni risultati ottenuti precedentemente da altri Autori ed anche da me.

Il n. 5 è dedicato soprattutto agli invarianti metrici delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi ordinari. Nel n. 6 riprendo invece il problema dell'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane, di cui mi sono occupato recentemente e che mi spinse a compiere le presenti ricerche sulle trasformazioni puntuali.

2. - Consideriamo una trasformazione puntuale T che muti i punti di un campo U di uno spazio lineare $S_r(x_1, \dots, x_r)$ ad r dimensioni nei punti di un altro spazio lineare $S'_r(y_1, \dots, y_r)$ ad r dimensioni e riferiamoci ad una coppia (O, O') di punti corrispondenti, in relazione alla quale l'Jacobiano sia $\neq 0$, ciò che notoriamente assicura la biunivocità di T nell'intorno di tale coppia.

La T subordina fra le direzioni uscenti da O e quelle uscenti da O' una proiettività ω .

Consideriamo quelle direzioni uscenti da O (da O') per le quali la T conserva le inflessioni delle curve uscenti da O (da O') che si diranno *direzioni inflessionali* (o *caratteristiche*) di T nella coppia (O, O') ⁽³⁾.

Le *direzioni inflessionali uscenti da O (da O')* sono, in generale, 3 per $r = 2$, e $7 \cdot 3^{r-3}$ per $r > 2$ ⁽⁴⁾.

Fra le coppie di rette caratteristiche corrispondenti (in ω) consideriamo le proiettività in cui ai tre punti infinitamente vicini del flesso in O corrispondono i tre punti infinitamente vicini del flesso in O' . Ho chiamato queste proiettività le *proiettività caratteristiche* di T in (O, O') ⁽⁵⁾.

Si dirà *configurazione caratteristica C di T nella coppia (O, O')* l'ente costituito dalle direzioni inflessionali di T in (O, O') e dalle proiettività caratteristiche di T in (O, O') . Si diranno *direzioni inflessionali* e *proiettività caratteristiche* di C le direzioni inflessionali e le proiettività caratteristiche di T in (O, O') .

Si diranno *elementi costitutivi* della configurazione caratteristica C le direzioni inflessionali, la proiettività ω e le proiettività caratteristiche.

Assumiamo O, O' come origine delle coordinate nei rispettivi spazi ed assumiamo in S'_r come *assi* y_1, y_2, \dots, y_r rispettivamente le rette che

⁽³⁾ Nel 3° dei miei lavori citati vi sono varie indicazioni sulle direzioni inflessionali.

⁽⁴⁾ Questa proprietà trovasi dimostrata nel 3° dei miei lavori cit., n. 2.

⁽⁵⁾ Le proiettività caratteristiche sono state da me introdotte per $r = 2$ nel primo dei lavori cit., per $r = 3$ nel 2° dei lavori cit. e per $r > 3$ nel 3° dei lavori cit.

corrispondono in ω agli assi x_1, x_2, \dots, x_r . Allora le equazioni di T si possono scrivere:

$$[1] \quad y_i = a_i x_i + \sum_{k,n} b_{ikn} x_k x_n + [3] \quad (i, k, n = 1, 2, \dots, r)$$

dove le a_i, b_{ikn} sono costanti; $a_i \neq 0$ essendo l'Jacobiano $\neq 0$; ed indicando con [3] i termini d'ordine > 2 ⁽⁶⁾.

Ho dimostrato ⁽⁷⁾ che le coppie di punti di S_r, S'_r che si corrispondono nelle proiettività caratteristiche (e quindi appartenenti alle rette inflessionali) sono quelle soddisfacenti alle seguenti $\binom{r}{2} + r$ equazioni, che costituiscono pertanto *le equazioni della configurazione caratteristica*:

$$[2] \quad \begin{cases} a_k x_k y_i - a_i x_i y_k = 0 & (i \neq k) \\ \sum_{k,n} \frac{1}{a_k} b_{ikn} x_n y_k + y_i - a_i x_i = 0 & (i, k, n = 1, 2, \dots, r). \end{cases}$$

Le equazioni complessive delle rette inflessionali uscenti da O sono

$$\frac{\sum_{k,n} b_{1kn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b_{2kn} x_k x_n}{a_2 x_2} = \dots = \frac{\sum_{k,n} b_{rkn} x_k x_n}{a_r x_r}.$$

Dai risultati precedenti segue il teorema:

La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale nella coppia (O, O') individua la trasformazione sino all'intorno del 2° ordine di (O, O') . Infatti dalle equazioni [2] della configurazione caratteristica sono individuati tutti i coefficienti a_i, b_{ikn} della trasformazione [1].

3. - Gli elementi costitutivi (n. 2) di una configurazione caratteristica sono legati fra di loro da relazioni di cui ora diremo.

Intanto precisiamo che, dati in due spazi S_r, S'_r due punti O, O' , una proiettività ω fra le stelle O, O' , ν rette r_i per O ($\nu = 3$ per $r = 2$, $\nu = 7 \cdot 3^{r-3}$ per $r > 2$), ν rette r'_i per O' corrispondenti delle prime in ω , ν proiettività π_i fra le ν coppie di rette r_i, r'_i , in cui si corrispondono O, O' , si dirà che individuano una configurazione caratteristica quando esiste una trasformazione puntuale fra S_r, S'_r nella quale si corrispondano O, O' , tale che le rette inflessionali in O, O' siano le rette r_i, r'_i e le proiettività caratteristiche siano le π_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$).

⁽⁶⁾ Nel caso proiettivo si può senz'altro assumere come retta $y_1 = y_2 = \dots = y_r$ la corrispondente in ω della retta $x_1 = x_2 = \dots = x_r$. Allora nelle [1] è $a_1 = a_2 = \dots = a_r$.

⁽⁷⁾ Si veda pure il 3° dei miei lavori cit., n. 3.

Per $r = 2$ si ha:

Assegnata ad arbitrio in un piano S_2 tre rette r_1, r_2, r_3 uscenti da un punto O e in un piano S'_2 tre rette r'_1, r'_2, r'_3 uscenti da un punto O' , fissata ad arbitrio una proiettività γ fra r_1, r'_1 in cui si corrispondono O, O' (sicchè basterà assegnare ulteriormente due coppie di punti corrispondenti), fissata ad arbitrio fra le rette r_2, r'_2 una coppia di punti A_2, A'_2 e fra le rette r_3, r'_3 una coppia di punti A_3, A'_3 ($A_3, A'_3 \neq O; A'_2, A'_3 \neq O'$), è individuata la configurazione caratteristica di cui $r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2, r'_3$ sono le rette inflessionali, γ è una proiettività caratteristica e le coppie $(A_2, A'_2), (A_3, A'_3)$ si corrispondono rispettivamente nelle due rimanenti proiettività caratteristiche.

Segue che:

Una configurazione caratteristica in (O, O') di una trasformazione puntuale fra due piani si può assegnare mediante le rette inflessionali r_1, r_2, r_3 uscenti da O e le rette inflessionali r'_1, r'_2, r'_3 uscenti da O' , la proiettività ω in cui si corrispondono le rette inflessionali dei due piani, due coppie di punti $(A_1, A'_1), (B, B')$ omologhi nella proiettività caratteristica fra r_1, r'_1 una coppia di punti (A_2, A'_2) omologhi nella proiettività caratteristica fra r_2, r'_2 e una coppia di punti (A_3, A'_3) omologhi nella proiettività caratteristica fra r_3, r'_3 ($A_1, B, A_2, A_3 \neq O; A'_1, B', A'_2, A'_3 \neq O'$). Le rette inflessionali $r_1, r_2, r_3, r'_1, r'_2, r'_3$ e le coppie $(A_1, A'_1), (B, B'), (A_2, A'_2), (A_3, A'_3)$ si diranno gli elementi liberi della configurazione caratteristica (per $r = 2$).

Gli elementi liberi di una configurazione caratteristica possono assegnarsi ad arbitrio (in quanto la corrispondente configurazione caratteristica esiste sempre), e individuano tutti gli elementi costitutivi della configurazione stessa.

Si ha ($r = 2$):

Dati gli elementi liberi della configurazione caratteristica, la proiettività caratteristica fra r_1, r'_1 è individuata dalle coppie $(O, O'), (A_1, A'_1), (B, B')$. La proiettività caratteristica fra r_2, r'_2 è quella subordinata fra r_2, r'_2 dalla proiettività, fra i due piani, individuata: 1) dalla proiettività ω fra i fasci O, O' in cui si corrispondono $(r_1, r'_1), (r_2, r'_2), (r_3, r'_3)$; 2) da γ ; 3) dalla coppia (A_2, A'_2) . Analogamente la proiettività caratteristica fra r_3, r'_3 è quella subordinata fra r_3, r'_3 dalla proiettività, fra i due piani, individuata: 1) da ω ; 2) da γ ; 3) dalla coppia (A_3, A'_3) ⁽⁸⁾.

Per $r = 3$ si ha:

Assegnate ad arbitrio in uno spazio S_3 , sette rette r_1, r_2, \dots, r_7 uscenti da un punto O e in uno spazio S'_3 quattro rette r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 uscenti da un punto O' , fissata ad arbitrio una proiettività γ fra r_1, r'_1 in cui si corrispondono O, O' (sicchè basterà assegnare ulteriormente due coppie di punti corrispondenti), fissata ad arbitrio fra le rette r_2, r'_2 una coppia di punti A_2, A'_2 ,

⁽⁸⁾ Si noti che nella proiettività fra i due piani individuata da γ_2, γ_3 si corrispondono le rette r_1, r'_1 .

fra le rette r_3, r'_3 una coppia di punti A_3, A'_3 ed infine fra le rette r_4, r'_4 una coppia di punti A_4, A'_4 ($A_2, A_3, A_4 \equiv O$; $A'_2, A'_3, A'_4 \equiv O'$) è individuata la configurazione caratteristica di cui $r_1, r_2, \dots, r_7, r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$ sono rette inflessionali, γ è una proiettività caratteristica e le coppie $(A_2, A'_2), (A_3, A'_3), (A_4, A'_4)$ si corrispondono rispettivamente nelle proiettività caratteristiche relative a $(r_2, r'_2), (r_3, r'_3), (r_4, r'_4)$.

Segue che:

Una configurazione caratteristica in (O, O') di una trasformazione puntuale fra due spazi S_3, S'_3 si può assegnare mediante le sette rette inflessionali r_1, r_2, \dots, r_7 uscenti da O , quattro rette inflessionali r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 uscenti da O' , la proiettività ω fra le rette inflessionali dei due spazi, due coppie di punti $(A_1, A'_1), (B, B')$ omologhi nella proiettività caratteristica fra r_1, r'_1 , una coppia di punti (A_2, A'_2) omologhi nella proiettività caratteristica fra r_2, r'_2 , una coppia di punti (A_3, A'_3) omologhi nella proiettività caratteristica fra r_3, r'_3 ed infine una coppia di punti (A_4, A'_4) omologhi nella proiettività caratteristica fra r_4, r'_4 ($A_1, B, A_2, A_3, A_4 \equiv O$; $A'_1, B', A'_2, A'_3, A'_4 \equiv O'$).

Le rette inflessionali $r_1, \dots, r_7, r'_1, r'_2, r'_3, r'_4$ e le coppie $(A_1, A'_1), (B, B'), (A_2, A'_2), (A_3, A'_3), (A_4, A'_4)$ si diranno gli elementi liberi della configurazione caratteristica per $r = 3$.

Gli elementi liberi possono assegnarsi ad arbitrio e individuano tutti gli elementi costitutivi della configurazione.

Si noterà l'analogia dei precedenti risultati per $r = 2$ e per $r = 3$. Per $r > 3$, si presentano fatti nuovi (che vengono precisati nel mio lavoro preannunciato) poichè per avere le rette inflessionali di una configurazione caratteristica in (O, O') non si possono più fissare ad arbitrio $7 \cdot 3^{r-3}$ rette uscenti da O (oppure da O').

4. — Nella geometria affine (e quindi in quella metrica) si presentano spontaneamente i punti limiti delle proiettività caratteristiche. La conoscenza dei due punti limiti individua pienamente la proiettività caratteristica poichè si ha già la coppia (O, O') di punti corrispondenti (O, O' si suppongono al finito). I punti limiti delle proiettività caratteristiche si diranno *punti limiti* della configurazione caratteristica.

Segue:

Nella geometria affine, la configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari è l'ente costituito dalle direzioni inflessionali e dai punti limiti.

Come elementi costitutivi (n. 3) della configurazione caratteristica si possono anche assumere le rette inflessionali e i punti limiti.

Dai risultati del numero precedente segue:

Una configurazione caratteristica in (O, O') di una trasformazione puntuale fra due piani si può assegnare mediante le rette inflessionali, la

proiettività ω fra le rette inflessionali dei due piani, i punti limiti per una coppia di rette inflessionali corrispondenti ed un punto limite per ciascuna delle altre due coppie di rette inflessionali corrispondenti.

Queste rette, la ω , e questi punti si possono assegnare ad arbitrio. Come elementi liberi (n. 3) della configurazione caratteristica si possono anche assumere (se $r = 2$) le rette inflessionali e quattro punti limiti scelti nel modo suddetto.

Per $r=3$, dai risultati del numero precedente si ha: *Una configurazione caratteristica in (O, O') di una trasformazione puntuale fra due spazi S_3, S'_3 si può assegnare mediante le sette rette inflessionali uscenti da O , quattro rette inflessionali uscenti da O' , la proiettività ω fra le rette inflessionali dei due spazi ^(*), i punti limiti per una coppia di rette inflessionali corrispondenti ed un punto limite per ciascuna delle rimanenti tre coppie di rette inflessionali corrispondenti che si sono assegnate.*

Queste rette, la ω e questi punti si possono assegnare ad arbitrio. Come elementi liberi (n. 3) della configurazione caratteristica si possono anche assumere (se $r = 3$) le sette rette inflessionali di uno spazio, quattro rette inflessionali dell'altro e cinque punti limiti scelti nel modo suddetto.

(*) Si noti che, siccome una proiettività fra le stelle O, O' è individuata da quattro coppie di rette omologhe, per individuare la proiettività ω non occorre far intervenire direzioni inflessionali diverse da quelle assegnate.

Meccanica (Meccanica celeste). — *Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie.* Nota III ⁽¹⁾ di CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sia g l'assegnata gravità in superficie e sia

$$r = a(1 + \zeta)$$

l'equazione dell'incognita superficie esteriore d'equilibrio del pianeta, poco differente da una sfera di raggio a . La ζ è una funzione delle coordinate sferiche θ e φ , da determinare. Ora di solito, nella teoria generale della forma dei pianeti, si suppone che tanto g quanto ζ siano sviluppabili in serie procedenti secondo le potenze di ω^2 , essendo ω la velocità angolare (costante) del pianeta intorno all'asse della rotazione diurna. Ma più generalmente ζ , che caratterizza la deviazione della superficie dalla sfera, si può supporre sviluppabile secondo le potenze d'un parametro λ , del tutto indipendente da ω .

In questa Nota appunto mi metto in questa ipotesi e risolvo il problema in prima approssimazione rispetto a λ *ma con una approssimazione qualunque rispetto a ω* . Inoltre, come soluzione di partenza, differentemente da quel che ho fatto nelle Note precedenti ⁽²⁾, prenderò

$$r = a \quad , \quad g_0 = \frac{fM}{a^2} + \frac{1}{3} a \omega^2 (5 P_2 - 2) ,$$

dove M è la massa del pianeta, f la costante dell'attrazione universale e P_2 il polinomio di Legendre di 2° grado in x calcolato per $x = \cos \theta$.

1. Poniamo

$$[1] \quad \gamma_0 = \frac{fM}{a^2} \quad , \quad \alpha = \frac{a\omega^2}{\gamma_0} ;$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

⁽²⁾ Vedi « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, 1939, pagg. 529-535, e « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », vol. I, 1939, pagg. 109-113.

e dal valore di partenza g_0 della gravità passiamo al valore

$$[2] \quad g = \gamma_0 \left(1 + \frac{\alpha}{3} (5P_2 - 2) \right) + \lambda \gamma_0 (g_1 \alpha + g_2 \alpha^2 + \dots + g_n \alpha^n + \dots);$$

e sia

$$[3] \quad r = a(1 + \lambda \zeta),$$

con

$$[4] \quad \zeta = \zeta_1 \alpha + \zeta_2 \alpha^2 + \dots + \zeta_n \alpha^n + \dots$$

l'equazione della superficie d'equilibrio del pianeta, sulla quale la gravità sia data dalla [2].

Supponendo ζ_n e g_n sviluppabili in serie della forma

$$[5] \quad \zeta_n = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^{(n)}, \quad g_n = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(n)},$$

dove $Z_m^{(n)}$ e $G_m^{(n)}$ rappresentano funzioni sferiche di Laplace d'ordine m , non c'è che da applicare il metodo svolto nelle precedenti Note, per risolvere il sistema delle due equazioni integro-differenziali, dal quale sistema il nostro problema dipende ⁽¹⁾. Si trova, in prima approssimazione rispetto a λ ,

$$[6] \quad (n-1) Z_n^{(i)} + \frac{5}{3} (n-1) [P_2 Z_{n+2}^{(i-1)} + P_2 Z_n^{(i-1)} + P_2 Z_{n-2}^{(i-1)}]_n - \\ - \frac{2}{3} (n+2) Z_n^{(i-1)} = G_n^{(i)},$$

dove con il simbolo

$$[7] \quad [P_2 Z_{n+2}^{(i-1)} + P_2 Z_n^{(i-1)} + P_2 Z_{n-2}^{(i-1)}]_n$$

s'intende la funzione di Laplace d'ordine n che fa parte dell'espressione contenuta dentro la parentesi rettangolare.

Per mezzo della [6], le funzioni

$$Z_0^{(i)}, Z_2^{(i)}, \dots, Z_n^{(i)}, \dots$$

si calcolano in funzione delle $G_n^{(i)}$, che si suppongono date, e delle $Z_{n-2}^{(i-1)}$, $Z_n^{(i-1)}$, $Z_{n+2}^{(i-1)}$, determinate nella precedente approssimazione (rispetto

⁽¹⁾ Meno rigorosamente il problema si può risolvere per la via seguita dallo STOKES. Vedi MINEO, *Sulla determinazione della forma d'un pianeta per mezzo di misure di gravità nel caso di rotazioni non lente*, « Giornale di Scienze Naturali ed Economiche », Palermo, vol. XLIII, 1941-42-XX.

ad α). Quanto alla $Z_1^{(i)}$, dalla [6], per $n = 1$ e cambiando i in $i + 1$, segue

$$[8] \quad Z_1^{(i)} = -\frac{1}{2} G_1^{(i+1)}.$$

Nella detta approssimazione, la superficie sulla quale la gravità si riduce a quella assegnata è dunque univocamente determinata (scompare cioè l'indeterminazione segnalata dallo STOKES): la gravità non deve verificare che la condizione

$$[9] \quad G_1^{(0)} = 0,$$

che discende dalla [8].

L'utilità di questa estensione (relativa all'approssimazione rispetto ad α) si può vedere con un esempio concreto. I numeri (puri) α e λ sono per la Terra rispettivamente di circa 35×10^{-4} e 67×10^{-4} : se per α si prendesse un valore 100 volte maggiore (ipotesi compatibile con l'equilibrio dinamico del pianeta), conservando a λ il suo valore terrestre, allora, pur ritenendo trascurabile λ^2 , tali non sarebbero nè $\lambda\alpha$ nè $\lambda\alpha^2$.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane del pianetino Vesta.*

Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Come è noto, le osservazioni meridiane dei quattro pianetini maggiori, *Cerere*, *Pallade*, *Giunone* e *Vesta*, sono state assai raccomandate nei Congressi Astronomici a causa della loro importanza per la deduzione delle costanti fondamentali dell'Astronomia Sferica. Ed anzi, appunto per facilitare tali osservazioni, il volume *Kleine Planeten*, edito annualmente dall'Astronomisches Rechen Institut di Berlino, riporta una estesa effemeride dei quattro pianetini suddetti, calcolata di quattro in quattro giorni tenendo conto anche delle perturbazioni. Ho quindi colto l'occasione della opposizione di *Vesta* (verificatasi alla fine dello scorso agosto), per sottoporre questo pianetino ad una serie di osservazioni meridiane valendomi dell'ottimo invertibile meridiano di BAMBERG (modello grande) posseduto dal R. Osservatorio di Monte Mario.

Tale strumento è solidamente impiantato sul terreno, in apposita cabina presso il primo meridiano d'Italia (la differenza di longitudine tra il centro della cabina del BAMBERG ed il punto trigonometrico fondamentale di Monte Mario è di circa un centesimo di secondo di tempo) ed ha un cannocchiale a gomito, con obbiettivo di 88 mm. di apertura e distanza focale di 95 centimetri. Oltre ai livelli talcottiani, per le misure di latitudine, esso è provvisto di una livella assiale per le osservazioni di tempo avente per divisione il valore 0^s,085.

2. — Tutte le osservazioni sono state eseguite mantenendo il campo illuminato ed i fili oscuri ed invertendo lo strumento durante ogni passaggio. Più particolarmente, essendo il micrometro composto di 15 fili orari suddivisi in tre gruppi di 5, ho osservato il passaggio delle stelle, o del pianetino, al primo gruppo; quindi invertivo lo strumento e riosservavo il passaggio allo stesso gruppo di fili. Ogni osservazione si fonda quindi su dieci appulsi.

Per le registrazioni, mi sono servita di un cronografo a tasto e punta incidente di CAVIGNATO, collegato elettricamente ad un pendolo side-

(¹) Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XX.

rale ad asta di metallo « invar » della Casa Riefler. Per le correzioni Δt dell'orologio, mi sono giovata della nota formola di MAYER

$$[1] \quad \alpha = t_{\text{oss.}} + \Delta t + a \sin z \sec \delta + i \cos z \sec \delta$$

dove ovviamente, a causa dell'inversione dello strumento, non compare più il coefficiente di collimazione. Inutile aggiungere che, sia l'azimut a , sia l'inclinazione i , erano sempre mantenuti piccolissimi, arrivando raramente il primo a $0^s,90$ e la seconda a $0^s,10$.

3. — Essendo la posizione di *Vesta* fortemente australe ($\delta = -25^\circ$), ho adoperato come stelle di confronto (desunte dal « Berliner Astronomisches Jahrbuch ») quelle date dalla seguente

TABELLA I.
Stelle fondamentali.

*	Nome	$\alpha_{1942,0}$	$\delta_{1912,0}$	*	Nome	$\alpha_{1912,0}$	$\delta_{1912,0}$
1	α Sgr	18h51m40s,16	— 26°22'	6	ν Cap	20h36m44s,99	— 18°20'
2	π Sgr	19 6 18,91	— 21 7	7	ν Aqr	21 6 26,16	— 11 36
3	52 Sgr	19 33 10,75	— 25 0	8	ξ Cap	21 23 21,54	— 22 39
4	62 Sgr	19 59 5,66	— 27 52	9	δ Cap	21 43 50,50	— 16 23
5	β Cap	20 17 45,23	— 14 57				

Inoltre, osservavo sempre una e talvolta due circumpolari, per la determinazione del coefficiente azimutale.

In tal modo ho ottenuto la seguente

TABELLA II.
Correzioni dell'orologio.

Data	*	Δt	Data	*	Δt
1942			1942		
Settembre 9	1,3,4,7,8	— 3s,92	Ottobre 2	3,4,6	+ 14s,97
11	2,5,7,8	— 1,51	4	4,6,7	+ 16,46
13	3,4,6,7,8	+ 0,27	5	4,7,9	+ 17,18
14	4,5,6,8	+ 1,30	6	3,4,6,7	+ 18,05
15	4,5,7	+ 2,25	8	4,6,7	+ 19,43
17	4,5,6	+ 4,06	9	6,7,8	+ 19,98
20	1,5,7	+ 5,77	10	4,6,7,9	+ 20,68
23	5,6,7,8	+ 8,58			
24	5,7,8	+ 9,72			

4. — Ciò posto, riporto nella seguente tabella i risultati delle mie osservazioni meridiane di *Vesta*. Le varie colonne danno successivamente: il passaggio di *Vesta* al meridiano di Monte Mario espresso in frazione di giorno e tempo universale (T. U.), il tempo siderale indicato dal pendolo RIEFLER al momento del passaggio al meridiano, la correzione Δt dell'orologio, la correzione complessiva C dovuta all'azimut ed all'inclinazione dello strumento meridiano di BAMBERG (calcolate secondo la formola di MAYER poco anzi ricordata) ed infine l'ascensione retta α osservata per VESTA.

TABELLA III.

Ascensioni Rette di Vesta.

Data T. U. 1942	T_s	Δt	C	α
Sett. 9,8367	20h 7m 40s,35	— 3s,92	— 0s,05	20h 7m 36s,38
11,8313	42 ,63	— 1 ,51	— 0 ,06	41 ,06
13,8260	54 ,06	+ 0 ,27	— 0 ,10	54 ,23
14,8233	8 2 ,33	+ 1 ,30	— 0 ,15	8 3 ,48
15,8207	12 ,73	+ 2 ,25	— 0 ,15	14 ,83
17,8157	39 ,10	+ 4 ,06	— 0 ,01	43 ,15
20,8081	9 35 ,85	+ 5 ,77	— 1 ,77	9 39 ,85
23,8007	10 45 ,97	+ 8 ,58	— 1 ,99	52 ,56
24,7943	11 12 ,98	+ 9 ,72	— 2 ,00	10 20 ,70
Ott. 2,7798	15 49 ,33	+ 14 ,97	— 0 ,96	16 3 ,34
4,7752	17 14 ,37	+ 16 ,46	— 1 ,10	17 29 ,73
5,7730	59 ,24	+ 17 ,18	— 1 ,09	18 15 ,33
6,7708	18 45 ,01	+ 18 ,05	— 0 ,76	19 2 ,30
8,7666	20 21 ,68	+ 19 ,43	— 0 ,20	20 40 ,91
9,7644	21 12 ,06	+ 19 ,98	— 0 ,17	21 31 ,87
10,7623	22 3 ,60	+ 20 ,68	— 0 ,20	22 24 ,08

5. — Per confrontare i risultati con le effemeridi di *Vesta*, date nel citato Annuario « Die Kleine Planeten », notiamo anzi tutto che questo annuario riporta, di quattro in quattro giorni, per le ore 0 di T. U., le posizioni vere (direzioni del raggio congiungente il centro della Terra col

pianeta) riferite all'equinozio *medio* 1942, 0. Ora, come è noto dall'astronomia, le posizioni *apparenti* di un pianeta al tempo osservato t sono identiche alle posizioni vere al tempo $t-\tau$, dove τ indica il tempo impiegato dalla luce per giungere dal pianeta a noi.

In conseguenza, ho anzi tutto calcolato i valori di $t-\tau$ con l'approssimazione di un decimillesimo di giorno; ciò che è largamente sufficiente, essendo il moto apparente di Vesta, nel periodo da me osservato non superiore ad un minuto primo di tempo al giorno. Ciò fatto, ho calcolato col metodo delle interpolazioni valendomi dei dati dell'annuario « Die kleine Planeten », i valori delle ascensioni rette di Vesta per i tempi $t-\tau$ tenendo conto delle differenze prime e seconde. Infine ho aggiunto ai risultati la correzione *besseliana* $Aa + Bb$ per passare dall'equinozio medio a quello apparente e cioè per tener conto della precessione e della nutazione. In tal modo, ho ottenuto i valori calcolati delle ascensioni rette di Vesta al momento delle osservazioni, e quindi, sottraendoli da quelli da me osservati, ho avuto le differenze $O-C$.

Trovate tali differenze, poichè — come si è detto — l'annuario riporta le effemeridi di Vesta di quattro in quattro giorni, ho assunto come correzione di ciascuna data contenuta nelle effemeridi la media delle $O-C$ relative alle osservazioni eseguite nell'intervallo compreso tra -48^h e 48^h di distanza dalla data della effemeride stessa. In tal modo sono pervenuta alla seguente tabella, dove n indica il numero delle osservazioni su cui si fonda ciascun confronto.

TABELLA IV.

Confronto con le effemeridi.

Data eff.	n	$O-C$	Data eff.	n	$O-C$
Settembre 10	2	$-0^s,38$	Settembre 26	1	$-0^s,32$
14	3	$-0,23$	Ottobre 4	3	$-0,25$
18	1	$-0,34$	8	4	$-0,10$
22	2	$-0,38$			

Prendendo infine la media ponderata, ho ottenuto come differenza normale delle effemeridi di Vesta nel periodo 10 settembre–8ottobre 1942 da me esaminato:

$$O-C = -0^s,25.$$

Astronomia. — *Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osservatorio di Roma col punto fondamentale di Monte Mario* ⁽¹⁾. Nota di MASSIMO CIMINO, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

1. *Piano della triangolazione.* — La triangolazione di cui presento i risultati in questa Nota è destinata alla riduzione al punto trigonometrico fondamentale di Monte Mario dei valori della longitudine e, specialmente, della latitudine osservati ai due strumenti dei passaggi, — rispettivamente in meridiano e in primo verticale, — situati nel giardino del R. Osservatorio Astronomico di Roma. Occorreva perciò misurare con sufficiente esattezza la proiezione sul meridiano passante per il centro dell'«invertibile meridiano» M (vedi figura) e sulla direzione ad esso ortogonale delle due distanze: MT = *meridiano-punto trigonometrico fondamentale* ed MV = *meridiano-invertibile in primo verticale*.

Per due profondi avvallamenti ad est e ad ovest, il terreno si presentava a forma di striscia di circa 40 m. di larghezza utilizzabile, generalmente pianeggiante, ma assai ricco di ostacoli naturali ed artificiali; non mi è stato perciò praticamente possibile trovare una soluzione più semplice di quella che, dopo molte prove, ho in definitiva adottata.

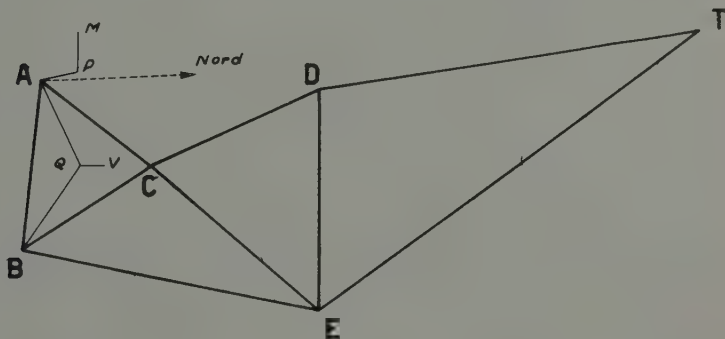
Ho pertanto fissato 6 punti fondamentali: A in prossimità di M, — che per essere, al pari dell'invertibile in primo verticale V, racchiuso in cupola non si prestava ad essere centro di stazione; — B ad est di A lungo un muretto in mattoni; C verso il centro del giardino su pilastro in mattoni; D ed E sul muro di cinta dell'Osservatorio, ricoperto da grosse lastre piane di travertino; T alla sommità della Torre sulla verticale del punto trigonometrico fondamentale. Sugli assi delle porte di accesso alle cupole ho inoltre fissato due punti ausiliari P e Q per il collegamento con gli strumenti. Tutti i punti suddetti erano individuati da sottili segni di croce incisi su pietra o su intonaco di cemento.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

I 6 punti fondamentali individuano 4 triangoli: ABC, CDE, DET, e BCE, di ciascuno dei quali mi è stato possibile misurare tutti e tre gli angoli. Avendo poi misurato i lati AB e DE, i primi tre dei suddetti triangoli vengono ad avere in tal modo ciascuno un lato misurato direttamente, cosa questa che, — unita ad una maggior cura nelle misure angolari, — compensa in gran parte la forma sfavorevole del triangolo DET. L'orientamento reciproco dei due triangoli ABC e CDE è stato determinato col misurare ambedue gli angoli $\hat{A}CD$ e $\hat{B}CE$, mentre il triangolo BCE mi è servito soltanto per un controllo reciproco della misura delle due basi.

Come strumenti ho adoperato: un teodolite reiteratore SALMOIRAGHI a 10'', con livella a cavalletto e microscopi a vite micrometrica; un teodolite ad 1' per il collegamento dei punti fondamentali coi centri degli stru-



menti; due triplometri in legno provvisti di livella, che ho successivamente tarato a mezzo di un ottimo comparatore catastale provvisto di microscopi. Le mire sono state realizzate mediante fili a piombo sostenuti da treppiedi ⁽¹⁾.

2. *Misure angolari.* — Gli angoli uscenti da ciascuno dei 6 punti fondamentali li ho misurati con 6 giri doppi (osservazioni coniugate) di orizzonte, ruotando ogni volta il cerchio azimutale di 60° e rettificando di nuovo sia lo strumento, sia la posizione delle mire, allo scopo di limitare i possibili errori sistematici. In ciascuna stazione ho così ottenuto 6 gruppi di misure degli angoli uscenti da essa: la somma per ciascun gruppo dif-

⁽¹⁾ Il teodolite a 10'' e i triplometri mi sono stati gentilmente prestati dal Laboratorio di Geodesia e Topografia della R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri di Roma. Mi è particolarmente grato rinnovare al Direttore della Scuola, prof. CICONETTI, e al suo assistente prof. AQUILINA, i miei più vivi ringraziamenti per la loro cortesia.

feriva in media dal valore di 360° per $5''-6''$. Quando si pensi che lo stesso spessore dei fili delle mire appariva sotto un angolo di $10''$, — quantità appena sensibile, corrispondente ad una divisione del tamburo della vite micrometrica, — e che i fili stessi erano inevitabilmente soggetti a lievi oscillazioni per un po' di vento o di calore, si può ritenere più che soddisfacente la precisione raggiunta nelle misure angolari. Corretto ciascun gruppo di misure mediante compensazione tra gli angoli, per ogni angolo ho così ottenuto 6 valori dei quali è stata fatta la media quale è data nella prima colonna della tabella che segue. Gli scarti dei singoli valori dalla media risultarono, in media, dell'ordine di $6''$; essi sono da attribuire prevalentemente alle successive rettifiche del teodolite e delle mire, intese appunto a limitare gli errori sistematici. Infine ho proceduto ad una compensazione tra gli angoli di uno stesso triangolo, i quali angoli debbono ritenersi ciascuno misurato in modo indipendente; l'errore di chiusura δ non supera i $5''$.

Triang.	Angoli (media)	C	Angoli (compensati)	Triang.	Angoli (media)	C	Angoli (compensati)		
ABC	\hat{A}	69°55' 50".5	+ 1".8	69°55' 52".1	CDE	\hat{C}	45°04' 16".3	— 6".5	45°04' 15".8
	\hat{B}	66 58 28 .2	+ 1 .7	66 58 29 .9		\hat{D}	75 05 35 .7	— 0 .5	75 05 35 .2
	\hat{C}	43 05 36 .3	+ 1 .7	43 05 38 .0		\hat{E}	59 50 10 .0	— 1 .0	59 50 09 .0
	δ	— 5 .2			δ	+ 2 .0			
BCE	\hat{B}	28 36 54 .5	+ 0 .3	28 36 54 .8	DET	\hat{D}	99 16 23 .3	— 1 .4	99 16 21 .9
	\hat{C}	133 07 26 .7	+ 0 .3	133 07 27 .0		\hat{E}	61 52 55 .6	— 1 .6	61 52 54 .0
	\hat{E}	18 15 37 .8	+ 0 .4	18 15 38 .2		\hat{T}	18 50 45 .5	— 1 .4	18 50 44 .1
	δ	— 1 .0			δ	+ 4 .4			

Del triangolo ACD mi è stato possibile misurare soltanto l'angolo \hat{ACD} :

$$\hat{ACD} = 138^\circ 42' 40''.7.$$

Per lo stesso angolo, desunto col sottrarre da 360° la somma degli altri 3 angoli uscenti dalla stazione C, si sarebbe ottenuto: $138^\circ 42' 39''.2$, con scarto insignificante.

3. *Misura delle basi e taratura dei triplometri.* — Ho proceduto alla misura delle due basi AB e DE col riportare a contatto l'uno dopo l'altro

due triplometri, — che indico con a e con b , — convenientemente allineati e livellati. Le piccole frazioni di triplometro in prossimità del punto terminale di ciascuna misura le ho determinate con un buon doppio decimetro. Ogni base è stata misurata 4 volte, procedendo ogni volta in senso opposto all'altra. I due triplometri sono stati poi da me tarati a mezzo di un ottimo comparatore catastale provvisto di microscopi a vite micrometrica. Per ciascuno ho eseguito 4 tarature, le prime due lungo il lato superiore le altre due lungo quello opposto. Tutte le misure sono in *millimetri*.

	Triplometri		A B		D E	
	a	b				
1	3001.2	2999.2	A \rightarrow B	$5a + 4b + 310.1$	D \rightarrow E	$7a + 7b + 36.5$
2	3001.3	2999.0	B \rightarrow A	» + 309.2	E \rightarrow D	» + 38.3
3	3001.0	2998.7	A \rightarrow B	» + 307.9	D \rightarrow E	» + 37.9
4	3001.1	2998.6	B \rightarrow A	» + 307.4	E \rightarrow D	» + 37.2
Media	3001.15	2998.87	Media	27309.9		42037.6

Il massimo scarto tra le misure della base AB è dell'ordine di $\frac{1}{10.000}$ della misura totale; inferiore è quello della base DE, ed è quanto di meglio poteva attendersi dai mezzi a disposizione. La stessa DE calcolata a partire da AB attraverso il triangolo BCE è risultata di 7 mm. maggiore, ciò che depone in favore dell'esattezza delle misure, considerando la assai sfavorevole forma del triangolo BCE.

4. *Collegamento con gli strumenti.* — Tale collegamento l'ho effettuato disponendo i triplometri a e b in AP e MP, e quello b in QV, e misurando gli angoli: \hat{PAB} , \hat{APM} , \hat{AQV} , \hat{BQV} e quelli del triangolo AQB. Per le misure angolari si è adoperato il teodolite ad 1', eseguendo ogni volta 3 coppie di misure coniugate con rettifica dello strumento e delle mire. L'incertezza in tali misure può essere valutata ad 1' *al più*.

$$\begin{aligned}
 AP &= 3001.1 \text{ mm.}; \quad \hat{PAB} = 106^{\circ} 59'.9; \quad \hat{AQV} = 131^{\circ} 37'.6; \quad \hat{A} = 45^{\circ} 58'.5 \\
 PM &= QV = 2998.9 \text{ mm.}; \quad \hat{APM} = 98^{\circ} 06'.5; \quad \hat{BQV} = 151^{\circ} 32'.7; \quad \hat{B} = 57^{\circ} 12'.2 \\
 &\quad \hat{Q} = 76^{\circ} 49'.3
 \end{aligned}$$

5. *Azimut della base AB.* — Con stazione in A ho determinato l'azimut della base AB mediante 4 coppie di osservazioni coniugate della Polare, attorno all'epoca della sua massima elongazione orientale. Prima di ogni coppia di misure ho ruotato di 90° il cerchio azimutale, rettificando ogni volta strumento e mira, realizzata quest'ultima col solito filo a piombo che si proiettava assai distintamente su una lastra di vetro smerigliato posteriormente illuminata. L'istante del puntamento è stato preso con appulso al cronografo comandato dal pendolo siderale dell'Osservatorio. Latitudine di A = $41^\circ 55' 19''$; data = 1942 settembre 2.

Cerchio	Tempo siderale	Angolo B-Polare	Azimut Polare	Azimut \overrightarrow{AB}	Azimut \overrightarrow{AB} (medie)
S	18h 01m 42s	$97^\circ 14' 11''.0$	$1^\circ 12' 59''.5$	$98^\circ 27' 10''.5$	$98^\circ 27' 16''.0$
D	18 22 17	11 23 .0	15 58 .5	27 21 .5	
D	19 00 02	07 22 .5	19 52 .1	27 14 .6	$98^\circ 27' 16''.0$
S	19 31 08	05 49 .0	21 28 .3	27 17 .3	
S	19 55 02	05 34 .5	21 41 .1	27 15 .6	$98^\circ 27' 20''.4$
D	20 17 38	06 20 .5	21 04 .7	27 25 .2	
D	20 37 18	07 38 .0	19 54 .1	27 32 .1	$98^\circ 27' 22''.9$
S	20 56 55	09 05 .5	18 08 .2	27 13 .7	

Si ha pertanto come *valore medio dell'azimut della base AB*:

$$\alpha = 98^\circ 27' 18''.8.$$

Gli scarti dalla media dei 4 valori di α misurati sono dello stesso ordine di grandezza di quelli riscontrati nella misura degli altri angoli e sono, in massima parte, da attribuire alle rettifiche del teodolite e della mira intese a limitare gli errori sistematici.

6. *Risultato finale.* — Come già detto nel § 1, nel triangolo ABC si è assunto come lato noto quello AB, e nei triangoli CDE e DET quello DE. Con la conoscenza dei due angoli \hat{ACD} e \hat{BCE} indipendentemente misurati, mi è stato perciò possibile calcolare le coordinate x_T, y_T del punto trigonometrico fondamentale T rispetto a due assi cartesiani di origine A, asse x in direzione est e asse y in direzione nord, col proiettore su di essi la spezzata ACDT e, per controllo, la ABCET. Analogamente ho ottenuto le

coordinate x_M , y_M e x_V , y_V dei centri dei due strumenti M e V, proiettando sugli stessi assi le spezzate APM e le due AQV e ABQV. Esprimendo sempre le distanze in *millimetri* si ha:

$$\begin{aligned} x_T &= -8\,022.8 & ; & & x_M &= -3\,444.6 & ; & & x_V &= +18\,915.0 \\ y_T &= +196\,283.6 & ; & & y_M &= +2\,945.1 & ; & & y_V &= +17\,350.6 \end{aligned}$$

da cui subito:

$$\begin{aligned} x_T - x_M &= -4\,578.2 & ; & & x_V - x_M &= +22\,359.6 \\ y_T - y_M &= +193\,338.5 & ; & & y_V - y_M &= +14\,405.5 \end{aligned}$$

e infine - assumendo uguale a 30849.5 mm. e a 23041.0 mm. le lunghezze degli archi di meridiano e di parallelo corrispondenti a 1" alla latitudine $41^\circ 55'$, - si ha per le *differenze di longitudine est e di latitudine tra il punto M e quelli T e V*:

$$\begin{aligned} \lambda_T - \lambda_M &= -0''.199 = -0^s.0133 & ; & & \lambda_V - \lambda_M &= +0''.970 = +0^s.0647 \\ \varphi_T - \varphi_M &= +6''.267 & ; & & \varphi_V - \varphi_M &= +0''.467 \end{aligned}$$

Per ciò che concerne infine l'incertezza del risultato lo scrivente ritiene assai poco probabile un errore di 10" in *tutti* gli angoli e di 6 mm. nelle due basi. In tali ipotesi pessimistiche e supponendo che gli errori si sommino sempre nel senso più sfavorevole, si avrebbe un'incertezza di meno di 60 mm. in $y_T - y_M$, corrispondenti a 0''.002 nella latitudine. Ma è ragionevole supporre che l'incertezza non superi i 0''.001, quantità assai inferiore agli errori usuali nelle determinazioni di latitudine ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Una mia determinazione di latitudine eseguita all'invertibile meridiano col metodo di HORREBOW-TALCOTT nel 1939 (questi « Rendiconti », ser. VII, vol. I, 1939, pp. 33-41) ha dato per il centro dello strumento il valore: $\varphi = 41^\circ 55' 18''.77 \pm 0''.017$. Applicando la riduzione al polo medio (+ 0''.074) e riducendo al punto trigonometrico fondamentale in base al risultato della presente Nota, si ottiene per la latitudine di detto punto: $\varphi = 41^\circ 55' 25''.11$. Da una discussione di alcune determinazioni eseguite da autori diversi, in prevalenza nell'anno 1905, il SILVA (*Verbali della 40^a Riunione plenaria della R. Commissione Geod. Ital.*, 1910, pp. 45-50) assegna invece il valore: $\varphi = 41^\circ 55' 25''.51$. Il divario col valore da me trovato sembra perciò indicare una diminuzione secolare nella latitudine della Torre del Primo Meridiano dell'ordine di 0''.4 in circa 35 anni. Sull'interessante questione mi propongo di ritornare più diffusamente in una prossima Nota.

Astronomia. — *Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio.* Nota II di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

RISULTATI E CONCLUSIONI.

5. — Dall'insieme delle osservazioni possiamo trarre le seguenti conclusioni:

a) *Nuovo valore del semidiametro solare medio.* — Dalle medie ponderate di tutte le osservazioni precedenti si ricava il nuovo seguente valore del raggio solare (ridotto alla distanza media):

$$R_{\odot} = 961'',38.$$

Esso è pressochè eguale alla media di quelli finora adoperati per il calcolo delle Effemeridi dagli Annuari più importanti, e cioè dal *Berliner Jahrbuch* e dall'*Almanaque Nautico* che adottano il valore $961'',50$, e dal *Nautical Almanac* e dalla *Connaissance des Temps* che adottano il valore $961'',18$.

b) *Oscillazioni e fluttuazioni del diametro solare.* — I semidiametri osservati sono stati rappresentati in un diagramma cartesiano (fig. 1), diviso in tre sezioni orizzontali, di cui la centrale riporta i valori direttamente osservati (spezzata rettilinea a tratto sottile) e quelli risultanti dalla compensazione biennale delle osservazioni (curva marcata). La sezione superiore riporta i risultati delle medie quadriennali; la inferiore dà la rappresentazione grafica dei cicli dell'attività solare quale risulta dalla frequenza delle macchie (in ordinata i numeri indici « smoothed » di Brunner ⁽²⁾).

L'esame della curva dei semidiametri osservati (sezione centrale) mostra una lenta oscillazione di ampiezza e periodo variabile, il raggio del Sole presentando nel corso delle osservazioni capitoline 5 massimi e 4 minimi, oltre a fluttuazioni intermedie di minore ampiezza. Il massimo valore fu osservato nel 1910, in cui il raggio del Sole (ridotto alla distanza

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942 XX.

⁽²⁾ W. BRUNNER, *Tables on sunspot-frequency for 1749-1938*. « Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity », 1939.

media dalla Terra) era $961'',87$ mentre il minimo fu osservato nel 1918 con il valore $960'',60$. Esiste pertanto una variazione del raggio del Sole di più che un secondo d'arco; e, poichè un secondo corrisponde sul Sole a 725 km., ne segue che il livello della fotosfera solare si eleva per circa un migliaio di chilometri per poi naturalmente ridiscendere, oscillando sempre intorno alla posizione media.

Potrebbe elevarsi il dubbio che parte almeno di tali oscillazioni sia imputabile a variazioni dell'irradiazione prodotta dall'atmosfera terrestre, specialmente dal vapor acqueo. In proposito però si deve notare: 1° che i nostri risultati sono ricavati dalle medie dei valori di tutto l'anno, onde l'altezza media del Sole sull'orizzonte è sempre la medesima nei vari anni; 2° che abbiamo proceduto ad una compensazione biennale delle osservazioni stesse, per cui è difficile ammettere che l'irradiazione cambi tanto, di anno in anno, da produrre variazioni di oltre un secondo. Aggiungiamo ancora che gli errori probabili delle medie annuali sono dell'ordine di $0'',02$, e cioè meno che $1/50$ della variazione osservata.

D'altronde, è noto che anche le recenti nozioni sulla costituzione del Sole sono favorevoli all'ipotesi di fluttuazioni della fotosfera. Il Sole deve infatti oggi considerarsi come un gigantesco globo gassoso, nel cui interno — per fenomeni subatomici non ancora bene conosciuti — si genera continuamente dell'energia, che viene poi irradiata all'esterno dando luce e calore. Ora, se la quantità di energia generata fosse sempre rigorosamente eguale a quella irradiata all'esterno, vi sarebbe completo equilibrio; ma ciò probabilmente non avviene. Si comprende dunque la possibilità che il Sole sia soggetto a continue, sebbene certamente assai piccole, dilatazioni e successive contrazioni, od, in altre parole, che il Sole sia una stella lievemente pulsante (¹).

c) *Relazioni con la frequenza delle macchie solari.* — Mettendo a raffronto queste presumibili variazioni del diametro con l'attività del Sole quale risulta dalla frequenza delle macchie (curva in basso della fig. 1), si vede che non è possibile stabilire ancora un sicuro legame tra il ciclo delle macchie e le fluttuazioni del diametro solare. Sembrerebbe che i due fenomeni siano in certo modo in discordanza di fase, onde — all'ingrosso — il Sole sarebbe più grande quando le macchie sono in minor numero e viceversa. Ma questa relazione — che concorderebbe con quanto aveva messo in luce il p. ROSA (¹) in uno studio analogo — se può essere accettabile in senso assoluto per qualcuno dei periodi osservati, come per esempio, intorno al minimo del diametro del Sole del 1917-18, a cui è corrisposto esattamente un massimo (anche elevato) delle macchie, non sembra rivestire carattere di generalità.

(¹) Cfr. G. ARMELLINI, *Astronomia e Geodesia*, Milano, Bompiani, 1941.

(¹) F. ROSA, *Studiî intorno ai diametri solari*, Roma, 1873.

SEMIDIAMETRO ORIZZONTALE OSSERVATO DEL SOLE ~

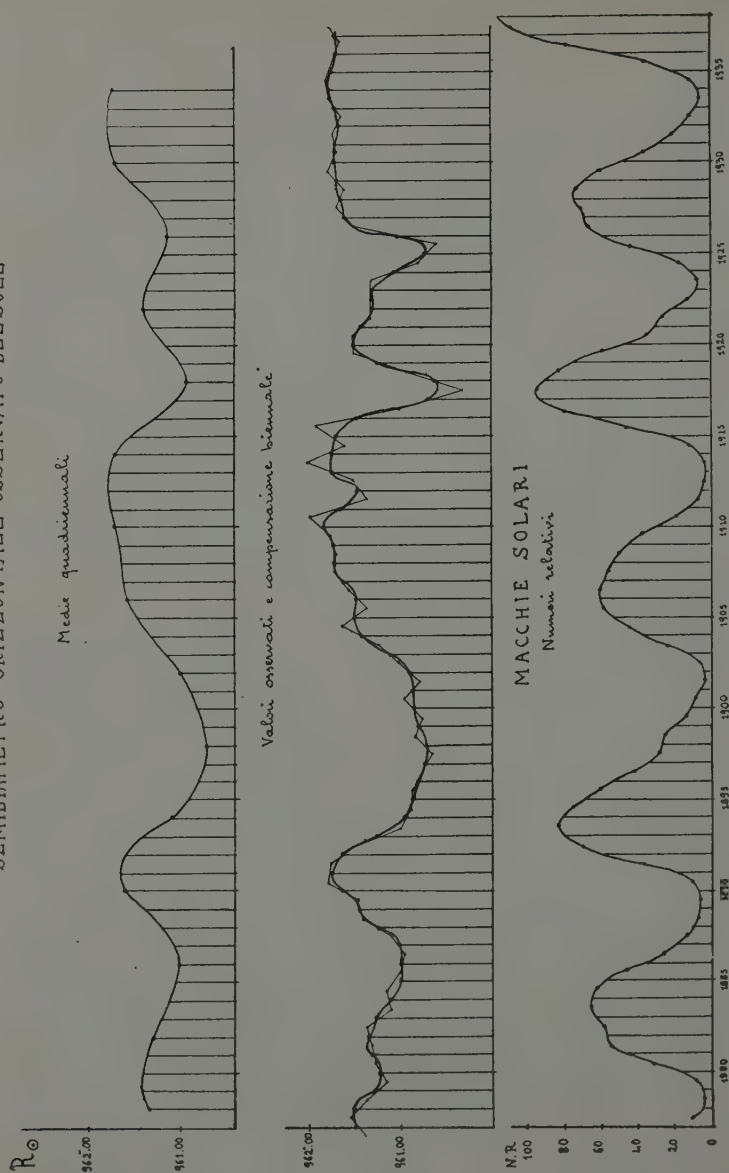


Fig. 1.

È noto, d'altra parte, che uno sfasamento col ciclo delle macchie esiste anche per le variazioni delle protuberanze; ed anzi le osservazioni di Arcetri ⁽¹⁾ e di altre specole hanno recentemente messo in luce variazioni più o meno periodiche dell'altezza della *cromosfera*, e cioè di quello strato della superficie solare esterno alla fotosfera e generalmente invisibile ad occhio nudo. E sembra ancora che siano state messe in evidenza, in questi ultimi anni, variazioni della radiazione solare sensibili ai nostri strumenti di misura. Onde ci sembra logico pensare che a tutta l'attività multiforme del Sole, che si manifesta nelle macchie, nelle protuberanze, nelle facole, nei flocculi, nella corona e nella radiazione solare, si possa connettere anche una variazione del diametro fotosferico dell'astro.

d) *Variazioni mensili e stagionali del diametro del Sole.* — Allo scopo infine, di studiare anche le variazioni dell'irradiazione nel corso dell'anno, abbiamo ricercato se esista una qualunque variazione sistematica del semidiametro del Sole in relazione alle diverse epoche dell'anno. A ciò, abbiamo dedotto da tutte le osservazioni del sessantennio, in ogni mese dell'anno, i semidiametri medi per ciascuno degli osservatori. Abbiamo poi opportunamente ricondotto tutti questi valori ad un unico omogeneo sistema, ed abbiamo ulteriormente eseguito le medie generali ponderate. Abbiamo così ottenuto la seguente

TABELLA V.

Semidiametro osservato alla distanza media. — Valori mensili.

Gennaio	961".31	Luglio	961".37
Febbraio	961 .54	Agosto	961 .41
Marzo	961 .60	Settembre.	961 .41
Aprile	961 .51	Ottobre.	961 .35
Maggio	961 .38	Novembre	961 .09
Giugno	961 .33	Dicembre	961 .10

Con questi valori abbiamo disegnato il diagramma della figura 2. Esso mostra che non sembra improbabile l'esistenza di oscillazioni stagio-

⁽¹⁾ Cfr. G. ABETTI, *Il Sole*, Milano, Hoepli, 1936; v. anche T. NICOLINI, *Variazioni di altezza della cromosfera solare*, « Acc. scienze della R. Società di Napoli », vol. XI (1940-41).

nali apparenti (cioè dovute alle variazioni dell'irradiazione) del semidiametro osservato, mostrandosi il disco del Sole più grande alla fine dell'inverno o all'inizio della primavera (febbraio-marzo), e più piccolo

SEMIDIAMETRO SOLARE OSSERVATO

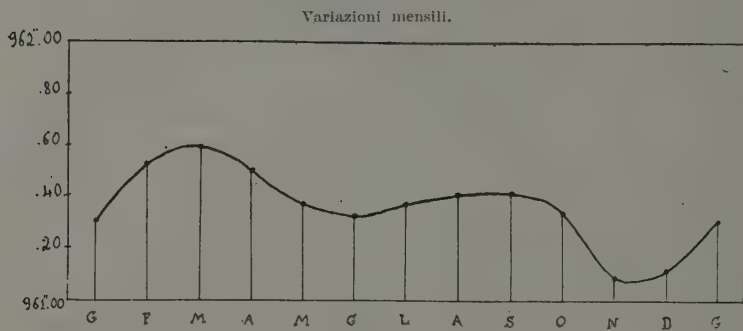


Fig. 2.

alla fine dell'autunno (novembre-dicembre), con un minimo secondario nel colmo dell'estate (giugno-luglio). L'escursione annuale è di 0,"50. Le nostre osservazioni permetterebbero quindi di dire che l'irradiazione è massima all'inizio della primavera e minima all'inizio dell'inverno.

Astronomia. — *Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari.* — IV. *Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a)* ⁽¹⁾. Nota II di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

II. INDICI DI COLORE.

Le osservazioni fotometriche in luce violetta (in media $\lambda = 4500 \text{ \AA}$) e in luce gialla (in media $\lambda = 5500 \text{ \AA}$) per le determinazioni degli indici di colore del nucleo cometario sono state da me eseguite con i medesimi procedimenti già precedentemente adoperati e dettagliatamente descritti nelle Note anteriori. Esse sono state fatte generalmente nelle stesse serate delle osservazioni fotometriche in luce normale; e i risultati sono riportati nella tabella IV, con evidente significato delle colonne.

Con i valori dell'ultima colonna di tale tabella ho costruito il diagramma della figura 1 (in alto). Il colore del nucleo di questa cometa non ha subito notevoli variazioni coll'avvicinarsi della cometa stessa al Sole; esso è oscillato tra i valori estremi dell'indice di colore $+1^m,27$ e $+0^m,67$ (ricordiamo che la nostra scala degli indici di colore coincide sensibilmente con quella internazionale o di Harvard). Il suo valore medio nel periodo delle presenti osservazioni è $+1^m,04$, ossia corrisponde all'incirca al tipo spettrale G2. Si è trattato quindi di una cometa di *tipo solare*, secondo la nota classificazione di BOBROVNIKOFF.

Ma, anche se non si sono avute grandi variazioni nell'indice di colore, come mi era accaduto di osservare in altre comete, le oscillazioni osservate vanno considerate come reali variazioni del colore del nucleo cometario, a cui certamente saranno corrisposte variazioni nello spettro. L'interesse particolare di queste ricerche risiede — oltre nell'aver messo in evidenza tali variazioni dell'indice di colore — principalmente nell'averle potuto mettere in relazione con le corrispondenti variazioni della luminosità integrale del nucleo stesso.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario).

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 5 giugno 1942-XX.

TABELLA IV.

Indici di colore del nucleo della cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a).

Data 1942	t_s	T. U.	I_G	L_V	$I_G - L_V$	K	Stelle di confronto	O
Febbraio 13	7h30m	21h05m	34.48	28.68	5.80	0m.208	19-20-21	+ 1m.21
15	7 25	20 50	34.39	27.83	6.56	0 .193	20-21	1 .27
Marzo 4	8 30	20 53	36.31	30.19	6.12	0 .208	19-20-21	1 .27
5	7 32	19 50	42.46	37.20	5.26	0 .218	19-21	1 .15
7	8 55	21 05	38.57	34.88	3.69	0 .268	11-12-16-17	0 .99
9	7 57	20 00	34.98	32.25	2.73	0 .253	6-7-8-9-10	0 .67
11	8 10	20 02	40.44	37.15	3.29	0 .273	11-12-13-16	0 .90
12	8 22	20 15	38.63	35.11	3.52	0 .273	11-12-13-16	0 .96
14	8 39	20 20	40.42	37.00	3.42	0 .273	11-12-13-16	0 .93
15	9 27	21 05	34.79	30.61	4.18	0 .255	14-17	1 .06
16	8 45	20 22	38.13	35.29	2.84	0 .253	6-7-8-9-10	0 .72
19	9 55	20 30	37.04	33.83	3.21	0 .273	11-12-13-16	0 .88
20	9 55	20 25	38.43	35.41	3.02	0 .273	11-12-13-16	0 .82
24	8 37	19 40	36.09	32.27	3.82	0 .267	11-12-13-14-16-17	1 .02
25	8 35	19 35	37.75	33.21	4.54	0 .250	14-15-16-17-18	1 .13
31	9 14	19 50	29.62	24.93	4.69	0 .250	14-15-16-17-18	1 .17
Aprile 2	9 05	19 35	35.15	29.87	5.28	0 .218	19-21	1 .15
3	9 29	19 46	35.20	30.57	4.63	0 .250	14-15-16-17-18	1 .16
4	9 00	19 20	35.70	30.24	5.46	0 .208	19-20-21	1 .16
6	9 31	19 36	34.84	31.36	3.48	0 .273	11-12-13-16	0 .95
9	9 27	19 25	40.46	36.50	3.96	0 .267	11-12-13-14-16-17	1 .06
10	9 25	19 23	35.70	30.71	4.99	0 .230	15-18-19	1 .15
11	9 48	19 40	32.00	27.06	4.94	0 .230	15-18-19	1 .13
12	9 20	19 10	33.09	28.93	4.16	0 .255	14-17	1 .06
13	9 35	19 20	39.56	33.20	6.36	0 .193	20-21	1 .24
20	10 10	19 30	30.50	26.90	3.60	0 .263	11-12-13-16	0 .95

Anche in questa cometa, come già avevo fatto rilevare per la precedente di *Van Gent-Bernasconi*, le relazioni tra il colore e la luminosità del nucleo non sono casuali o irregolari, ma obbediscono in certo modo a determinate leggi, che si scorgono con sufficiente evidenza nell'esame delle curve che rappresentano i due fenomeni. Si può notare, infatti, che per tutto il periodo che va dal tempo della scoperta (13 febbraio) fino al 10 aprile circa le variazioni del colore si sono prodotte in senso rigorosamente contrario alle variazioni di luminosità, cioè in modo che ad una diminuzione dell'indice di colore è corrisposto sempre ed esattamente

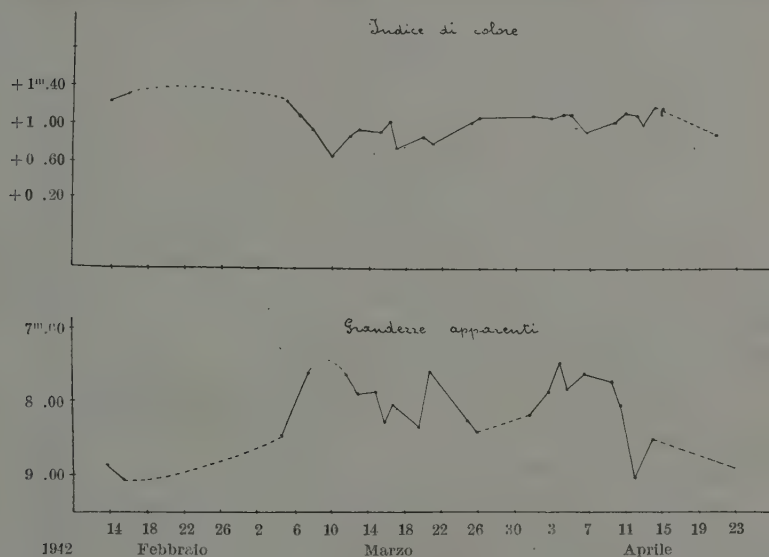


Fig. 1. — Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a). — Grandezze apparenti e indice di colore del nucleo.

una diminuzione della grandezza e viceversa. Le due curve sono, prescindendo dalla diversità di scala, come l'immagine speculare l'una dell'altra, con un accordo che non può non sorprendere. Dal 10 aprile in poi questa relazione è invece completamente invertita, cioè in corrispondenza dell'aumento di splendore (diminuzione della grandezza apparente) si è avuto una diminuzione dell'indice di colore, e viceversa. E mi duole veramente che il rapido avvicinarsi della cometa al Sole anche sulla sfera celeste mi abbia impedito le ulteriori osservazioni nell'intorno del perielio, quando si sarebbero forse avuti i più interessanti fenomeni.

Ricordiamo che le già citate ricerche di BOBROVNIKOFF hanno mostrato che i cambiamenti che si osservano negli spettri cometari fanno

pensare che la luce solare può subire cambiamenti considerevoli nelle comete, alcune volte accompagnati da violente eruzioni. Nello spettro delle comete è notevole un cosiddetto « spettro violetto », sorta di spettro continuo — dovuto apparentemente alla luce intrinseca della cometa — che ha il massimo d'intensità a circa $\lambda = 4000 \text{ \AA}$. Tale spettro violetto è molto brillante in confronto dello spettro della luce riflessa dal Sole, quando la cometa è più lontana di 0,7 unità astronomiche. Ed è molto probabile che aumenti di splendore quando la cometa si avvicina al Sole, ma non così rapidamente come se essa riflettesse unicamente lo spettro solare. Quando la cometa è più vicina di 0,7 u. a., la luce solare riflessa è più brillante della intrinseca; e a distanze tra 0,3–0,4 u. a. la luce intrinseca è insignificante rispetto a quella riflessa. Si nota allora la comparsa dello « spettro solare », che presenta il massimo d'intensità a circa $\lambda = 1700 \text{ \AA}$. (Notiamo, di passaggio, che questo non si accorda con l'opinione generale che quando le comete sono lontane dal Sole, esse brillano essenzialmente per la luce riflessa dal Sole). È molto probabile che si debba attribuire a fenomeni di fluorescenza l'origine di tali spettri diversi da quelli di tipo solare. Onde, in ultima analisi, le comete dipendono per la loro luminosità dal Sole, e sono da considerarsi intrinsecamente come dei « corpi neri », e i loro spettri dipendono essenzialmente dalla distanza eliocentrica, mentre altri parametri (come l'angolo di fase, ecc.) hanno soltanto una parte subordinata.

E siccome l'indice di colore è univocamente legato al tipo spettrale, è naturale pensare che anche le variazioni rilevate nell'indice di colore dei nuclei cometari non abbiano a dipendere, in linea essenziale, che dal variare della distanza eliocentrica.

Naturalmente è ancora prematuro parlare di leggi generali; ma i risultati fin qui ottenuti possono forse già autorizzare una prima formulazione di due leggi per le variazioni del colore:

I) *legge di inversione*: ad un aumento della luminosità del nucleo cometario corrisponde una diminuzione dell'indice di colore (azzurramento), e a una diminuzione della luminosità un aumento dell'indice di colore (arrossamento);

II) *legge di similitudine*: ad una diminuzione della luminosità corrisponde un aumento dell'indice di colore, e viceversa.

Infine, è interessante mettere in relazione tali leggi, e i loro mutamenti, con le variazioni delle distanze eliocentriche delle comete, nonché ricavare per ognuno dei periodi di validità di ciascuna legge il valor medio dell'indice di colore osservato, e quindi il corrispondente tipo spettrale. Le osservazioni fin qui fatte mi permettono di ottenere il seguente specchietto:

Cometa	Legge	Distanza elio- centrica (u. a.)	i. c. medio	Tipo spettrale
Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a)	I inversione	$1,47 < r < 1,70$	+1m,03	G2
	II similitudine	$r < 1,47$	(+1 ,09) ⁽¹⁾	G3
Van Gent-Bernasconi (1941 d)	I inversione	$1,25 < r < 1,55$	+0 ,66	F5
	II similitudine	$1,05 < r < 1,25$	+0 ,80	F8
Cunningham (1940 c)	I inversione ⁽²⁾	$0,60 < r < 1,25$	+0 ,85	F9
	II similitudine	$1,25 < r < 1,65$	+1 ,00	G1

⁽¹⁾ ricavato da un breve periodo di tempo, con poche osservazioni.

⁽²⁾ con qualche incertezza in alcune serate.

Pertanto, si può dire che quando la relazione passa dall'inversione alla similitudine, si ha un aumento dell'indice di colore (arrossamento). Però la dipendenza con la distanza eliocentrica non è identica per tutti i tipi di comete.

Si tratta, come abbiamo già detto, per ora soltanto di abbozzo di risultati, che sono appena appena intravisti. Le osservazioni ulteriori, che contiamo di proseguire quando ce ne sarà data l'occasione, ne forniranno più o meno la conferma.

Fisica. — *Su un metodo per la determinazione della vita media del mesone basato sugli effetti integrali di assorbimento.*
Nota ⁽¹⁾ di GILBERTO BERNARDINI e CAMILLA FESTA, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

I. INTRODUZIONE. — È noto (1) come l'assorbimento anomalo della atmosfera offra la possibilità di determinare il valore del rapporto $\tau/\mu c^2$ fra la vita media e l'energia a riposo μc^2 del mesone. Anzi fino ad oggi la massima parte delle valutazioni di τ sono state effettuate per questa via, attribuendo a μc^2 un valore intorno a 100 MeV.

Negli ultimi tempi, per rendersi indipendenti da qualunque anisotropia zenitale della radiazione cosmica, l'assorbimento anomalo è stato determinato misurando l'intensità mesonica, in una data direzione, in due stazioni a diversa altezza sul livello del mare, dopo aver compensato, nella stazione superiore, lo strato d'aria esistente fra essa e quella inferiore con un conveniente spessore di materiale denso. In queste condizioni le ipotesi necessarie per effettuare il calcolo di $\tau/\mu c^2$ sono essenzialmente le seguenti: 1^a la componente penetrante è costituita da un unico tipo di particelle instabili; 2^a queste non vengono generate in misura apprezzabile nello strato d'aria compreso fra le due stazioni; 3^a la disintegrazione spontanea del mesone avviene attraverso la creazione di un elettrone e di un neutrino; 4^a in una delle due stazioni lo spettro mesonico è noto.

In base ai dati di cui attualmente si dispone, la prima ipotesi sembra attendibile; però attraverso le misure di assorbimento, le osservazioni in camera di Wilson, le misure di ionizzazione ecc., oggi note, non si può escludere che la radiazione corpuscolare penetrante possa essere in realtà costituita da una mescolanza di particelle diverse, aventi masse considerevolmente superiori a quella dell'elettrone. La seconda ipotesi, certo non vera negli alti strati dell'atmosfera dove vengono generati la massima parte dei mesoni, sembra assai verosimile per le altezze, fra il livello del

(¹) Pervenuta all'Accademia il 15 ottobre 1942-XX.

mare e i 4000 m., a cui si è generalmente sperimentato nelle misure di assorbimento anomalo. Effettivamente ricerche eseguite da vari autori (2) indicano che i mesoni non sono generati in misura apprezzabile al disotto dei $6 \div 5000$ m. di altezza. Veramente queste ricerche escludono solo che una tale generazione avvenga da parte di una radiazione *non ionizzante*; però, come ha recentemente mostrato FERRETTI (3), la radiazione positiva che dà probabilmente origine (4) al processo attraverso il quale si generano i mesoni, deve essere fortemente assorbita nel processo stesso e non deve perciò giungere, in misura apprezzabile, al livello del mare.

La terza ipotesi è in primo luogo convalidata dalle belle fotografie di WILLIAMS. Esse non sono sufficienti a dimostrare che tutte le particelle costituenti la componente penetrante si comportano nello stesso modo, ma indicano, nei raggi cosmici, la presenza di processi attraverso i quali particelle di massa considerevolmente più elevata di quella di un elettrone si annichilano per dare origine a un elettrone e contemporaneamente a un'altra particella *non ionizzante*. Le recenti esperienze di RASETTI (5), AUGER, MAZE e CHAMINADE (6) mostrano poi, in modo diretto, l'esistenza del processo disintegrativo dei mesoni e degli elettroni di disintegrazione. Queste esperienze non consentono però di stabilire il rendimento di questo processo con una approssimazione sufficiente. Secondo RASETTI questo rendimento, cioè il numero dei mesoni di cui si osserva l'elettrone di disintegrazione rispetto a quelli che finiscono il loro percorso nel materiale posto come schermo assorbente, è di circa il 50 %; secondo AUGER e collaboratori è di circa il 100 %.

Infine circa la quarta ipotesi si deve dire che al livello del mare lo spettro mesonico non è conosciuto con sufficiente approssimazione. Infatti le belle misure di BLACKETT e BRODE (7) e di JONES (8) si riferiscono a qualche migliaio di tracce e sono particolarmente incerte proprio verso la zona delle basse energie, che è quella che più interessa agli effetti della disintegrazione; analogamente le esperienze di EHMERT (9) possono dare delle informazioni precise solo per le energie più elevate.

Perciò, recentemente, si è cercato di eludere la necessità di introdurre delle ipotesi circa la forma di questo spettro; si sono cioè effettuate delle misure di assorbimento anomalo prendendo in considerazione solo mesoni le cui penetrazioni fossero comprese entro determinati intervalli sufficientemente piccoli. Queste misure, per il loro carattere, si dicono *differenziali*, mentre quelle che si estendono su tutto lo spettro mesonico prendono il nome di misure *integrali*.

Le misure differenziali di assorbimento anomalo che ci sono note sono quelle di ROSSI e HALL (10), NIELSEN, RYERSON, NORDHEIM e MORGAN (11) e CACCIAPUOTI e PICCIONI (12) oltre quelle riassunte e discusse, insieme alle precedenti, nella Nota recentemente pubblicata da BERNARDINI, CACCIAPUOTI, PANCINI e PICCIONI (13).

In questa Nota è stata sottolineata la notevole incertezza che ancora sussiste circa il valore di $\tau/\mu c^2$ deducibile dalle esperienze di assorbimento anomalo e sono state poste in evidenza le difficoltà che si incontrano nell'eseguire e discutere certe esperienze. Ci sembra perciò di un certo interesse l'esporre una valutazione del rapporto $\tau/\mu c^2$, basata sugli effetti integrali di assorbimento anomalo e pur tuttavia *indipendente* da particolari ipotesi circa la forma dello spettro mesonico. Essa ha anche il vantaggio non indifferente di utilizzare delle normali curve di assorbimento, ossia dei dati sperimentali che, per la loro semplicità, appaiano particolarmente attendibili.

2. PRINCIPIO DEL METODO. — Supponiamo di aver eseguito delle misure di assorbimento della componente mesonica, per esempio, in piombo, in una stazione ove sia h la pressione misurata in gr/cm^2 . Supponiamo anche che la curva di assorbimento si estenda fino ad energie assai elevate; per esempio, fino a valori sensibilmente superiori a quello dell'energia che i mesoni perdono, per ionizzazione, nel superare il dislivello fra la stazione considerata e il livello del mare: Ammettendo di eseguire le osservazioni con uno dei consueti telescopi di contatori in coincidenza, sia E_ξ l'energia di un mesone la cui penetrazione è di $\xi \text{ gr/cm}^2$ di piombo. Allora il numero delle coincidenze dovute a mesoni, che si registra al livello h , con uno spessore ξ interposto fra i contatori del telescopio è, a meno di un fattore di normalizzazione:

$$[1] \quad N_h(E_\xi) = \int_{E_\xi}^{\infty} f_h(E) dE$$

se $f_h(E)$ è la funzione di distribuzione dello spettro mesonico al livello h .

Se ora, facendo stazione ad una profondità di $x \text{ gr/cm}^2$ rispetto ad h , si misura nuovamente, con lo stesso telescopio e lo stesso spessore ξ interposto fra i contatori, il numero delle coincidenze dovuto a mesoni, si deve trovare che esso è:

$$[2] \quad N_{h+x}(E_\xi) = \int_{E_\xi + jx}^{\infty} f_h(E) w_h(E, x) dE$$

dove j è la perdita media di energia per gr/cm^2 di aria dovuta alla ionizzazione e $w_h(E, x)$ la probabilità che ha un mesone, la cui energia al livello h è E , di arrivare, senza *disintegrarsi*, al livello $h + x$.

Ma dalla [1] si ha che:

$$f_h(E) = - \frac{\partial N_h(E)}{\partial E}$$

e quindi sostituendo nella [2] segue:

$$[3] \quad N_{h+x}(E_{\xi}) = - \int_{E_{\xi} + jx}^{\infty} \frac{\partial N_h(E)}{\partial E} w_h(E, x) dE.$$

Supponiamo ora che nella stazione superiore la curva di assorbimento si estenda fino ad uno spessore massimo ξ^* allora, integrando per parti, potremo scrivere:

$$[4] \quad N_{h+x}(E_{\xi}) = N_h(E_{\xi} + jx) w_h(E_{\xi} + jx, x) - N_h(E_{\xi}^*) w_h(E_{\xi}^*) + \\ + \int_{E_{\xi} + jx}^{E_{\xi}^*} N_h(E) \frac{\partial w_h(E, x)}{\partial E} dE + \int_{E_{\xi}^*}^{\infty} f_h(E) w_h(E, x) dE.$$

In questa espressione solo l'ultimo integrale contiene lo spettro mesonico incognito; gli altri termini sono direttamente calcolabili in base ai dati sperimentali allorchè sia nota la funzione $w_h(E, x)$. Si riconosce però immediatamente che questo integrale esprime il numero N_{h+x}^* delle coincidenze registrabili nella stazione inferiore quando nel telescopio si interponga, fra i contatori, un filtro di piombo il cui spessore sia tale da assorbire i mesoni aventi una energia $E \leq E_{\xi}^* - jx$. Questo numero può essere quindi fornito direttamente dalle osservazioni sperimentali.

La funzione $w_h(E, x)$ si deduce facilmente (vedi EULER e HEISENBERG, loc. cit.) dalle ipotesi 1^a, 2^a e 3^a del precedente paragrafo quando si ammetta ulteriormente che le perdite di energia dei mesoni, dovute alla ionizzazione, siano costanti lungo il loro percorso. Indicando ancora con j queste perdite di energia riferite a uno spessore di un gr/cm^2 , con H l'altezza ridotta dall'atmosfera (fornita dalle pressioni misurate nella stazione h ed in quella $h+x$ e dal dislivello in metri esistenti fra queste due stazioni) e con E l'energia di un mesone nella stazione superiore, si ha

$$[5] \quad w_h(E, x) = \left\{ \frac{h(E-jx)}{(h+x)E} \right\}^{\frac{\mu c^2}{\tau} \frac{H}{c(E+jh)}}$$

e quindi

$$[6] \quad \frac{\partial w_h(E, x)}{\partial E} = \frac{\mu c^2}{\tau} \frac{H}{c(E+jh)} \left\{ \frac{1}{E+jh} \log \frac{(h+x)E}{h(E-jx)} + \frac{jx}{E(E-jx)} \right\} w_h(E, x).$$

Sostituendo nella [4] si ottiene un'equazione nell'incognita $\tau/\mu c^2$. Se, come abbiamo detto, nella stazione superiore si è determinata, con notevole precisione, la curva di assorbimento della radiazione mesonica e in particolare sono noti i valori di $N_h(E_{\xi} + jx)$ e di $N_h(E_{\xi})$ e corrispondentemente nella stazione inferiore il valore di $N_{h+x}(E_{\xi})$ e di N_{h+x}^* , la [4] consente senz'altro di determinare il valore di $\tau/\mu c^2$. Se poi, anche

nella stazione inferiore si sono effettuate delle misure sufficientemente complete, ossia se si dispone di vari valori di $N_{h+x}(E_g)$, si può scrivere un sistema di equazioni e dedurre da esse il valore più attendibile di $\tau/\mu c^2$ per esempio, col metodo dei minimi quadrati.

Altrimenti si può procedere per tentativi, calcolando, per mezzo della [4], le curve di assorbimento prevedibili nella stazione inferiore, quando si attribuiscono a $\tau/\mu c^2$ diversi valori, ed esaminando poi quali di queste curve meglio si adatta ai punti sperimentali.

Questo ultimo modo di procedere ha dei vantaggi di semplicità rispetto a quello dei minimi quadrati e consente una maggior possibilità di confronti fra i risultati sperimentali e quelli del calcolo; non si presta però ad una valutazione precisa dell'errore da cui viene a essere in definitiva affetto il valore più attendibile di $\tau/\mu c^2$. Poichè a noi interessava stabilire anche un confronto con misure effettuate da altri autori, abbiamo tuttavia preferito questo secondo modo a quello dei minimi quadrati.

3. I DATI SPERIMENTALI. — Le curve di assorbimento della componente mesonica furono determinate, con sufficiente precisione, a Pian Rosà (3480 m. s. l. m.) a Cervinia (2060 m.) e a Roma (60 m.); come materiale assorbente fu utilizzato il piombo.

Il telescopio di contatori, in coincidenze quadruple, era quello già descritto nella Nota di Bernardini ecc. (loc. cit.). I contatori del telescopio erano protetti lateralmente da blocchi di piombo di 10 cm. di spessore in modo da eliminare ogni influenza degli sciami laterali e dei grandi sciami. I risultati delle misure (già parzialmente pubblicati nel lavoro ora citato) sono riassunti nelle seguenti tabelle.

TABELLA I (Pian Rosà).

Pb in cm.	10	15	30	50	65	85
coinc/ora . . .	$606 \pm 6,4$	574 ± 11	$472,9 \pm 4,6$	$405,8 \pm 3,5$	$342,0 \pm 3,2$	$304,1 \pm 2,2$

TABELLA II (Cervinia).

Pb in cm.	15	35	50	70
coinc/ora	$400,2 \pm 3,1$	$343,2 \pm 3,0$	$307,1 \pm 2,6$	$268,1 \pm 2,1$

TABELLA III (Roma).

Pb in cm.		10	15	35	50
coinc/ora	I serie	280 ± 4	$271,4 \pm 1,5$	$248,4 \pm 1,3$	
	II serie		$278 \pm 3,7$	$243 \pm 3,2$	$220 \pm 4,1$

Nella figura 1 questi risultati sono rappresentati graficamente. In ordinate sono riportati i valori delle coincidenze quaduple all'ora, osservate rispettivamente a Pian Rosà (curva I) a Cervinia (curva II) e a Roma (curva III); in ascisse sono gli spessori di aria e di piombo globalmente attraversati dai mesoni a partire dalla stazione più elevata (quando il telescopio è privo di ogni schermo assorbente). Nella rappresentazione gli strati di aria esistenti fra stazione e stazione, sono ridotti a spessori di piombo equivalenti agli effetti delle perdite di energia per ionizzazione. Per effettuare questa riduzione ci siamo valse dei calcoli effettuati da WICK (14) e particolarmente del comodo nomogramma pubblicato da questo autore.

Nella figura 1, insieme ai nostri risultati, sono riportati anche quelli che si sono potuti dedurre dalle misure di SITTKUS (15), di CLAY e VAN GERMERT (16) e di altri autori (17), per quanto riguarda la curva di assorbimento a Roma, cioè al livello del mare; quelli di COCCONI e TONGIORGI (18) per quanto riguarda la curva di Cervinia, cioè a circa 2000 m. di altezza; e infine quelli di BERNARDINI e CACCIAPUOTI (19) per quanto riguarda le curve a Pian Rosà e a Roma e il confronto delle due. Naturalmente nel riportare i dati dei vari autori si sono moltiplicati i dati stessi per opportuni fattori di riduzione.

Come si vede l'accordo fra le varie misure, che sono le più recenti e le più attendibili di cui si dispone, non potrebbe essere migliore e permette di tracciare, con una certa sicurezza le curve di assorbimento della componente mesonica sia a Roma come a Cervinia. La curva a Pian Rosà potrebbe esser confrontata (oltre che con le misure di BERNARDINI e CACCIAPUOTI) con quelle di AUGER, LEPRINCE-RINGUET e EHRENFEST (20) alla Jungfrau e con quelle di WOODWARD e STREET (21) a Echo Lake, ma le une come le altre, eseguite qualche anno fa, quando ancora la tecnica dei contatori di GEIGER e delle registrazioni di coincidenze non era troppo progredita, non sembrano sufficientemente attendibili.

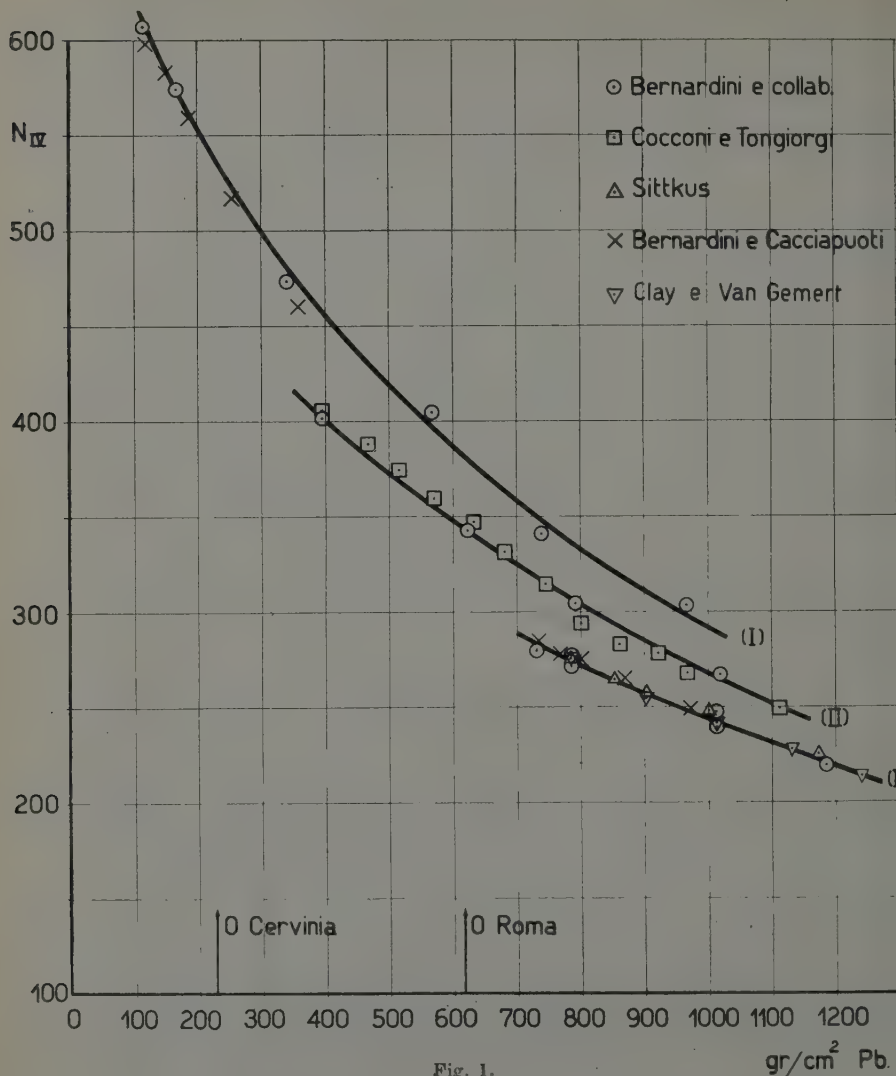


Fig. 1.

4. I RISULTATI DEL CALCOLO. - Coi dati sperimentali di cui al precedente paragrafo è possibile applicare il metodo indicato nel § 2, alla curva di assorbimento di Pian Rosà assumendo come stazione inferiore Cervinia. La curva di Pian Rosà si estende infatti fino a penetra-

zioni davvero rilevanti (circa 1 m. di piombo) e allo schermo massimo utilizzato a Pian Rosà corrisponde a Cervinia un valore di N_{h+x}^* determinato con notevole precisione. Questo valore di N_{h+x}^* si deduce infatti direttamente dalla figura 1, abbassando dal punto della curva di Pian Rosà relativo allo schermo di 1020 gr/cm² la verticale fino alla curva di assorbimento di Cervinia. Il punto di questa curva che si trova sull'intersezione è il valore cercato di N_{h+x}^* . Si trova $N_{h+x}^* = 267$.

Si conoscono allora tutti i dati sperimentali che occorrono per utilizzare la formula [4]. Il calcolo è stato eseguito per sei valori di $N_{h+x}^*(E_{\xi})$ e precisamente per i seguenti valori di:

$$\xi = 85, \quad 170, \quad 340, \quad 510, \quad 680 \text{ gr/cm}^2$$

e per quattro valori di $\tau/\mu c^2$, cioè per $\tau/\mu c^2$ rispettivamente uguale a 1, 2, 3 e $4 \cdot 10^{-8}$ sec/MeV.

Si sono così ottenute per punti quattro curve teoriche le quali sono state confrontate con i punti sperimentali, come è indicato nella figura 2.

Il confronto mostra come la curva corrispondente al valore $\tau/\mu c^2 = 3 \cdot 10^{-8}$ sia quella che meglio si adatta ai valori sperimentali.

Analogamente si è proceduto per un confronto fra Cervinia e Roma utilizzando, come curva sperimentale di assorbimento a Cervinia, la curva II della figura 1. Si trova ancora che la curva calcolata, che meglio si adatta ai valori sperimentali, è quella cui corrisponde il valore $\tau/\mu c^2 = 3 \cdot 10^{-8}$.

Si può ora fare la seguente osservazione. La disintegrazione mesonica influenza essenzialmente la parte più molle dello spettro ed è quindi dalla parte delle basse energie (da circa 10^9 e. V. in giù) che è importante rendersi indipendenti da ogni ipotesi arbitraria circa la forma dello spettro stesso. Ciò è tanto più necessario in quanto al di sotto dei 500 M. E. V. le osservazioni eseguite con camera di WILSON sono scarse e difficili per la presenza della componente molle.

Invece verso le alte energie nei riguardi di un calcolo intorno agli effetti integrali di un assorbimento anomalo, lo spettro mesonico si può ritenere conosciuto con sufficiente approssimazione e questo sia per le osservazioni in camera di WILSON (BLACKETT e BRODE (7), JONES (8)) sia per quanto si può dedurre dalle belle misure di EHMERT (loc. cit.).

Sulla base di queste misure e nell'ipotesi che il valore $\tau/\mu c^2$ si aggiri intorno a $3 \cdot 10^{-8}$, WICK ha per esempio calcolato la forma dello spettro mesonico al livello del mare e a 4000 m. e questi due spettri si accordano assai bene con i dati sperimentali oltre che, naturalmente, con la curva di EHMERT. In particolare in base ai calcoli di WICK è possibile valutare uno spettro mesonico all'altezza di Pian Rosà, il quale dà una curva di assorbimento nel piombo in ottimo accordo con quella da noi trovata sperimentalmente.

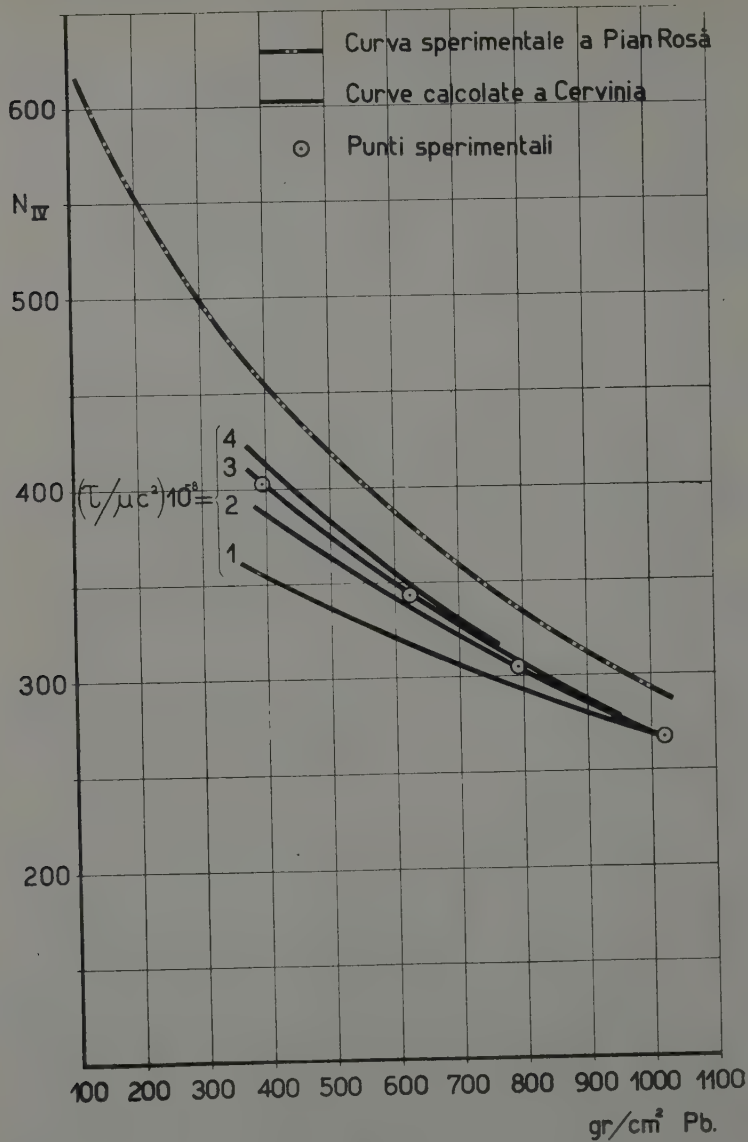


Fig. 2.

Si è ritenuto allora opportuno ripetere i calcoli di cui sopra assumendo per $\tau/\mu c^2$, al solito i valori, 1, 2, 3 e $4 \cdot 10^{-8}$, ma calcolando poi, con lo spettro ora detto, anche il valore dell'integrale $\int_{E_{\gamma}^*}^{\infty} f_h(E) w_h(E, x) dE$,

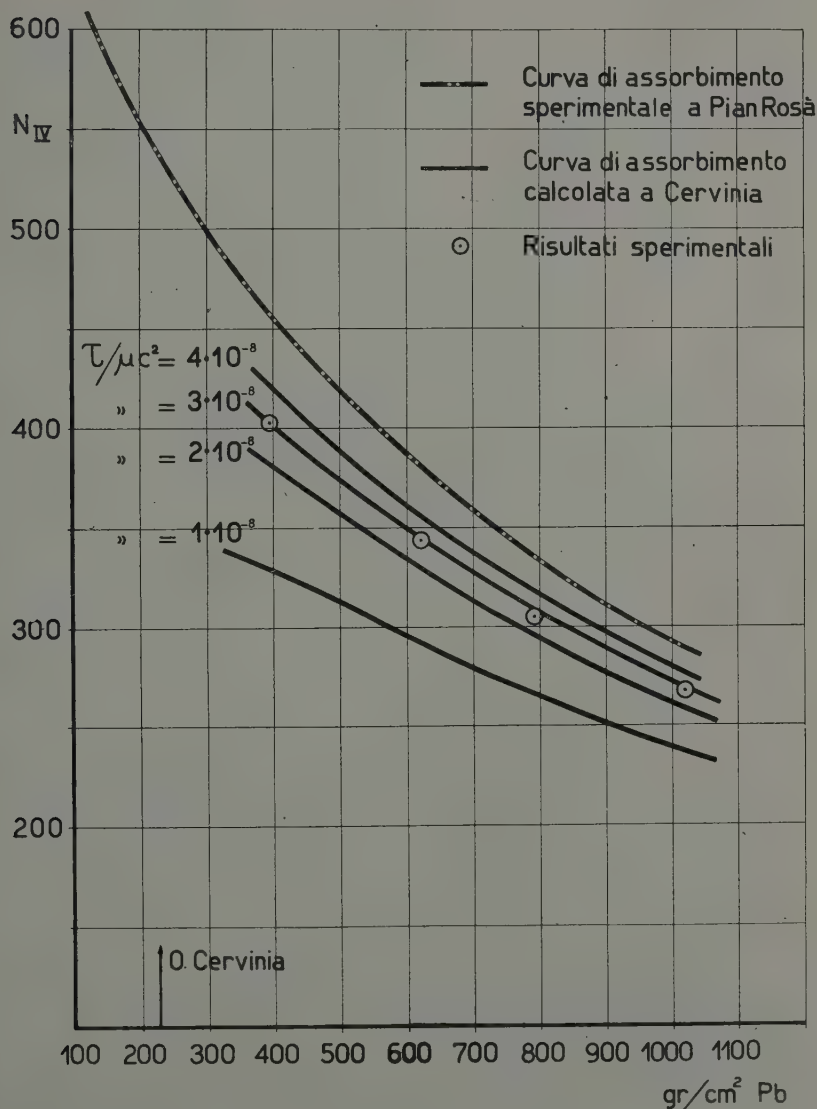


Fig. 3.

che compare nella [4], in luogo di assumerlo direttamente dall'esperienza. Ciò offre il vantaggio di mostrare con maggior evidenza e completezza la varia influenza della disintegrazione, in funzione dei vari valori di $\tau/\mu c^2$, su tutto lo spettro mesonico.

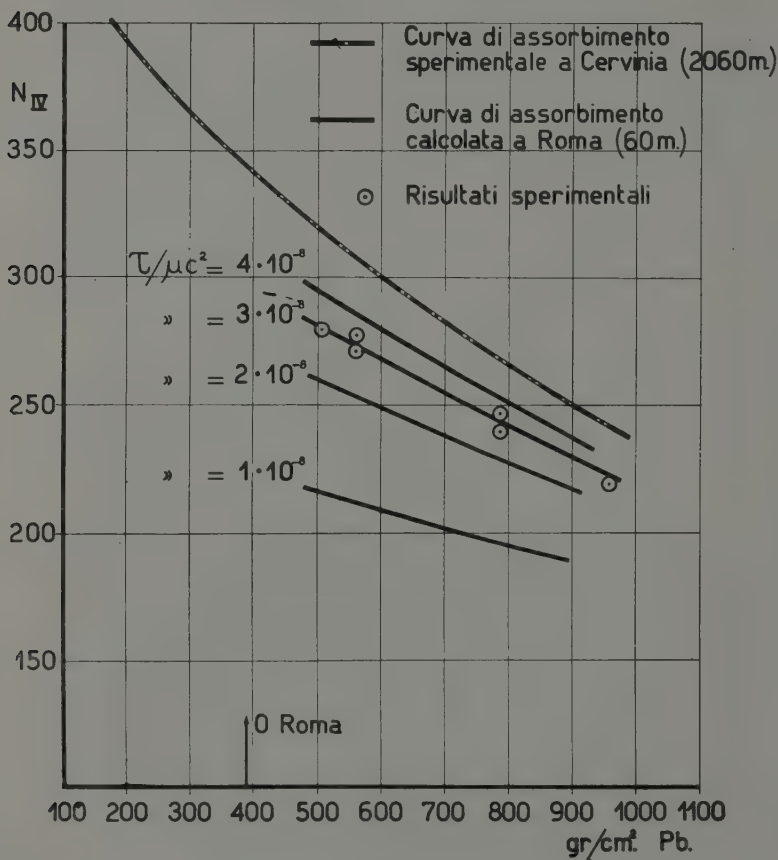


Fig. 4.

Nelle figure 3 e 4 sono dati i risultati di questi calcoli rispettivamente per il confronto fra Pian Rosà e Cervinia e fra Cervinia e Roma. Con essi appare in modo ancora più convincente come il reale valore di $\tau/\mu c^2$ sia assai prossimo a $3 \cdot 10^{-8}$ sec/MeV.

Infine per integrare quanto precede si è voluto utilizzare la [4] anche per fare il confronto fra la curva di assorbimento in piombo a Pian Rosà e quella in aria fra Pian Rosà e il livello del mare. Combinando infatti le

nostre misure di intensità mesonica effettuate con lo schermo assorbente di 15 cm. di piombo, con quelle di ROSSI, HILBERRY e HOAG (loc. cit.) ottenute con uno schermo di poco diverso, si può costruire una curva di assorbimento dei mesoni in aria, fra il livello del mare e 4000 m. di altezza, notevolmente precisa.

Il calcolo è in tutto analogo a quello indicato precedentemente, solo che in questo caso nella [4] la variabile non è lo spessore ξ di piombo interposto nel telescopio, ma la profondità x rispetto al livello iniziale h .

Nella figura 5 sono riportate: la curva sperimentale di assorbimento a Pian Rosà, le curve di assorbimento in aria calcolate per i soliti valori di $\tau/\mu c^2$ e i punti sperimentali di ROSSI, HILBERRY e HOAG insieme ai nostri. Come fattore di riduzione fra i primi e i secondi si è preso il rapporto 277/315; 315 è il numero di coincidenze per ora registrate da ROSSI e collaboratori a Chicago (180 m.).

Si può allora constatare l'ottimo accordo esistente fra le misure di ROSSI e collaboratori e le nostre e quindi concludere ancora una volta che il valore di $\tau/\mu c^2$ deve essere molto vicino a $3 \cdot 10^{-8}$.

5. DISCUSSIONE ⁽¹⁾. — Secondo quanto precede, nei limiti di validità delle ipotesi 1, 2 e 3, già discusse nell'introduzione, si dovrebbe concludere che il valore di $\tau/\mu c^2$ è $3 \cdot 10^{-8}$ sec/MeV. con un errore medio *effettivo* che non può essere superiore al 10 %.

Ciò va detto non tanto per il confronto di cui alla figura 2 quanto per quelli, veramente notevoli per la loro evidenza e coerenza, di cui alle figure 3, 4, e 5. Il fatto che in questi confronti si faccia uso, per i grandi valori delle energie dei mesoni, di uno spettro mesonico calcolato in sostanza in base alle misure di EHMERT, BLACKETT e BRODE, ecc., non può far sospettare l'esistenza di errori notevoli nella nostra determinazione. Infatti queste misure consentono di stabilire la forma di questo spettro, almeno per energie comprese fra 10^9 e 10^{10} e. V., con una precisione che oscilla in media intorno al 10 % e per energie superiori ove le misure stesse perdono di significato la forma reale dello spettro ha invero poca influenza sui calcoli da noi eseguiti.

Si deve poi aggiungere che le misure di assorbimento prese come dato fondamentale in questi calcoli sono, come già fu rilevato, particolarmente semplici e attendibili e suffragate, come abbiamo visto, da numerose esperienze di altri ricercatori. Infine, in quanto ai calcoli di WICK, sui quali i nostri sono basati, dobbiamo dire che oltre a essere solidamente stabiliti dal punto di vista teorico, sono anche confermati dalle osservazioni sperimentali (25).

⁽¹⁾ Ringraziamo vivamente il prof. FERRETTI per le discussioni avute con lui circa l'argomento di questa Nota.

A sostegno del fatto che il valore medio di $\tau/\mu c^2$ sia molto prossimo a $3 \cdot 10^{-8}$ sec/MeV si possono poi portare altri argomenti.

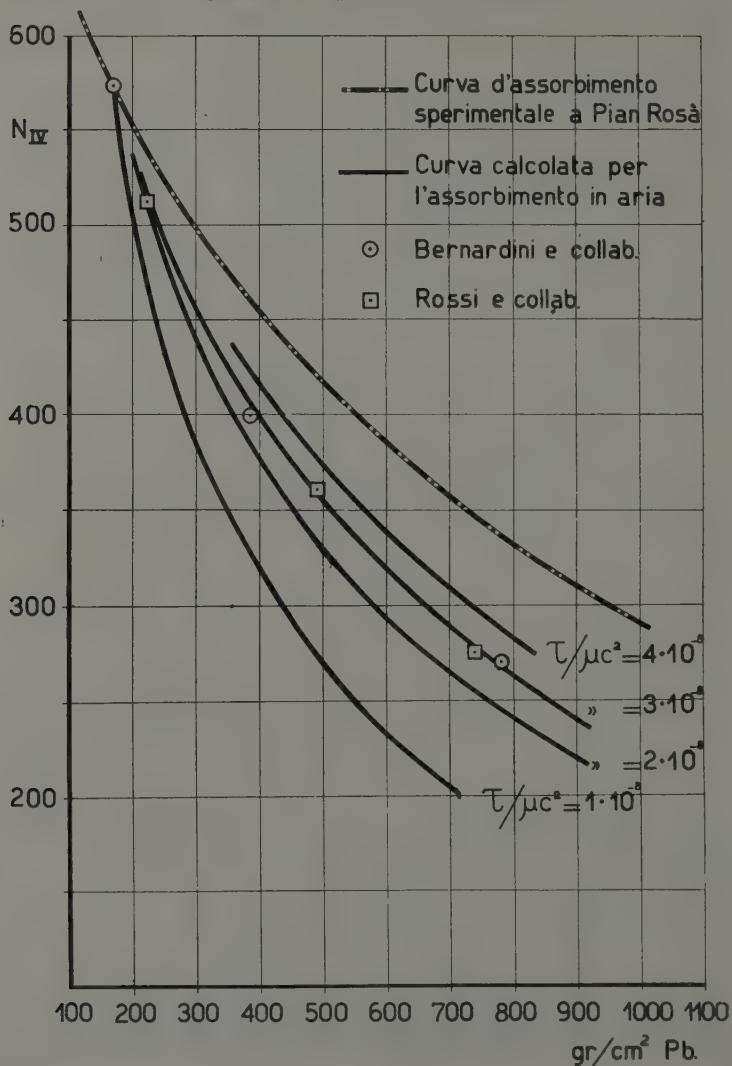


Fig. 5.

In primo luogo una rivalutazione più accurata delle correzioni da apportare alle misure eseguite, col metodo differenziale, fra Pian Rosà

e Roma, da BERNARDINI, CACCIAPUOTI, PANCINI e PICCIONI (loc. cit.) ha condotto, indipendentemente, alla stessa conclusione (vedi G. BERNARDINI, «*Zeif. f. Phys.*» in corso di stampa). Analogamente $3 \cdot 10^{-8}$ è il valore trovato da ROSSI e HALL nelle loro accurate misure fra Denver (1616 m.) e Echo Lake (3250 m.). Infine si può osservare che intorno a questo valore si aggirano, con scarti più o meno forti, quelli forniti dalle misure più attendibili a noi note ⁽¹⁾.

Noi crediamo perciò che in generale le forti divergenze riscontrate fra le numerose determinazioni, fino a oggi eseguite, del rapporto $\tau/\mu c^2$ siano, almeno in gran parte, da attribuirsi alle difficoltà che si incontrano nell'eseguire e interpretare correttamente esperienze di questo tipo e che pertanto sia prematuro orientarsi, in base ai dati delle misure di assorbimento anomalo fino a oggi realizzate, verso l'idea prospettata più volte (22) e in particolare da WEISZ (23) e più recentemente da JUILFS (24) che la componente mesonica abbia una struttura più o meno complessa.

In particolare sembra da escludere che il valore $\tau/\mu c^2$, deducibile dalle esperienze di assorbimento anomalo, sia circa $1,5 \cdot 10^{-8}$ sec/MeV come fu trovato recentemente da NIELSEN e collaboratori (loc. cit.) nonostante l'accuratezza posta da questi autori nell'eseguire la loro esperienza.

Non si può invece dir niente, almeno per ora, circa la possibilità o meno di spiegare con un simile valore e con l'ipotesi di una sola componente mesonica, le recenti osservazioni di SCHEIN e collaboratori (26) nell'alta atmosfera. Altrettanto non si può dire come si dovrà conciliare il valore di τ recentemente trovato da RASETTI (loc. cit.) e da MAZE, e CHAMINADE (loc. cit.) con quello di $\tau/\mu c^2$ da noi ritenuto giusto. Si può osservare che l'esperienza di SCHEIN e collaboratori, sotto molti altri aspetti sembra suscettibile di critiche (vedi FERRETTI, loc. cit.) e che non è da escludere che ulteriori esperienze, eseguite a grandi altezze, possano modificare sensibilmente le conclusioni alle quali sono giunti questi autori. In particolare si può far presente che misure recenti di ROSSI e GREISEN (27) hanno confermato al livello del mare l'esistenza di quel residuo elettronico primario messo in evidenza da BERNARDINI, CACCIAPUOTI, FERRETTI, PICCIONI e WICK, residuo la cui origine apparirebbe molto oscura ove le esperienze di SCHEIN e collaboratori fossero del tutto attendibili.

Analogamente le misure di MAZE e CHAMINADE non ci sembrano tali da poter escludere che il valore di τ possa essere di circa 3 microsecondi, nonostante che questi autori assegnino a τ un valore di 1,5 microsecondi.

⁽¹⁾ Vedi a questo proposito G. BERNARDINI, «*Rendiconti della Riunione della Società Italiana di Fisica*» del 1942; «*Nuovo Cimento*» in corso di stampa.

Solo le belle esperienze di RASETTI farebbero veramente pensare che il valore effettivo di τ fosse intorno a $1,5 \mu \text{ sec.}$, ma un esame accurato della tecnica usata da RASETTI stesso (vedi O. PICCIONI in corso di pubblicazione) può far sospettare, anche in questo caso, l'esistenza di errori sistematici che abbiano condotto a un valore di τ più basso del vero.

Se tuttavia τ dovesse risultare, in successive esperienze, effettivamente dell'ordine di $1,5 \mu \text{ sec.}$; poichè noi riteniamo – per le considerazioni svolte in questa Nota e per altri dati di fatto che saranno pubblicati prossimamente – che il valore di $\tau/\mu c^2$ non possa essere molto inferiore a $3 \cdot 10^{-8} \text{ sec/MeV}$ ⁽¹⁾, se ne dovrebbe concludere che il valore di μc^2 si aggira intorno ai 50 MeV, valore un po' basso, non solo per rendere conto delle forze nucleari, ma anche del valore medio attorno a cui oscillano le misure di μ fino a ora effettuate in camera del WILSON.

* * *

Le esperienze cui si riferisce questa Nota fanno parte dei risultati ottenuti dalla spedizione per lo studio dei raggi cosmici in Val d'Aosta, organizzata dall'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, con i mezzi forniti dal Comitato per la Geofisica e la Meteorologia dello stesso Consiglio.

(1) I nostri calcoli permettono di escludere con notevole sicurezza che il valore medio di $\tau/\mu c^2$ possa essere inferiore a $2,5 \cdot 10^{-8}$; ma non escludono invece, per la distribuzione delle curve calcolate, che detto valore possa anche avvicinarsi a $4 \cdot 10^{-8}$.

BIBLIOGRAFIA

- (1) KULENKAMPFF, « Verh. d. D. Phys. Ges. », pag. 92, 1938; EULER und HEISENBERG, « Erg. d. exakt. Naturw. », 17, 1 (1938). (Vedi anche i numerosi lavori sperimentali di POMERANTZ, ROSSI e coll., BERNARDINI e coll., NEHER e STEVER ecc.).
 - (2) ROSSI e REGENER, « Phys. Rev. », 58, 837 (1940); SCHEIN, JESSE e WOLLAN, « Phys. Rev. », 57, 847 (1940).
 - (3) FERRETTI, « Atti della R. Accademia d'Italia » (in corso di stampa).
 - (4) JOHNSON e BARRY, « Phys. Rev. », 56, 219 (1939); JOHNSON, « Rev. of Mod. Phys. », 11, 208 (1939).
 - (5) RASETTI, « Pyhs. Rev. », 59, 613 (1941).
 - (6) AUGER, MAZE e CHAMINADE, « Compt. Rend. », 213, 381 (1941); MAZE e CHAMINADE, « Compt. Rend. », 214, 266 (1942).
 - (7) BLACKETT e BRODE, « Proc. Roy. Soc. », A-154, 573 (1936).
 - (8) JONES, « Rev. of Mod. Phys. », 11, 235 (1939).
 - (9) EHMERT, « Z. S. f. Phys. », 106, 751 (1937).
 - (10) ROSSI e HALL, « Phys. Rev. », 59, 223 (1941).
 - (11) NIELSEN, RYERSON, NORDHEIM e MORGAN, « Phys. Rev. », 59, 547 (1941).
 - (12) CACCIAPUOTI e PICCIONI, « Ricerca Scientifica », XII, 874 (1941).
 - (13) BERNARDINI, CACCIAPUOTI, PANCINI e PICCIONI, « N. Cimento », XIX, 69 (1941).
 - (14) WICK, « Ric. Scientifica », XII, 874 (1941).
 - (15) SITTKUS, « Z. S. f. Phys. », 108, 421 (1938).
 - (16) CLAY e VAN GEMERT, « Physica », 6, 649 (1939).
 - (17) NIELSEN e MORGAN, « Phys. Rev. », 54, 245 (1938); ROSSI, « Z. S. f. Phys. », 82, 151 (1933), ecc.
 - (18) COCCONI e TONGIORGI, « Ric. Scient. », XIII, 21 (1942).
 - (19) BERNARDINI e CACCIAPUOTI, « Ric. Scient. », XIII, 981 (1941).
 - (20) AUGER e EHRENFEST, « Journ. Phys. Rad. », VII, 58 (1936).
 - (21) WOODWARD e STREET, « Phys. Rev. », 49, 198 (1936).
 - (22) V. p. es., BERNARDINI, CACCIAPUOTI, PANCINI e PICCIONI, loc. cit.
 - (23) WEISZ, « Phys. Rev. », 59, 931 (1941).
 - (24) JUILFS, « Naturw. », 30, 584 (1942).
 - (25) POMERANTZ, « Phys. Rev. », 57, 3 (1940).
 - (26) SCHEIN, JESSE e WOLLAN, « Phys. Rev. », 59, 615 (1941).
 - (27) ROSSI e GREISEN, « Phys. Rev. », 61, 121 (1941).
-

Fisica (Fisica-matematica). — *Sull'integrazione del $\Delta\Delta$ in una striscia indefinita.* Nota di LUIGI SOBRERO, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. *Oggetto della Nota.* — Il problema di determinare, nei punti di una striscia piana indefinita, una funzione $F(x, y)$ che soddisfi all'equazione differenziale

$$\Delta\Delta F = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

e verifichi certe determinate condizioni al contorno è stato, da gran tempo, completamente risolto da vari autori ⁽²⁾. Tuttavia la teoria dell'elasticità, che ha proposto il problema, non ha tratto quasi alcun profitto da queste soluzioni; e ciò a parer nostro, per due differenti motivi: in primo luogo perchè le soluzioni si presentano sotto un aspetto molto complesso; in secondo luogo perchè non si vede la possibilità di estendere i metodi proposti ad aree di forma diversa dalla striscia. Esporremo, in questa Nota, un metodo che ci sembra evitare i due inconvenienti su riferiti.

2. *Esposizione del metodo.* — Scegliamo il riferimento in modo che i due lati della striscia siano le due rette $y = 0$ ed $y = 1$; e supponiamo noti i valori dell'incognita funzione F , e della sua derivata rispetto ad y , sui due lati della striscia. In altre parole imponiamo alla F di soddisfare alle condizioni seguenti:

$$[1] \quad \begin{cases} \text{sul lato } y = 0 & , & F = f_1 & , & \frac{\partial F}{\partial y} = g_1 \\ \text{sul lato } y = 1 & , & F = f_2 & , & \frac{\partial F}{\partial y} = g_2 \end{cases}$$

f_1, g_1, f_2 e g_2 essendo quattro date funzioni di x . Supporremo queste funzioni derivabili infinite volte; e, inoltre, ammetteremo che le funzioni

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942 XXI.

⁽²⁾ Per le indicazioni bibliografiche al riguardo si veda, ad esempio, il *Trattato di Elasticità* del TIMOSHENKO.

stesse e tutte le loro derivate siano maggiorate (in valore assoluto) da un comune valore L . Questa restrizione, in verità, non è essenziale ma è comoda; e, nelle applicazioni alla teoria dell'elasticità, non dà alcuna noia.

Imporremo, inoltre, alla richiesta funzione F , di risultare finita in tutto il campo di sua definizione.

Esiste una sola funzione $F(x, y)$ che verifichi l'equazione

$$[2] \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

e soddisfi alle condizioni su riferite; e, tale funzione, verrà qui determinata con un procedimento di approssimazioni successive. Si determinerà, cioè, una successione di funzioni F_1, F_2, \dots, F_n la quale, al crescere di n , converga effettivamente alla funzione F richiesta.

La prima approssimazione, F_1 , si otterrà semplicemente ponendo

$$F_1 = a + by + cy^2 + dy^3,$$

a, b, c, d essendo funzioni di x determinate in modo da soddisfare alle condizioni [1]. Si trova, precisamente,

$$F_1 = (1 - 3y^2 + 2y^3)f_1 + (y - 2y^2 + y^3)g_1 + (3y^2 - 2y^3)f_2 + (-y^2 + y^3)g_2.$$

La funzione F_1 così ottenuta non verificherà l'equazione [2]; altro che nel caso in cui f_1, g_1, f_2 e g_2 sono costanti. Se f_1, g_1, f_2 e g_2 non sono costanti, ma variano piuttosto lentamente al variare di x , la funzione F_1 , pur non coincidendo con la F richiesta, ne fornisce una buona approssimazione (si potrebbe, infatti, dimostrare che, nei problemi di elasticità, essa equivale al principio della conservazione delle sezioni piane; ed è noto che questo principio fornisce, in genere, risultati abbastanza buoni).

Dalla prima approssimazione F_1 passiamo ad una seconda approssimazione F_2 , determinata in modo da verificare l'equazione

$$[3] \quad \frac{\partial^4 F_2}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} = 0$$

e da soddisfare alle condizioni al contorno [1]. Poichè, nel primo membro dell'equazione precedente, i due ultimi termini sono, ormai, grandezze note, la F_2 si potrà ricavare, da [3] ed [1], mediante semplici quadrature.

Passiamo quindi ad una terza approssimazione, F_3 , determinata in modo da soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^4 F_3}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F_2}{\partial x^4} = 0$$

e alle condizioni al contorno [1]; e così via.

Il metodo risulta di convergenza molto rapida; e, come vedremo più innanzi, nelle applicazioni alla teoria dell'elasticità la seconda approssimazione, F_2 , o al più la terza, F_3 , già forniscono risultati pienamente soddisfacenti.

3. *Espressione esplicita dell'approssimazione F_n .* - Sarà conveniente procurarci una espressione esplicita della approssimazione F_n . In sostanza abbiamo visto che tale approssimazione viene determinata (a partire da F_{n-1}) in modo da verificare l'equazione differenziale

$$[4] \quad \frac{\partial^4 F_n}{\partial y^4} = -2 \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^4}$$

e le condizioni al contorno [1]. Per semplicità di calcolo è conveniente provvisoriamente introdurre, in luogo di F_n , la differenza $F_n - F_1$. Indichiamo questa differenza con F'_n , e cioè poniamo

$$[5] \quad F_n = F'_n + F_1.$$

Sostituendo questa espressione di F_n nella [4] si vede subito che la nuova funzione incognita F'_n verifica l'equazione

$$\frac{\partial^4 F'_n}{\partial y^4} = -2 \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^4}.$$

Inoltre, poichè la F_n e la sua derivata rispetto ad y assumono (sui due lati della striscia) i medesimi valori che (rispettivamente) assumono la F_1 e la sua derivata rispetto ad y , si vede che la F'_n e la sua derivata rispetto ad y si devono annullare per $y = 0$ ed $y = 1$.

La funzione F'_n si otterrà, pertanto, integrando quattro volte successivamente, rispetto ad y , il secondo membro della ultima equazione scritta e determinando le costanti di integrazione in modo da verificare le condizioni al contorno su riferite. Eseguiti i calcoli si vede che F'_n si può scrivere al modo seguente:

$$[6] \quad F'_n(x, y) = \int_0^1 g(y, \eta) \cdot \left(-2 \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} - \frac{\partial^4 F_{n-1}}{\partial x^4} \right) d\eta$$

dove: F_{n-1} designa la funzione che si ottiene da F_{n-1} ponendovi materialmente, in luogo di y , una nuova variabile ausiliare η ; e $g(y, \eta)$ designa una funzione così definita

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{per } \eta \leq y, \quad g = \frac{1}{6} \eta^2 (1-y)^2 (y-\eta-2y[1-\eta]) \\ \text{per } \eta \geq y, \quad g = \frac{1}{6} \eta^2 (1-\eta)^2 (\eta-y-2\eta[1-y]). \end{array} \right.$$

La [6] si può ancora porre nella forma

$$[7] \quad F'_n(x, y) = -2 \int_0^1 g(y, \eta) \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} d\eta - \int_0^1 g(y, \eta) \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^4} d\eta,$$

e, dei due integrali a secondo membro, il primo può semplificarsi mediante una quadratura per parti. Verificato, infatti, che la funzione $g(y, \eta)$ è due volte derivabile rispetto ad η , e che tale derivata seconda è continua (in tutto l'intervallo $0 < \eta < 1$) potremo scrivere

$$\int_0^1 g \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} d\eta = \left[g \frac{\partial^3 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta} \right]_{\eta=0}^{\eta=1} - \left[\frac{\partial g}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2} \right]_{\eta=0}^{\eta=1} + \int_0^1 \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2} d\eta$$

o anche (tenendo presente che la funzione g e la sua derivata $\frac{\partial g}{\partial \eta}$ si annullano per $\eta = 0$ e per $\eta = 1$)

$$[8] \quad \int_0^1 g \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2 \partial \eta^2} d\eta = \int_0^1 h(x, \eta) \frac{\partial^2 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2} d\eta,$$

dove è indicata con h la derivata $\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}$, e cioè si è posto

$$\begin{cases} \text{per } \eta \leq y & , \quad h = (1-y)^2 (y-\eta-2y\eta) \\ \text{per } \eta \geq y & , \quad h = y^2 (3\eta+y-2-2y\eta). \end{cases}$$

Tenendo conto della identità [8], la [7] diviene

$$F'_n(x, y) = - \int_0^1 \left(2h \frac{\partial^2 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2} + g \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^4} \right) d\eta.$$

Introducendo nella [5] questa espressione di F'_n otterremo poi

$$[9] \quad F_n = F_1 - \int_0^1 \left(2h \frac{\partial^2 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^2} + g \frac{\partial^4 \bar{F}_{n-1}}{\partial x^4} \right) d\eta$$

che, appunto, costituisce la esplicita espressione di F_n cui volevamo pervenire.

4. *Una maggiorazione per le funzioni g ed h .* — Per dimostrare la convergenza di F_n ad un limite finito ci sarà conveniente indicare una adatta maggiorazione per le funzioni g e h , o, meglio, per i due integrali

$$I = \int_0^1 |g| d\eta \quad , \quad J = \int_0^1 |h| d\eta$$

(estesi — o si osservi bene — ai valori assoluti di g e di h).

Di questi due integrali il primo è di calcolo immediato. Infatti la funzione $g(y, \eta)$ è sempre positiva in tutto il campo di sua definizione ($0 \leq y, \eta \leq 1$); sicchè si può scrivere più semplicemente

$$I = \int_0^1 g d\eta,$$

e, con facile calcolo.

$$I = \frac{1}{24} (1-y)^2 y^2.$$

Questa espressione assume (quando y varia tra 0 ed 1) il suo massimo valore per $y = \frac{1}{2}$. Si ha, precisamente,

$$I_{\max} = \frac{1}{384} \quad \text{e quindi} \quad I \leq \frac{1}{384}.$$

Maggiore cautela richiede invece il calcolo dell'integrale J . Tenendo conto della definizione di h si ha

$$[10] \quad J = (1-y)^2 \int_0^y |y-\eta-2y\eta| d\eta + y^2 \int_y^1 |3\eta+y-2-2y\eta| d\eta.$$

Esaminiamo il primo dei due integrali a secondo membro.

Quando η varia fra 0 ed y , la funzione $y-\eta-2y\eta$ passa da un valore positivo ad un valore negativo, annullandosi per $\eta = \frac{y}{1+2y}$. Sicchè è conveniente porre quell'integrale nella forma

$$\int_0^{\frac{y}{1+2y}} (y-\eta-2y\eta) d\eta + \int_{\frac{y}{1+2y}}^y -(y-\eta-2y\eta) d\eta$$

ovvero, avuto riguardo al segno di $y-\eta-2y\eta$ nei due intervalli $0 \leq \eta \leq \frac{y}{1+2y}$ ed $\frac{y}{1+2y} \leq \eta \leq y$, nella forma equivalente

$$\int_0^{\frac{y}{1+2y}} (y-\eta-2y\eta) d\eta - \int_{\frac{y}{1+2y}}^y (y-\eta-2y\eta) d\eta,$$

che ci fornisce immediatamente il valore dell'integrale in esame. Con eguale accorgimento si procederà al calcolo dell'ultimo dei due integrali a secondo membro della [10]. A semplificazioni eseguite si trova

$$J = \frac{4(1-y)^2 y^2}{(1+2y)(3-2y)}$$

e si vede subito che questa espressione, al variare di y nell'intervallo $0 < y < 1$, assume il suo massimo valore per $y = \frac{1}{2}$. Si ha, precisamente,

$$J_{\max} = \frac{1}{16} \quad \text{e quindi} \quad J \leq \frac{1}{16}.$$

Da queste due limitazioni per gli integrali I e J discendono altre due limitazioni notevoli: Indichiamo con $p(\eta)$ una qualunque funzione (continua e limitata) definita nell'intervallo $0 < \eta < 1$, e diciamone P il massimo valore assoluto in questo intervallo. Avremo

$$[11] \quad \left| \int_0^1 g(y, \eta) p(\eta) d\eta \right| < P \int_0^1 |g| d\eta \leq \frac{P}{384},$$

$$[12] \quad \left| \int_0^1 h(y, \eta) p(\eta) d\eta \right| < P \int_0^1 |h| d\eta \leq \frac{P}{16},$$

limitazioni, queste, le quali continuano naturalmente a sussistere anche quando la funzione $p(\eta)$ dipenda, oltre che da η , anche da una qualche parametro (indipendente da η), per esempio x . Di queste limitazioni [11] e [12] ci dovremo servire fra breve.

5. *Dimostrazione della convergenza del metodo.* — Per ipotesi i dati al contorno, e cioè le funzioni f_1, g_1, f_2, g_2 , e tutte le loro derivate, sono limitate in valore assoluto. Tenuta presente l'espressione di F_1 , si vede allora immediatamente che anche tale funzione e tutte le sue derivate, sono limitate in valore assoluto da un certo numero positivo M .

Ciò premesso scriviamo la disuguaglianza [11] ponendo, in luogo di $p(\eta)$ la funzione $\frac{\partial^{v+4} \bar{F}_1}{\partial x^{v+4}}$ (v essendo un intero positivo qualunque); scriviamo poi la disuguaglianza [12] ponendo, in luogo di $p(\eta)$ la funzione $2 \frac{\partial^{v+2} \bar{F}_1}{\partial x^{v+2}}$; e, infine, sommiamo m. a m. le due disuguaglianze. Si ottiene

$$\left| \int_0^1 2h \frac{\partial^{v+2} \bar{F}_1}{\partial x^{v+2}} \right| + \left| \int_0^1 g \frac{\partial^{v+4} \bar{F}_1}{\partial x^{v+4}} d\eta \right| < \left(\frac{2}{16} + \frac{1}{384} \right) M$$

e, a più forte ragione,

$$\left| \frac{\partial^v}{\partial x^v} \int_0^1 \left(-2h \frac{\partial^2 \bar{F}_1}{\partial x^2} - g \frac{\partial^4 \bar{F}_1}{\partial x^4} \right) d\eta \right| < \left(\frac{2}{16} + \frac{1}{384} \right) M.$$

Ora, in virtù della [9], l'integrale a primo membro è proprio la differenza $F_2 - F_1$, sicchè, posto per semplicità $\alpha = \frac{2}{16} + \frac{1}{384} = \frac{49}{384}$, avremo

$$\left| \frac{\partial^v (F_2 - F_1)}{\partial x^v} \right| < \alpha M.$$

Utilizziamo ora una seconda volta le disuguaglianze [11] e [12]. Precisamente poniamo, nella [11], in luogo di $p(\eta)$ la funzione $\frac{\partial^{v+4} (\bar{F}_2 - \bar{F}_1)}{\partial x^{v+4}}$ e, nella [12], in luogo di $p(\eta)$ la funzione $2 \frac{\partial^{v+2} (\bar{F}_2 - \bar{F}_1)}{\partial x^{v+2}}$ e sommiamo membro a membro. Avremo, tenendo conto della limitazione già acquisita per $F_2 - F_1$ e per le sue derivate,

$$\left| \frac{\partial^v}{\partial x^v} \int_0^1 \left(-2h \frac{\partial^2 (\bar{F}_2 - \bar{F}_1)}{\partial x^2} - g \frac{\partial^4 (\bar{F}_2 - \bar{F}_1)}{\partial x^4} \right) d\eta \right| < \alpha^2 M.$$

Ora, se si scrive la [9] per il valore $n = 3$, poi per il valore $n = 2$, e infine si fa la differenza delle relazioni così ottenute, si vede facilmente che l'integrale a primo membro della disuguaglianza soprascritta è proprio la differenza $F_3 - F_2$. Sicchè avremo

$$\left| \frac{\partial^v (F_3 - F_2)}{\partial x^v} \right| < \alpha^2 M.$$

e, più in generale,

$$\left| \frac{\partial^v (F_n - F_{n-1})}{\partial x^v} \right| < \alpha^{n-1} M.$$

Di qui, per $v = 0$,

$$|F_n - F_{n-1}| < \alpha^{n-1} M.$$

Resta così provato che i termini della somma

$$[13] \quad F_1 + (F_2 - F_1) + (F_3 - F_2) + \dots + (F_n - F_{n-1})$$

sono maggiorati dai termini della serie geometrica convergente

$$M + \alpha M + \alpha^2 M + \dots + \alpha^{n-1} M + \dots$$

Si può dunque concludere che la somma [13], il cui valore è proprio F_n , converge al crescere indefinito di n . Dopodichè non vi è nessuna difficoltà a dimostrare che il limite cui tende F_n è proprio la funzione F richiesta.

6. *Maggiorazione del resto della serie.* — Si può vedere quale errore si commette assumendo, in luogo della funzione F , la funzione approssimatrice F_n . Indicando con ε_n questo errore si ha facilmente

$$\varepsilon_n = (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) + \dots$$

e quindi

$$|\varepsilon_n| < (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots) M = \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} M,$$

ovvero, tenendo presente il valore di α .

$$|\varepsilon_n| < \frac{384}{335} \left(\frac{49}{384} \right)^n.$$

In particolare

$$|\varepsilon_1| < 0,147 M, \quad |\varepsilon_2| < 0,019 M, \quad |\varepsilon_3| < 0,003 M.$$

Queste relazioni sono notevoli. La prima di esse ci dice che l'approssimazione ottenibile, nella teoria dell'elasticità, quando si valutano gli sforzi con il principio della conservazione delle sezioni piane, è, al più, dell'ordine di grandezza del 15 % del valore massimo degli sforzi (e delle loro derivate). La seconda ci dice che l'approssimazione F_2 , praticamente, si confonde con la F . Sicchè, applicando il metodo a problemi concreti, sarà lecito arrestare lo sviluppo alla seconda approssimazione F_2 .

Chimica (Chimica biologica). — *Sulla nicotinic-p-fenetidina* ⁽¹⁾. Nota di FRANCO LANFRANCHI, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È nota da molto tempo l'azione antipiretica ed antinevralgica della fenacetina (acetil-p-fenetidina), che appunto come antipiretico nelle malattie febbrili e soprattutto come antinevralgico e sedativo è impiegata ancor oggi in terapia, per quanto la sua somministrazione, specialmente se prolungata, non sia sempre priva d'inconvenienti essendo fortemente tossica. Secondo ricerche di TREUPEL e HINSBERG ⁽³⁾ l'azione antipiretica della fenacetina è da attribuirsi al p-aminofenolo ed al p-acetilaminofenolo, nei quali derivati, per azioni enzimatiche, la fenacetina si scinde nell'organismo. Nelle urine degli organismi, ai quali è stata somministrata fenacetina, il p-aminofenolo si ritrova infatti — ciò risulta da ricerche di MÖRNER ⁽⁴⁾ — sotto forma dei suoi derivati dell'acido solforico e glicuronico ed è a questi derivati che è dovuta la reazione cromatica dell'indofenolo presentata dalle urine.

Alla formazione del p-aminofenolo non solo sono da attribuire le proprietà antipiretiche della fenacetina; ma anche la notevole tossicità di detto composto. Il p-aminofenolo è da considerare come un veleno protoplasmatico. La sua azione si esplica nettamente sul sistema nervoso centrale (azione narcotica e paralizzante) e sul sangue, del quale discioglie i globuli rossi riducendo l'ossiemoglobina a metaemoglobina. Per queste azioni del p-aminofenolo la fenacetina può dar luogo non solo ad avvelenamenti acuti; ma anche ad intossicazione cronica con conseguente depressione nervosa e profonda anemia. La trasformazione del p-aminofenolo nei suoi derivati dell'acido solforico e glucuronico è un esempio appunto delle così dette sintesi protettive dell'organismo animale.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

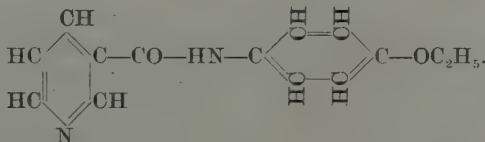
⁽²⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

⁽³⁾ TREUPEL e HINSBERG, « Arch. exp. Path. Pharm. », 33, 216 (1893).

⁽⁴⁾ MÖRNER, « Zeit. physiol. Chem. », 13, 12 (1889).

In vista soprattutto di ottenere derivati della p-fenetidina, che, pur avendo proprietà farmacologiche molto vicine a quelle della fenacetina, avessero una tossicità minore, numerosi derivati sono stati sintetizzati dai chimici, soprattutto sostituendo il radicale acetile con altri radicali acilici. Furono così sintetizzate la propionilfenetidina, la valerilfenetidina, la bromovalerilfenetidina, la citrilfenetidina, la citriltrifenetidina, la tartrilfenetidina, la salicilfenetidina, la succinilfenetidina, la metilglicolilfenetidina, la salicilacetilfenetidina, l'aminoacetilfenetidina e la lattilfenetidina (1). Tuttavia fra questi numerosi derivati acilici della p-fenetidina, preparati soprattutto dall'industria tedesca, solamente l'aminoacetil-p-fenetidina (fenocolla) ed alcuni suoi sali come quello con l'acido cloridrico, il citrico ecc. e la lattil-p-fenetidina (lattofenina) hanno conservato una qualche importanza pratica in terapia. Senza dubbio l'azione antipiretica di questi derivati impiegati come succedanei della fenacetina è da attribuirsi, come per la fenacetina stessa, alla formazione nell'organismo del p-aminofenolo, che può avvenire solo in seguito al distacco idrolitico della radicale acilico. Infatti per questi derivati è tanto maggiore l'azione antipiretica quanto maggiore la quantità di p-aminofenolo che si forma ed i derivati, che non danno origine a tale composto, non hanno alcuna azione antipiretica. Tuttavia per alcuni derivati, come nel caso della fenocolla, che può venire impiegata nelle febbri malariche come succedaneo della chinina, è logico pensare che parte della loro azione terapeutica è dovuta al derivato acilico stesso.

In due Note precedenti di prossima pubblicazione (2) abbiamo descritto la sintesi di alcuni derivati dell'acido nicotinico (nicotinamidi sostituite dove un atomo d'idrogeno del gruppo amidico è sostituito da un radicale tiazolico) ed abbiamo messo in evidenza sotto quali punti di vista possano presentare interesse. Nella presente Nota viene descritta la preparazione di un'altra nicotinamide N-sostituita e precisamente della nicotinil-p-fenetidina:



Per questo derivato dell'acido nicotinico valgono parte delle considerazioni biologico-farmacologiche già esposte nelle due precedenti

(1) Per la letteratura su tali derivati vedi P. LEBEAU e G. COURTOIS, *Traité de Pharmacie Chimique*, vol. II, fasc. 1, pag. 561-567.

(2) F. LANFRANCHI « Atti R. Accademia d'Italia », Classe scienze. fis. mat. e nat., fasc. giugno 1942 e successivi.

Note. Ora possiamo aggiungere, che tale derivato, essendo un derivato acilico della p-fenetidina, può avere forse un'azione antipiretica. D'altra parte, qualora detto derivato avesse azione antipiretica, si avrebbe contemporaneamente alla formazione di p-aminofenolo la messa in libertà di acido nicotinico, il grande valore biologico del quale è ben conosciuto. Fra l'altro poichè, come risulta da recenti ricerche di A. ORRÙ⁽¹⁾, l'acido nicotinico produce sugli animali normali, a piccole dosi, una stimolazione del sistema emopoietico con aumento delle emazie del sangue, non è illogico pensare che possa venire, per lo meno in parte, neutralizzata l'azione nociva sul sangue del p-aminofenolo, che, come sopra è stato detto, discioglie i globuli rossi trasformando l'emoglobina in metaemoglobina.

La nicotilil-p-fenetidina, dopo un tentativo di condensazione diretta dell'acido nicotinico con la p-fenetidina, che ebbe esito negativo, fu preparata, con ottimo rendimento, con procedimento analogo a quello seguito per preparare i derivati descritti nelle due surricordate Note di prossima pubblicazione, cioè condensando il cloruro dell'acido nicotinico con la p-fenetidina in benzolo anidro. Sui dettagli di tale preparazione viene riferito nella parte sperimentale.

PARTE SPERIMENTALE.

Fu tentato dapprima di condensare direttamente l'acido nicotinico con la p-fenetidina riscaldando lungamente su bagnomaria un miscuglio in quantità equimolecolari delle due sostanze. Il tentativo diede però risultato negativo. Forse sarà possibile eseguire tale condensazione ad una temperatura più alta (200° od oltre) come viene fatto per la preparazione di altri derivati acilici della p-fenetidina. Noi, non dando risultato positivo questo primo tentativo, abbiamo preferito ricorrere al solito metodo di condensazione in solvente anidro tra il cloruro dell'acido nicotinico e la p-fenetidina stessa. Abbiamo così condensato il cloruro dell'acido nicotinico con la p-fenetidina facendo reagire in benzolo perfettamente anidro 1 mol. del primo con 2 mol. della seconda.

La p-fenetidina fu distillata di fresco e fu ottenuta così leggermente gialla, quasi incolore, con P. E. = 244°. Il benzolo fu completamente anidrificato su sodio in fili. Il cloruro dell'acido nicotinico fu preparato secondo il metodo di MEYER e GRAF⁽²⁾, 22 gr. del cloruro dell'acido nicotinico furono sciolti in circa 70 cc. di benzolo e 43 gr. (quantità stechio-

(¹) A. ORRÙ, « Rend. Acc. Lincei », vol. 29, ser. 6ª, 1° sem., fasc. 7 (1939).

(²) H. MEYER e R. GRAF., « Ber. der Deutsch. Chem. Ges. », 61, 2205 (1928).

metrica 42,63 gr.) di p-fenetidina furono sciolti in 300 cc. di benzolo. Alla soluzione di p-fenetidina raffreddata con ghiaccio e di continuo agitata fu aggiunta, per piccole porzioni, la soluzione del cloruro dell'acido nicotinic perfettamente limpida e del tutto incolore. Si ebbe immediatamente la formazione di un precipitato pulverulento; mentre tutta la massa si colorò in giallo e si riscaldò notevolmente. La massa di reazione fu lasciata per una notte in ghiacciaia, dopo di che il precipitato formatosi fu filtrato alla pompa. Il precipitato, lavato con un po' di benzolo e del benzolo privato nel vuoto, si presentò come polvere bianca fine a struttura microcristallina; mentre il filtrato si presentò di color giallo. Una piccola porzione di quest'ultimo per evaporazione lasciò un tenue residuo. Peso della sostanza gr. 59,5 (teoria $22 + 42,63 = 64,63$ gr. - cloridrato della p-fenetidina gr. 27; nicotinil-p-fenetidina gr. 37,7).

I 59,5 gr. della sostanza, essendo il cloridrato della p-fenetidina assai solubile in acqua, furono fatti bollire per qualche minuto con 150 cc. di acqua, dopo di che la sostanza rimasta indisciolta fu filtrata con imbuto ad acqua calda. Il filtrato lasciò separare, per raffreddamento, una piccola quantità di una sostanza cristallina, che, filtrata alla pompa e seccata, pesò gr. 4 (sostanza A). Il filtrato acquoso, fortemente concentrato, per raffreddamento in ghiacciaia si rapprese in una poltiglia cristallina, che, filtrata alla pompa e seccata nel vuoto, presentò un P. F. = $231-232^{\circ}$ (Sostanza B) (Peso gr. 22). La sostanza insolubile in acqua bollente, ricristallizzata da circa 200 cc. di alcool etilico assoluto, si presentò bianchissima e ben cristallizzata in lunghi prismi con P. F. = $169-171^{\circ}$ e pesò gr. 28 (sostanza C). La soluzione alcoolica, dalla quale era stata separata la sostanza C, fortemente concentrata fornì, per raffreddamento, 2 gr. dello stesso prodotto meno puro con P. F. = $164-168^{\circ}$ (Totale $28 + 2 = 30$ gr.) La sostanza A, dopo qualche cristallizzazione frazionata, risultò essere costituita dalla B con piccole quantità della C. La sostanza B risultò essere il cloridrato della p-fenetidina. Infatti una miscelanza della sostanza con il cloridrato della p-fenetidina, preparato dalla base purissima e avente un P. F. = 233° , non presentò alcuna depressione nel punto di fusione. La sostanza G era senza dubbio da identificare con la nicotinil-p-fenetidina, come stava ad indicare anche il suo peso. Detta sostanza, eseguiti alcuni saggi di solubilità, risultò essere praticamente insolubile anche a caldo nella maggior parte dei solventi organici usuali (benzolo, cloriformio, etere ed etere di petrolio). È un poco più solubile a caldo in acetato di etile ed acetone, dai quali solventi riprecipita per raffreddamento. Più solubile ancora è a caldo in acqua; ma così poco a freddo che non è possibile fare una soluzione M/1000. Gli unici solventi però, che si prestano bene per la sua ricristallizzazione sono la piridina e l'alcool etilico sia assoluto che al 95 %, nei quali solventi è fortemente solubile a caldo e poco a freddo. 23 gr. della sostanza con P. F. = $169-171^{\circ}$ furono perciò rieri-

stallizzati da 175 cc. di alcool etilico a 95 %. Furono ottenuti così gr. 21 di una sostanza bianchissima e ben cristallizzata con P. F. = 170-171°, che alla prova con ossido di calcio risultò completamente esente da cloro e che all'analisi diede i seguenti risultati:

per $C_{14}H_{14}O_2N_2$	Calcolato	Trovato
	N = 11,57 %	N = 11,68 %
	C = 69,39 %	C = 69,25 % ⁽¹⁾
	H = 5,82 %	H = 5,87 %

mgr. 4,122 di sostanza diedero 0,425 cc. di N a mm. 761,5 e a 28,5°C
mgr. 5,238 di sostanza diedero mgr. 2,748 di H₂O e mgr. 13,301 di CO₂.

⁽¹⁾ Le microanalisi furono da me eseguite nel Laboratorio di microanalisi dell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

Antropologia. — *La topografia dell'osso zigomatico nell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia* ⁽¹⁾. Nota riassuntiva ⁽²⁾ di SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le differenze morfologiche della regione zigomatica hanno colpito l'attenzione degli antropologi, perchè partecipano largamente a quel campo di variazioni della forma della faccia che riguardano la diversità dei profili della medesima e sono tra le più significative per la distinzione dei gruppi etnici; ma l'esame dei profili con i criteri correnti non riesce a determinare in modo inequivocabile le condizioni concrete e reali che differenziano i vari tipi facciali, perchè non viene indagata metodicamente la posizione spaziale degli elementi ossei che concorrono a determinarli.

L'esatta e completa distinzione delle forme della faccia può soltanto risultare dalla metodica osservazione della medesima, quando, seguendo un criterio unitario, la descrizione d'insieme dei tre profili, il laterale, il frontale e l'orizzontale, sia fondata sulla contemporanea determinazione della posizione e della forma degli elementi ossei che contribuiscono alla sua costituzione.

Alle variazioni dei diversi profili facciali partecipano direttamente tutte le ossa della faccia, e indirettamente anche quelle del cranio cerebrale, e tanto le une che le altre vi contribuiscono in misura differente, sia con il variare della loro forma, sia con il variare della loro posizione. Gli aspetti morfologici con cui si presentano le varie regioni del cranio facciale sono chiariti dai particolari rapporti tra le singole ossa e dalle particolari forme che queste possiedono. Queste due condizioni, forma e topografia delle ossa della faccia, debbono essere tenute presenti per ogni esatta ed approfondita conoscenza della sua architettura.

L'osso zigomatico mentre da una parte, per la sua particolare posizione tra le ossa del cranio cerebrale e le ossa del cranio facciale, si presta molto bene allo studio delle relazioni morfologiche delle due porzioni del cranio, d'altra parte, per la sua intima partecipazione alla determinazione

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

di caratteristiche morfologiche etniche della faccia, presenta condizioni speciali per approfondire la conoscenza su uno degli aspetti più interessanti delle variazioni architettureali della medesima. Lo zigomatico è un osso di collegamento e di assestamento centralizzato, per così dire, tra cranio e faccia, che si deve adattare quasi esclusivamente al giuoco meccanico di tutte quelle azioni estrinseche, che sono esercitate più direttamente su di esso dalle ossa con cui si articola. La sua morfologia e la sua posizione sono cioè la risultante delle forze che su di esso convergono dal temporale, dal frontale e dal mascellare. Queste invece a loro volta e per la morfologia e per la posizione sono dominate da condizioni meccaniche prevalentemente intrinseche, alle quali debbono sottostare per le funzioni, a cui sono specificatamente e direttamente legate (il temporale in rapporto con il labirinto e con l'articolazione mandibolare, il frontale con lo sviluppo cerebrale, il mascellare con la masticazione).

Partendo dal principio che le posizioni delle ossa del cranio sono posizioni di equilibrio determinate da sistemi di forze di intensità e direzioni varie, che si esercitano su di esse nel corso della loro evoluzione e del loro sviluppo, ho cercato di stabilire la posizione morfo-meccanica dello zigomatico riferendola ad alcuni punti di quest'osso, nei quali è presumibile che concorrano le linee di azione delle forze che agiscono su di esso. I punti prescelti in numero di quattro segnano i limiti estremi di contatto dello zigomatico con il frontale, il mascellare ed il temporale, con i quali si articola interposto fra essi a guisa di ponte. I quattro punti sono: 1° il punto zigomascellare superiore che si trova sul margine infraorbitale al limite tra lo zigomatico ed il mascellare; 2° il punto zigomascellare inferiore al limite inferiore della sutura zigomascellare; 3° il punto zigofrontale esterno detto dal MARTIN frontomalarotemporale all'estremo laterale della sutura frontozigomatica; 4° il punto zigotemporale inferiore in corrispondenza della estremità inferiore della sutura zigotemporale. I quattro punti danno una immagine dell'osso semplificata e schematizzata in una figura di tetraedro irregolare, che è definita dalle linee che li uniscono tra loro. La posizione dello zigomatico fu determinata rispetto ai tre piani fondamentali del cranio, sagittale mediano, frontale e trasverso, mediante le coordinate dei quattro punti che individuano la figura dell'osso. Praticamente mi sono valso delle tre proiezioni ortogonali del cranio partendo dall'asse verticale fondamentale basion-bregma e nelle quali furono misurate direttamente le distanze di ciascun punto dai tre piani.

Ogni qualsiasi modalità morfologica dei profili della faccia in funzione dello zigomatico è individuabile e riconoscibile dalla posizione dei quattro punti significativi di quest'osso e del suo baricentro riferiti ai tre piani fondamentali ortogonali del cranio e quindi dai valori delle coordinate che li localizzano. Le risultanti definitive delle forze che si fanno

equilibrio in corrispondenza dei rispettivi punti dello zigomatico sono espresse dai valori delle loro distanze dai tre piani ortogonali, mentre le differenze tra queste distanze stanno a rappresentare la misura del prevalere delle forze che agiscono secondo le tre direzioni ortogonali. Adottando termini adeguati per esprimere le tre diverse relazioni spaziali dello zigomatico ho chiamato rispettivamente apoziqhia, prozighia ed ipozighia le distanze dal piano sagittale, dal piano frontale e dal piano trasverso. Il modo diverso di combinarsi dei vari gradi di apoziqhia, prozighia ed ipozighia corrispondono a modalità diverse di profili frontale, laterale ed orizzontale. Con tali criteri si sono potute individuare le condizioni differenti della morfologia facciale della regione zigomatica in serie di crani appartenenti a razze diverse. La comparazione dei valori delle coordinate dei punti dello zigomatico nei diversi casi presi in esame è stata raggiunta per mezzo di particolari indici di relazione tra essi e quindi con valori relativi (distanze relative) per eliminare le cause di variazione dipendenti dal diverso grado di dimensione dei crani osservati.

L'esame compiuto con questi procedimenti ha dimostrato che lo zigomatico è impostato diversamente nel cranio nelle varie età, nelle varie razze e nei deformati e che già di per se questa diversa impostazione, senza tener conto delle eventuali diversità di forma dell'osso, caratterizza i diversi tipi morfologici della regione zigomatica e delle regioni circostanti ed anzi ne è una espressione geometricamente precisa.

L'interpretazione dei risultati ottenuti si può ricercare nelle condizioni dinamiche diverse alle quali verosimilmente viene a sottostare l'osso zigomatico nel definitivo assestamento di esso nel cranio. Nello schema da me adottato si può supporre che ognuno dei quattro punti sia sollecitato da un sistema di forze risultanti da tre componenti corrispondenti alle tre linee di congiunzione del punto considerato con gli altri tre punti (componenti del triedro). Le azioni che si esercitano sullo zigomatico possono risolversi in spostamenti determinati da movimenti intorno ad assi, che corrispondono ad una qualsiasi delle congiungenti di due qualunque dei punti dello zigomatico presi in considerazione. Ma le stesse azioni insieme possono anche determinare cambiamenti di forma per ripiegamenti (flessioni), distensioni e torsioni del medesimo, quali risultanti delle forze che si contrastano. Le variazioni di situazione e le variazioni morfologiche trovano così una adeguata interpretazione unitaria. Si può pertanto concepire lo zigomatico soggetto a movimenti che ne hanno determinato il suo assestamento e quindi la sua posizione. Il tipo dei movimenti al quale può soggiacere è molto vario e complesso, così da dar luogo alle più svariate posizioni e correlativamente a determinate forme facciali corrispondenti a tipi razziali.

Con questa concezione dinamica della morfologia cranica, come già altre volte ho affermato, si vuole soltanto cercare di aprire la via alla de-

terminazione degli aspetti meccanici delle forme, mentre con la stessa si può anche spiegare la variabilità nella trasmissione ereditaria delle medesime, quale risultante del giuoco dei molteplici fattori che vi partecipano. I fattori ereditari che intervengono nella architettura del cranio sono molteplici e diversi. Differenti corredi genotipici determinano differenti tipi e grande varietà dei medesimi. La eterogeneità dei fattori ereditari si manifesta cioè con differenze e variazioni fenotipiche. Ad ogni particolare combinazione di fattori ereditari dovrà corrispondere un particolare adattamento reciproco di questi per realizzare tipi con caratteristiche morfologiche definite e concrete: in questo adattamento entra in giuoco un determinismo meccanico che può essere analizzato nel modo prospettato ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Per la dimostrazione analitica sull'argomento di questa Nota si veda: SERGIO SERGI, *Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico nell'uomo*, con 33 tavole fuori testo. « Rivista di Antropologia », vol. XXXIII. 1942-XX.

Biologia (Microbiologia). — *Sulla specializzazione della microflora lattica silaria.* Nota di COSTANTINO GORINI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Memore del favore con cui la R. Accademia dei Lincei, in occasione del Concorso al Premio Reale di Biologia 1915, ha giudicato la mia realistica dottrina microbiologica dell'insilamento lattico, mi pregio comunicare qui che essa ha finito col sostituire la idealistica teoria autolitica e col trovarsi alla base del moderno indirizzo dell'infossamento dei foraggi, per cui questo deve oramai definirsi un processo di conservazione dei foraggi freschi mediante la fermentazione lattica microbica.

Ciò ho dimostrato in due recenti lavori (1941 e 1942), dove ho preso in esame la ricca letteratura dell'ultimo decennio, e donde emerge che solamente mercè le norme positive di insilamento lattico, fondate sulla biologia microbica, la provvida pratica agraria poté diffondersi, mentre prima era ostacolata dagli sfavorevoli riflessi zootecnici e lattieri derivanti da silaggi putridobutirrici.

Mi permetto inoltre rivendicare qui una mia priorità che è stata misconosciuta in una Nota ai Lincei (Arnaudi, 1938), perchè è di importanza essenziale per il perfezionamento della pratica, come è prospettato dall'attuale movimento silario in America, in Germania e in Inghilterra.

Per promuovere la perfetta riuscita del silaggio lattico ho proposto fin dal 1907 l'innesto di fermenti selezionati e poi nel 1920, in base ad esperimenti (che dovetti troncare per mancanza di mezzi), ho suggerito all'uopo « in primo luogo di attenersi a fermenti lattici i quali siano dotati « di attività fermentativa non tanto sul lattosio quanto sugli zuccheri più « comuni dei vegetali (saccarosio, pentosi), e, in secondo luogo, di tener « conto altresì delle loro proprietà proteolitiche per conseguire simultaneamente una trasformazione utile degli albuminoidi ». Seguivo così il criterio che mi aveva dato buoni risultati nell'applicazione di fermenti selezionati al caseificio. (Premio Santoro dei Lincei 1911). Non si deve cioè accontentarsi di fermenti lattici energici atti a combattere la flora

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

antagonista, ma scegliere fermenti lattici capaci altresì di migliorare la digeribilità dei protidi senza diminuire il valore alimentare, raggiungendo così altro dei vantaggi dell'insilamento; a tale postulato rispondono precisamente i fermenti acidoproteolitici che non demoliscono i protidi al di là dei peptoni, dei polipeptidi e degli aminoacidi, onde il valore proteico del foraggio resta immutato se pur non accresciuto.

Le mie prescrizioni, forse troppo precoci per la loro indole enzimatica, rimasero lettera morta fino a questi ultimi anni; si continuò invece a considerare i comuni fermenti lattici del latte come i principali agenti dell'acidificazione naturale degli insilati, sebbene io fin dal 1906 avessi avvertito che « nei silaggi s'incontravano bensì entrambi i tipi principali di questi batteri, che passano sotto i nomi: a) di *Streptococcus lactis acidus*; b) di *Bacillus lactis acidus*; ma che essi però erano in numero abbastanza scarso in confronto ad altre specie batteriche; inoltre in alcuni « campioni di silaggi facevano completamente difetto ». Si spiega così perchè la mia proposta, per quanto prontamente accolta in diversi Paesi, abbia dato finora scarsi risultati, ancorchè si sia ricorso ad innesti abbondanti di fermenti del latte, persino con latte acido o con siero di latte.

Solamente nel 1934 le mie prescrizioni cominciarono ad essere dissepellite e oggi vengono rimesse a nuovo con grande successo, dimenticando la mia paternità, mercè nuovi criteri tassonomici, secondo cui i vari fermenti lattici dei vegetali vengono distinti, con nomi speciali, sia da quelli del latte sia fra di loro, come altrettante specie. È una complicazione di classificazione che le mie antiche ricerche fisioenzimatiche sui batteri mi fanno giudicare superflua, se non pregiudizievole tanto ai fini scientifici quanto ai fini pratici. A mia veduta, come nei fermenti lattici del latte, così in quelli dei vegetali trattasi di forme similari cocciche e bacillari che meritano di essere riunite in due gruppi sotto i nomi di *Lactococcus plantarum* e *Lactobacillus plantarum*. Ambo i gruppi presentano numerose varianti sia a seconda del loro ricambio glicidico attaccando di preferenza l'uno o l'altro degli zuccheri dei foraggi con formazione fondamentale di acido lattico e talora anche di acido acetico (KLUYER), sia a seconda del loro ricambio azotico con produzione di enzimi acido-proteasici (BERGER J., JOHNSON M., e PETERSON W. H.) e talora anche di acetilcolina (KEIL), giusta una recente scoperta tedesca che è già in via di feconda applicazione. Conviene altresì considerare che trattasi di varianti enzimatiche subordinate all'ambiente, le quali sono suscettibili del fenomeno di dissociazione fisiologica per divergenze biochimiche individuali, che io ho dimostrato (1921) e ho recentemente rafforzato (1939) colla concezione (approvata da una eletta di enzimologi) che gli enzimi propri di un microbo siano tutti costitutivi cioè costanti o permanenti, e che si differenziano solo quantitativamente in enzimi abituali e adattivi, a norma che si manifestano indipendentemente o dipendentemente dalle condi-

zioni ambientali. Pertanto non basta innestare dei batteri selezionati, bisogna anche favorirne lo sviluppo e l'attività desiderata creando loro l'ambiente opportuno, con aggiunta eventuale di speciali fattori di nutrizione, stimolazione o accrescimento, in conformità alle indagini che sono in corso in Germania (EICHHOLTZ, WYSS-CHODAT).

In conclusione, si è tenendo conto della specializzazione dei fermenti lattici silari nel loro duplice ricambio glicidico e azotico, come io avevo indicato, che l'impiego di fermenti selezionati è destinato a introdurre un reale progresso nell'insilamento dei foraggi, analogamente a quanto si è ottenuto nel caseificio dall'impiego di fermenti caseari specializzati.

BIBLIOGRAFIA.

- GORINI C., *Ricerche batteriologiche sui foraggi conservati nei silos*. « Annuario della Ist. Agr. Ponti annessa alla R. Scuola Sup. di Agricoltura di Milano ». Dal vol. V al vol. XII, 1904-1915. (Otto relazioni).
- *Per la conservazione dei foraggi con fermenti selezionati*. « Stazioni Sperimentali Agrarie Italiane », vol. LI, da pag. 199 a pag. 213 (1918).
- *Studi sui silo lattici in base alla fisiologia microbica*. « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. LII, 192 (1919).
- *I fermenti butirrici, i silò piacentini e la pratica casearia*. « Rivista di Agricoltura », 25 aprile 1919.
- *Nuovo contributo al silo lattici*. « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », vol. LIII, 407, (1920).
- *Sulle mutazioni fisiologiche dei fermenti lattici per divergenze individuali*. « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 54, 295, 1921; « Rend. R. Acc. Lincei », 30, 312 (1921).
- *Sugli enzimi microbici abituali*. « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 73, 475 (1939).
- *Nuovi contributi alla mia dottrina microbiologica dell'insilamento lattico*. « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 74, 343 (1941).
- *L'orientation moderne de l'ensilage des fourrages*, « Bull. Mensuel Rens. Techn. Inst. Int. Agriculture », Rome 1942, 33^e An., n. 3.
- ARNAUDI C., « Rend. R. Acc. Lincei », 29, 5-6 (1938).
- BERGER J., JOHNSON M. e PETERSON W. H., « Journ. Bakter. », XXXVI, 521, (1938); « J. Biol. Chem. », 124, 395, (1938).
- EICHHOLTZ F., *Sauerkraut und ähnliche Gärerzeugnisse*; F. WIEWEG, Braunschweig, (1941).
- KEIL W. e KRITTER B., « Biochem. Zeits. », 276, 61 (1935).
- KLUYVER A. J., *Ergebn. d. Enzymforschung*, IV, 230, (1935).
- MYSS-CHODAT F., *Les noces d'or d'un savant italien. Une date dans la microbiologie lactique*. « Zyma-journal », Nyon, Suisse, 69-73, n. 4, (1942).

COMMEMORAZIONE DI FERRUCCIO VANZETTI

Tenuta ⁽¹⁾ da FRANCESCO PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia

La sera del 22 febbraio u. s., chiudeva a Torino la sua nobile esistenza il nostro stimato ed amato camerata prof. FERRUCCIO VANZETTI, alla nostra famiglia proveniente da quella più antica dei Lincei. A Torino, dove aveva tenuto, per circa un ventennio, la cattedra che era stata del Suo Maestro, fu unanime il senso di cordoglio non soltanto fra i colleghi e gli allievi, ma in tutta la cittadinanza, presso la quale, per la Sua bontà e per la Sua rettitudine, egli contava numerose e sincere amicizie.

Nato a Padova nel 1863, e laureatosi in quella Università nel 1897, scelse subito quella via della Scienza che dal motto « mortui vivos docent » trae origine e fondamento per penetrare nell'intimo meccanismo dei processi morbosi. E appena l'anno dopo della Laurea entrò nell'Istituto di Anatomia patologica diretto da Pio Foà, un maestro di grande e meritata rinomanza, che lo ebbe assai caro e gli fu amorevole guida in tutta la sua carriera. Nel 1914 fu nominato incaricato di Anatomia patologica all'Università di Perugia, nel 1915 ebbe l'incarico della stessa materia nell'Università di Sassari, dove fu nominato professore straordinario nel 1920. Successivamente fu trasferito per un anno scolastico a Cagliari, e per un altro a Catania; ed infine, nel 1923, ritorna il VANZETTI a Torino, in quello stesso Istituto che aveva conosciuto le prime e più feconde ansie del suo lavoro.

L'opera scientifica del VANZETTI può nettamente distinguersi in due periodi. Il primo, quello della preparazione, è caratterizzato dalla ricerca scientifica, intesa però soltanto come aspirazione a far progredire le nostre conoscenze su determinati argomenti in parte già noti, il secondo è caratterizzato dall'attività didattica, come espressione di un pensiero maturatosi nel quotidiano tirocinio di insegnante.

L'anatomia patologica, quale disciplina intesa al riconoscimento della natura, della estensione, delle conseguenze di un processo morboso, accertate con metodi morfologici, trae notevole vantaggio dallo studio

(¹) Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

analitico dell'alterazione anatomica. Perciò anche la casistica anatomo-patologica ha il suo valore nella determinazione del quadro particolare offerto dalle entità morbose, e non rappresenta un lavoro del tutto infondo per la Scienza. Sono molto da apprezzarsi, in questo settore, gli ammaestramenti del tavolo anatomico esposti nelle seguenti pubblicazioni del VANZETTI:

- 1° *Infezione tifosa senza lesioni intestinali e con nefrite;*
- 2° *Flebite produttiva della cava e delle vene sovraepatiche con cirrosi del fegato;*
- 3° *Di una rara forma di meningite basilare;*
- 4° *Sulle infiammazioni necrotiche di origine batterica;*
- 5° *Contributo alla conoscenza delle atresie congenite delle vie biliari;*
- 6° *Sopra un caso di epignato;*
- 7° *Sopra un caso di neuroblastoma maligno del cervello;*
- 8° *Su di un caso di aplasia delle vene sovraepatiche.*

Ma l'indirizzo più moderno di questa disciplina intendendo, sulla solida base della conoscenza della struttura, collegarsi con le altre discipline biologiche, per raggiungere le alte finalità assegnate alla medicina, ricorre all'esperimento che permette di seguire passo per passo lo svolgimento di un processo morboso. Così procedendo, si allontana dall'arida morfologia patologica, semplicemente descrittiva, insufficiente da sola a dar ragione di tanti quadri morbosi, e penetra nell'intimo determinismo dei complicati meccanismi patologici, di cui segue l'evoluzione, con grande profitto delle nostre conoscenze. Il VANZETTI, invero, fu tra i primi nostri anatomo-patologi a sentire questa necessità, e perciò troviamo molti suoi lavori condotti in modo da chiarire, con l'indagine sperimentale, alcuni determinati quesiti di patologia. Tra questi mi piace di segnalare quello fatto sul trapianto della ghiandola tiroide embrionale in vari tessuti, e specialmente nel midollo osseo, che egli dimostrò essere terreno che si presta meglio di altri tessuti al trapianto; fatto questo che può chiarire alcuni momenti della patologia umana, che valgono a favorire lo sviluppo delle metastasi di un cancro tiroideo nel midollo osseo. Noi non sappiamo, cioè, neanche oggi dare una spiegazione della preferenza che il cancro della tiroide ha di dare metastasi nel midollo osseo, perchè siamo ancora poco informati sulle esigenze particolari che ha questo tumore per il suo sviluppo, e dei rapporti di interrelazione chimica fra tumore e tessuto che lo circonda ancora quasi nulla sappiamo, ma è certo che questa osservazione sperimentale di VANZETTI, come io ho fatto rilevare in altra occasione, è significativa ai fini di dare una spiegazione della distribuzione delle metastasi che non tenga conto soltanto dell'anatomia della circolazione.

Un'altra ricerca sperimentale di notevole importanza, scientifica e pratica è quella che si riferisce alla esistenza, o meno, di una endocardite tos-

sica. Da VIRCHOW in poi si era rassodata la dottrina dell'unità etiologica dell'endocardite, e si era affermato che le due forme anatomiche principali, l'ulcerosa e la verrucosa, avevano essenzialmente una origine infettiva eguale, pur essendo diverse fra loro per i caratteri macroscopici: tuttavia il fatto che nell'endocardite ulcerosa si otteneva costantemente un reperto batteriologico, che in molti casi di endocardite verrucosa era invece difficile a mettersi in evidenza, fece avanzare l'ipotesi che tali forme amicrobiche fossero dovute all'azione tossica dei veleni bacterici provenienti da focolai lontani dell'organismo. Le ricerche di VANZETTI con la tossina difterica e con quella dello stafilococco piogeno albo, dimostrano che tale ipotesi non è suffragata dalla prova sperimentale.

Le sue ricerche sperimentali più importanti, riguardano le alterazioni tubercolari e quelle sifilitiche dei vasi sanguigni, e il meccanismo istopatologico dei conseguenti aneurismi. Punto di partenza che lo indusse alla studio sperimentale delle lesioni tubercolari dei vasi fu l'osservazione al tavolo anatomico delle localizzazioni del processo tubercolare nell'apparato circolatorio. È vero che si conosceva già una cosiddetta *endangitis tuberculosa* (BENDA) data da presenza di tubercoli nell'intima dei vasi, dovuta a trasporto metastatico di bacilli tubercolari per mezzo della via sanguigna, ed una *periangitis tuberculosa* (WEIGERT) data da diffusione del processo tubercolare da focolai circostanti nella parete vasale, ma le lacune e le incertezze delle nostre conoscenze sulle suddette forme erano ancora molte, e le ricerche sperimentali di VANZETTI contribuirono assai ad una migliore comprensione della intricata materia. In via sperimentale, le alterazioni vasali della tubercolosi erano state studiate soltanto da STERNBERG, ma per quelle sifilitiche dei vasi VANZETTI non ebbe precursori. All'epoca delle sue ricerche solo da poco era stato scoperto l'agente etiologico della lue, e le indagini di VANZETTI riescono pregevoli anche per il fatto che l'infezione sifilitica sperimentale, con ceppi molto virulenti di spirocheta, fu da lui studiata anche in altri tessuti e sistemi dell'organismo, e le alterazioni generali messe in relazione con questa preminente alterazione luetica prodotta dall'agente nell'apparato circolatorio.

Gli esperimenti del VANZETTI, riproducendo nelle sue varie fasi il processo arteritico specifico quale si osserva nella patologia umana, valgono a renderci conto delle diverse modalità con cui si presenta nell'uomo lo stesso processo. Con l'esperimento fu possibile infatti ottenere ora l'infiltrazione diffusa dell'avventizia e della media, ora l'infiltrazione circoscritta, a focolai, come anche si è ottenuta la forma sclerosante, quale esito dell'infiltrazione granulomatosa. Inoltre, risulta ben documentata la importante conclusione che la proliferazione dell'intima rappresenta il primo risentimento del vaso di fronte all'invasione del processo sifilitico, che si svolge indipendentemente dalle alterazioni dell'av-

ventizia e della media, come fatto primario per influenza diretta dell'agente sifilitico, e non come fatto secondario alla lesione delle tonache vasali. Infine, anche in queste lesioni sperimentali, come nelle umane, non si è ritrovata la spirocheta di SCHAUDINN, che scompare rapidamente anche dal focolaio primitivo di inoculazione, e ciò induce il VANZETTI a pensare che la spirocheta, una volta localizzatasi in prossimità dell'arteria stessa possa determinare l'insorgenza del granuloma e della lesione vasale anche a distanza.

Il secondo periodo della vita scientifica di FERRUCCIO VANZETTI è tutto dedicato all'insegnamento, da lui fatto in piena comprensione dell'immensa importanza che gli ammaestramenti sorgenti dal tavolo anatomico hanno per l'insegnamento clinico. L'anatomia patologica, infatti, che tratta stati patologici abnormi dell'individuo morto, costituisce il substrato di quei processi funzionali abnormi dell'individuo vivente che sono trattati dal clinico, il quale, se non conosce le alterazioni del substrato in una determinata malattia, non potrà mai risalire alle alterazioni funzionali, e alla interpretazione dei sintomi che sono espressioni di tali disturbi. Notevole parte dell'attività del VANZETTI, dopo raggiunta la Cattedra, si svolse come fatica di settore e di ricostruttore mediante epicrisi del processo morboso e in questo necessario, anzi indispensabile, esercizio quotidiano per un serio insegnamento dell'arte medica, riusciva ad appassionare docenti e studenti, che sempre gli tributarono ammirazioni e riconoscenza.

Una espressione molto feconda del suo attaccamento all'insegnamento e alla Scuola è data dalla sua attività di trattatista, dove profuse il tesoro della sua esperienza prima come collaboratore nel grande *Trattato di Anatomia patologica* di PRO FOÀ, in cui svolse la parte riguardante l'apparato circolatorio, e poi, come Direttore del *Trattato italiano di Anatomia patologica* che egli insieme con valorosi colleghi iniziò a pubblicare nel 1938, e che costituisce una eccellente guida per lo studio di questa fondamentale disciplina.

Intorno a quest'opera egli stava ancora lavorando, per preparare una seconda edizione, quando la morte lo colse in pieno fervore di attività e di intenti. L'Università italiana ha perduto una elevata e dignitosa figura di studioso e Maestro, e la nostra Accademia si unisce all'unanime cordoglio per la Sua dipartita.

Matematica. — *Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito.* Nota I di SANDRO FAEDO, presentata⁽¹⁾ da LEONIDA TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In questa Nota comunico alcuni risultati di una mia Memoria⁽²⁾ attualmente in corso di stampa nella quale, seguendo il metodo diretto di L. TONELLI, viene costruito il Calcolo delle Variazioni per gli integrali

$$I'_{\infty} = \int_a^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx,$$

$$I''_{\infty} = \int_{-\infty}^b f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx,$$

$$I'''_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx,$$

dove

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x)$$

sono le equazioni di una curva in un S_{n+1} .

In tale Memoria sono trattate le questioni che presentano difficoltà nuove nei confronti dell'integrale

$$I = \int_a^b f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx, \quad (a \text{ e } b \text{ finiti})$$

e per cui gli integrali I'_{∞} , I''_{∞} e I'''_{∞} si comportano in modo diverso dall'integrale I .

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

⁽²⁾ S. FAEDO, *Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito*. Pontificia Accademia delle Scienze «Commentationes», 1943.

1. Possiamo limitarci a considerare l'integrale $I'_\infty = I_\infty$, essendo ovvie le modificazioni da apportarsi per gli integrali I''_∞ e I'''_∞ .

Si consideri uno spazio S_{mn+1} ad $mn + 1$ dimensioni, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali

$$[x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \dots, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}].$$

Diremo *campo A* la totalità dei punti di tale spazio per cui è $x \geq \omega$ ⁽³⁾. Per ogni punto di *A* e ogni valore finito di $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ è definita una funzione

$$f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}),$$

continua insieme alle sue derivate ⁽⁴⁾

$$f_{y_i^{(m)}, y_s^{(m)}} \quad (i = 1, \dots, n; s = 1, 2, \dots, n).$$

Una curva *C* di equazioni

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x) \quad , \quad \omega \leq a \leq x < +\infty$$

e tale che i punti

$$[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x), \dots, y_1^{(m-1)}(x), \dots, y_n^{(m-1)}(x)]$$

appartengono al campo *A* si dice una *curva ordinaria per I_∞* ⁽⁵⁾ se:

le $y_i(x), \dots, y_n(x)$ sono assolutamente continue in ogni intervallo finito $(a, a + X)$, con $X > 0$, insieme alle loro derivate dei primi $m - 1$ ordini;

esiste finito l'integrale (nel senso del LEBESGUE)

$$\int_a^{a+X} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx;$$

esiste finito l'integrale generalizzato

$$I_\infty = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_a^{a+X} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx.$$

⁽³⁾ In questa breve esposizione ci limitiamo a considerare il campo *A* così definito; nella Memoria cit. in ⁽²⁾, se ne dà invece la definizione più generale.

⁽⁴⁾ In talune questioni si può, in modo analogo all'integrale *I*, supporre soltanto la continuità delle derivate prime.

⁽⁵⁾ Cfr. S. CINQUINI, *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*. « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. IX, pagg. 253-261.

Quindi, se C è una curva ordinaria, la funzione $f[x_1, y_1(x), \dots, y_n^{(m)}(x)]$ è assolutamente integrabile su $(a, a + X)$, ma può non esserlo sull'intervallo $(a, +\infty)$.

È noto cosa s'intende per curva di accumulazione di ordine m per una classe di curve $C[y_1(x), \dots, y_n(x)]$ ⁽⁶⁾. Si abbia un insieme E di infinite curve C ordinarie per I_∞ . Consideriamo la curva $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \dots, \bar{y}_n(x)]$ ($\bar{a} \leq x < +\infty$) e indichiamo con E_X l'insieme degli archi delle curve di E per cui è $x \leq \bar{a} + X$, con $X > 0$. \bar{C} si dice una *curva di accumulazione al finito di ordine m* per l'insieme E se, comunque grande si prenda X , l'arco di \bar{C} per cui è $x \leq \bar{a} + X$ è una curva di accumulazione di ordine m per E_X .

Un insieme E di curve ordinarie per I_∞ si dice una *classe completa al finito di ordine m* , quando ogni sua curva di accumulazione al finito di ordine m , se è una curva ordinaria per I_∞ , appartiene ad E .

Noi considereremo sempre delle classi K_∞ di curve entro cui ricercare le estremanti di I_∞ soddisfacenti all'unica condizione all'infinito di rendere convergente l'integrale generalizzato I_∞ . Ove si ponessero ulteriori vincoli all'infinito per le curve in esame, queste non costituirebbero più in generale una classe di curve completa al finito. Ad esempio la classe delle curve di equazione $y = y(x)$ e per cui è $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \beta$ non è completa al finito (di ordine 1). S. CINQUINI ⁽⁷⁾ ha dato un esempio per cui in tale classe il minimo viene a mancare.

2. Per l'integrale I si hanno due importanti teoremi di esistenza dell'estremo, dovuti a NAGUMO ⁽⁸⁾ e a MC SHANE ⁽⁹⁾. L. TONELLI ⁽¹⁰⁾ ha dimostrato, nel caso delle curve piane, l'equivalenza di tali teoremi; tale equivalenza viene qui provata anche per integrali dipendenti da curve di un S_{n+1} , con $n > 1$.

Si stabiliscono inoltre dei teoremi di esistenza del minimo assoluto per l'integrale I_∞ di due tipi ben distinti, a seconda che è soddisfatta o no la seguente condizione α :

⁽⁶⁾ Cfr. S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n* . « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. VI, 1936, 1. pagg. 172-173.

⁽⁷⁾ S. CINQUINI, loc. cit. in ⁽⁵⁾, nota a pag. 253.

⁽⁸⁾ M. NAGUMO, *Ueber die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem*. « Japanese Journal of Mathematics », vol. VI, 1929, pagg. 173-182.

⁽⁹⁾ E. J. MC SHANE, *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations*. « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. III, 1934, pag. 298.

⁽¹⁰⁾ L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*. « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », S. II, vol. III, 1934, pag. 416.

« La funzione $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ è tale che per ogni punto del campo A ed ogni valore finito di $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ è

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \geq \psi(x),$$

con $\psi(x)$ tale che esista finito

$$\int_{\omega}^{+\infty} \psi(x) dx.$$

Nel caso che sussista la condizione α , si può, con un procedimento di S. CINQUINI ⁽¹¹⁾, trattare l'integrale I_{∞} in modo analogo all'integrale I e si riesce a stabilire agevolmente la semicontinuità inferiore di I_{∞} , potendosi trascurare l'influenza di

$$\int_{\vec{x}}^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx,$$

per X sufficientemente grande.

Invece quando non sia soddisfatta la condizione α non è più lecito trascurare

$$\int_{\vec{x}}^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx$$

e si deve andare a studiare il comportamento della funzione

$$f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Ciò premesso, enunciamo alcuni teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per l'integrale I_{∞} , la cui dimostrazione trovasi nel nostro lavoro citato in ⁽²⁾ :

TEOREMA I: *Se I_{∞} è quasi regolare positivo ed è soddisfatta la condizione α ; se in corrispondenza ad ogni numero h , con $h > \omega$, esiste una funzione $\Phi_h(z)$, definita in $(0, +\infty)$, inferiormente limitata, tale che $\frac{\Phi_h(z)}{z} \rightarrow +\infty$ per $z \rightarrow +\infty$ e per la quale si abbia nei punti di A in cui è $x \leq h$*

$$f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \geq \Phi_h(\sqrt{y_1^{(m)2} + \dots + y_n^{(m)2}});$$

⁽¹¹⁾ S. CINQUINI, loc. cit., in ⁽⁵⁾, pag. 258.

⁽¹²⁾ I teoremi I e II ne estendono uno dato da S. CINQUINI, loc. cit. in ⁽⁵⁾ pagg. 259-260.

allora in ogni classe K_∞ di curve $C(y_1(x), \dots, y_n(x), a \leq x < +\infty)$ ordinarie per I_∞ , che sia completa al finito di ordine m e tale che per ogni curva esista almeno un punto $[\bar{x}, y_1(\bar{x}), \dots, y_n^{(m-1)}(\bar{x})]$ appartenente a un dato sottoinsieme limitato e chiuso di A , esiste sempre il minimo assoluto di I_∞ ⁽¹²⁾.

TEOREMA II: Le conclusioni del Teorema I rimangono se in luogo della b) sussiste l'altra condizione b'):

1°) in corrispondenza ad ogni coppia di numeri $h > 0$, $Y > 0$, esiste una funzione $\Phi_{h,Y}(z)$, definita in $(0, +\infty)$ inferiormente limitata, tale che $\frac{\Phi_{h,Y}(z)}{z} \rightarrow +\infty$ per $z \rightarrow +\infty$ e per cui è, in tutti quei punti di A che appartengono al campo $A_{h,Y} = \{\omega \leq x \leq h, \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^{(m-1)}} < Y\}$,

$$f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) \geq \Phi_{h,Y}(\sqrt{y_1^{(m)^2} + \dots + y_n^{(m)^2}});$$

2°) in corrispondenza ad ogni h esistono un numero $\lambda_h > 0$ e una funzione $\varphi_h(u)$, definita per $|u| \geq \lambda_h$ continua e tale che

$$\int_{\lambda_h}^{+\infty} \varphi_h(u) du = +\infty, \quad \int_{-\infty}^{-\lambda_h} \varphi_h(u) du = +\infty,$$

in modo che in tutti i punti di A in cui è

$$\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^{(m-1)^2}} \geq \lambda_h$$

sia anche

$$f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \geq \sqrt{y_1^{(m)^2} + \dots + y_n^{(m)^2}} \varphi_h(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^{(m-1)^2}})$$

per tutti gli $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ per cui è

$$\sqrt{y_1^{(m)^2} + \dots + y_n^{(m)^2}} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^{(m-1)^2}} \geq 1.$$

Questi teoremi sono l'estensione all'integrale I_∞ di quello dato da NAGUMO si danno anche teoremi che estendono all'integrale I_∞ quello di Mc SHANE.

Quando non sia soddisfatta la condizione α sussiste il

TEOREMA III: Esista un $\varepsilon > 0$ per cui si abbia

$$a_i(x) \geq \varepsilon, \quad b_i(x) \geq \varepsilon, \quad c_i^2(x) \leq (a_i(x) - \varepsilon)(b_i(x) - \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e siano integrabili su $(a, +\infty)$ le funzioni $[c_i(x) - \lambda_i]^2$, $d_i^2(x)$ e $\psi(x)$, dove le λ_i sono opportune costanti. Allora l'integrale

$$\int_a^\infty \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i(x) y_i^2 + b_i(x) y_i'^2 + 2c_i(x) y_i y_i' + 2d_i(x) y_i + 2e_i(x) y_i'] + \psi(x) \right\} dx$$

ammette minimo in K_∞ .

Per stabilire il Teorema III si dà dapprima un teorema di confronto che permette di dedurre l'esistenza dell'estremo assoluto di un integrale quando sia noto che l'ammette un altro integrale, legato al primo da opportune relazioni e si stabilisce la seguente proposizione di carattere asintotico:

« Si abbiano, per $x \geq a$, due funzioni continue e non negative $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, tali che esistano un $\sigma > 0$ ed un $x_0 \geq a$ in modo che sia

$$\varphi(x) \geq \sigma, \quad \psi(x) \geq \sigma \quad \text{per } x \geq x_0.$$

Se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua in ogni intervallo $(a, a + X)$, con $X > 0$, e tale che esista finito

$$\int_a^{+\infty} \{ \varphi(x) y^2(x) + \psi(x) y'^2(x) \} dx$$

necessariamente è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

(Continua).

Matematica. — *Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* ⁽¹⁾. Nota di GAETANO FICHERA, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Siano: E un insieme di punti di uno spazio euclideo a r dimensioni, misurabile secondo LEBESGUE, di misura non nulla, finita o infinita, del quale diremo x_1, x_2, \dots, x_n , punti arbitrari; $E^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) l'insieme dello spazio a νr dimensioni, luogo dei punti le cui coordinate si ottengono al variare di x_1, x_2, \dots, x_n in E , prendendo insieme quelle di tutti questi punti; $K_\nu (x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) assegnate funzioni reali dei punti x_1, x_2, \dots, x_ν di quadrato sommabile in $E^{(\nu)}$ (nel senso di LEBESGUE), funzioni che potremo sempre supporre simmetriche nei punti x_1, x_2, \dots, x_ν , ed infine $\varphi(x)$ una funzione dello spazio H (di HILBERT), costituito dalle funzioni reali di quadrato sommabile in E .

Nello spazio H riesce ben definito il funzionale

$$P[\varphi] = \sum_{\nu=1}^n P_\nu[\varphi]$$

con

$$P_\nu[\varphi] = \int_{E^{(\nu)}} K_\nu(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_\nu) dx_1 dx_2 \dots dx_\nu,$$

che diremo, seguendo la terminologia adottata dal prof. PICONE nel suo *Corso di Analisi Superiore*, tenuto all'Università di Roma nell'anno accademico 1940-41 ⁽³⁾, un *polinomiale in φ di grado n* , se l'addendo $P_n[\varphi]$ non è identicamente nullo.

Nel detto corso trovasi esposta la trattazione dell'esistenza del massimo e del minimo del polinomiale $P[\varphi]$ nella sfera S_R di HILBERT

⁽¹⁾ Lavoro del Laboratorio d'Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

⁽³⁾ Cfr. M. PICONE, *Analisi superiore* (dispense litografate), D. U. S. A. (Anno Accademico 1940-41, Roma), pag. 306.

di raggio assegnato $R > 0$, cioè nell'insieme dello spazio H , costituito dalle funzioni per cui

$$\int [\varphi(x)]^2 dx \leq R^2 \quad (1).$$

L'indicata esposizione è basata sull'introduzione della metrica di FRÉCHET nello spazio H , la quale consente di pervenire immediatamente ai teoremi d'esistenza degli estremi, poichè, in detta metrica, la sfera di HILBERT riesce un insieme chiuso e compatto, laddove il funzionale $P[\varphi]$ vi è continuo.

Quasi simultaneamente sono apparsi nel 1939 due lavori dei proff. PICONE e TONELLI ⁽²⁾ nei quali si studiano ulteriormente gli estremi del polinomiale $P[\varphi]$ nel caso quadratico, che scriveremo al modo seguente

$$P[\varphi] = \iiint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy - 2 \int f(x) \varphi(x) dx,$$

in cui, giova ripeterlo, $K(x, y)$ e $f(x)$ sono due funzioni assegnate di quadrato sommabile, rispettivamente in $E^{(2)}$ e in E , la prima essendo simmetrica nei due punti x e y ⁽³⁾.

Nella Nota del prof. PICONE si studiano gli estremi del polinomiale $P[\varphi]$ in tutto lo spazio di HILBERT. In essa, indicata con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots)$$

la successione, certamente esistente, costituita dagli autovalori relativi al nucleo $K(x, y)$, ciascuno ripetuto un numero di volte pari al rispettivo rango ⁽⁴⁾, e con

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

⁽¹⁾ Per semplicità tipografica tralasceremo d'indicare l'insieme E , al quale col simbolo \int intenderemo sempre estesa l'integrazione.

⁽²⁾ Cfr. M. PICONE. *Sopra un problema di Calcolo funzionale*. [« Rend. della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat. » della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXI, serie 6^a (1939)]; L. TONELLI. *Su alcuni funzionali*. [« Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XVIII, Bologna (1939)].

⁽³⁾ Poichè si ha

$$\iint K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy = \iint \frac{K(x, y) + K(y, x)}{2} \varphi(x) \varphi(y) dx dy,$$

ed essendo la funzione $\frac{K(x, y) + K(y, x)}{2}$ simmetrica nei due punti x e y , tale può supporci la $K(x, y)$.

⁽⁴⁾ Per la terminologia cfr. M. PICONE. *Appunti di Analisi superiore*. [Rondinella, Napoli (1940)], pagg. 561-655.

un sistema ortonormale di autosoluzioni, spettrale per lo stesso nucleo, con

$$\varphi_n(x) = \lambda_n \int K(x, y) \varphi_n(y) dy,$$

ed osservato che, se il nucleo $K(x, y)$ è indefinito, il funzionale ha per estremo inferiore $-\infty$ e superiore $+\infty$, si perviene al seguente risultato:

« Se il nucleo $K(x, y)$ è semidefinito, per esempio, positivo, il funzionale $P[\varphi]$ ha per estremo superiore $+\infty$.

Se non sussiste l'eguaglianza (nella metrica di HILBERT)

$$[1] \quad f(x) = \sum_i \varphi_i(x) \int f(x) \varphi_i(x) dx,$$

il polinomiale ha in H estremo inferiore $-\infty$.

Se sussiste la [1], in particolare se il nucleo $K(x, y)$ è definito, lo stesso polinomiale ha per estremo inferiore la somma della serie

$$[2] \quad -\sum_i a_i^2 \lambda_i,$$

essendo

$$a_i = \int f(x) \varphi_i(x) dx,$$

e condizione necessaria e sufficiente affinché $P[\varphi]$ abbia il minimo in H , è la convergenza della serie di PICARD

$$[3] \quad \sum_i a_i^2 \lambda_i^2.$$

Se ciò avviene, una funzione minimante è data dalla

$$\varphi_0(x) = \sum_i a_i \lambda_i \varphi_i(x)$$

e per ogni tale funzione φ deve aversi

$$\int \varphi(x) \varphi_i(x) dx = a_i \lambda_i.$$

La serie [2] può convergere, e non convergere la [3], ed in tal caso si presenta il fatto singolare che il funzionale $P[\varphi]$, pur avendo in H estremo inferiore finito, non vi ha minimo.

Nella Memoria del prof. TONELLI si ricercano, fra l'altro, indipendentemente dalla teoria delle equazioni integrali e con i metodi diretti a lui dovuti, gli estremi del polinomiale quadratico $P[\varphi]$ sulla frontiera della sfera di HILBERT di raggio assegnato e si perviene al risultato:

« Se il nucleo $K(x, y)$ è semidefinito positivo il polinomiale $P[\varphi]$ è dotato di massimo nella frontiera di S_R ».

Ma in tutta la sfera di HILBERT il polinomiale possiede, come abbiamo in principio ricordato, il massimo e il minimo, comunque si supponga il

nucleo $K(x, y)$, semidefinito o indefinito, e si offre pertanto spontaneamente la ricerca concernente la *ubicazione* in quella sfera delle estremanti: stabilire, cioè, quando una minimante o massimante è interna o sulla frontiera di detta sfera. Ovviamente, conseguenza della ricerca saranno altresì teoremi di esistenza per il massimo e il minimo di $P[\varphi]$ sulla frontiera di S_R .

In un lavoro, di prossima pubblicazione, ho conseguito in proposito i seguenti risultati:

a) Il nucleo $K(x, y)$ è definito positivo. Se

$$R^2 \leq \sum_i a_i^2 \lambda_i^2,$$

il minimo e il massimo di $P[\varphi]$ in S_R sono conseguiti su FS_R ⁽¹⁾ e soltanto su FS_R . Se

$$R^2 > \sum_i a_i^2 \lambda_i^2$$

il massimo in S_R è conseguito su FS_R e soltanto ivi, il minimo nell'interno di S_R , laddove il polinomiale $P[\varphi]$ non ha su FS_R minimo, ammettendovi però per estremo inferiore l'indicato minimo in S_R .

b) Il nucleo $K(x, y)$ è semidefinito (ma non definito) positivo. Se non sussiste la [1] oppure, se, sussistendo la [1], si ha

$$R^2 \leq \sum_i a_i^2 \lambda_i^2,$$

il polinomiale $P[\varphi]$ consegue su FS_R e soltanto su FS_R il massimo e il minimo in S_R . Se, sussistendo la [1], si ha

$$R^2 > \sum_i a_i^2 \lambda_i^2,$$

il massimo di $P[\varphi]$ in S_R è conseguito su FS_R e soltanto ivi, laddove, comunque si assegni un $\rho > 0$, con

$$\rho^2 \geq \sum_i a_i^2 \lambda_i^2,$$

ad una distanza ρ dall'origine dello spazio H esistono minimanti di $P[\varphi]$ in S_R , che sono anche tali in tutto H .

c) Il nucleo $K(x, y)$ è indefinito. Il minimo e il massimo di $P[\varphi]$ in S_R sono conseguiti su FS_R e soltanto su FS_R .

Ho voluto anche ricercare criteri di unicità per le estremanti di $P[\varphi]$ in S_R e sono pervenuto ad un generale teorema, che assegna le condizioni necessarie e sufficienti per tale unicità, nonchè ad un semplice criterio soltanto sufficiente.

⁽¹⁾ Indico con FS_R la frontiera di S_R .

Matematica. — *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari.* — II. *Applicazioni.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

5. — La configurazione caratteristica permette di determinare facilmente gl'invarianti della trasformazione puntuale, fino all'intorno del 2° ordine della coppia (O, O') . Segue infatti dal n. 2:

Gl'invarianti di 2° ordine (proiettivi, affini, metrici) di una trasformazione puntuale T fra due spazi lineari, in una coppia (O, O') di punti corrispondenti, sono gl'invarianti della configurazione caratteristica di T in (O, O') .

Nella geometria metrica, ricordando (n. 4) che la configurazione caratteristica è costituita dalle rette inflessionali e dai punti limiti si ha:

Gl'invarianti metrici di 2° ordine di una trasformazione puntuale T fra due spazi lineari, in una coppia (O, O') di punti corrispondenti, sono riconducibili agli angoli che le rette inflessionali formano fra di loro e alle distanze dei punti limiti da O , oppure da O' (a seconda dello spazio a cui appartengono).

Naturalmente fra questi angoli e segmenti vanno scelti quelli indipendenti cioè che si fa subito quando si conoscano gli elementi liberi della configurazione (n. 4).

Per $r = 2$, sono elementi liberi (n. 4) le rette inflessionali e quattro punti limiti (presi nel modo indicato), sicchè si hanno complessivamente otto invarianti metrici e precisamente: i due angoli che due rette inflessionali di un piano formano con la terza, i due angoli che due rette inflessionali dell'altro piano formano con la terza e le quattro distanze dei quattro punti limiti da O , oppure da O' .

Era ben noto che gl'invarianti metrici di 2° ordine di una trasformazione puntuale fra due piani fossero otto ⁽²⁾, ma si noterà il modo sem-

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 21 novembre 1942-XXI.

⁽²⁾ Di solito si assumono come assi cartesiani le direzioni principali (si veda ad es.: CREANGA, *Sulla trasformazione degli intorno del 2° ordine di due punti corrispondenti, nelle corrispondenze puntuali fra due spazi euclidei*, « Rend. di

plice con cui siamo pervenuti ad essi e la immediata interpretazione geometrica degl'invarianti stessi ⁽³⁾.

Per $r = 3$, sono elementi liberi (n. 4) le sette rette inflessionali di uno spazio, quattro rette inflessionali dell'altro e cinque punti limiti (presi nel modo indicato), si hanno quindi complessivamente 21 invarianti metrici e precisamente: *gli 11 invarianti metrici delle sette rette inflessionali di uno spazio* ⁽⁴⁾, *i 5 invarianti metrici della 4 rette inflessionali dell'altro spazio* ⁽⁵⁾ e infine le 5 distanze dei 5 punti limiti da O oppure da O' .

Era già noto che gl'invarianti metrici di 2° ordine di una trasformazione puntuale fra due spazi fossero 21 ⁽⁶⁾ ma si noterà anche qui la semplicità con cui siamo pervenuti a questi invarianti e la immediata interpretazione geometrica di essi.

Un'interpretazione geometrica dei 21 invarianti è stata già data da CREANGA ⁽⁷⁾. Sarebbe quindi interessante esprimere i 21 invarianti di questo Autore mediante quelli da me ora ottenuti.

Nella Geometria metrica riferimenti cartesiani intrinseci dei due S_r sono quelli formati da r rette inflessionali per O e da r rette inflessionali

Matematica », ser. 5, vol. 1, pag. 177, 1940) e le equazioni della trasformazione si scrivono

$$\begin{aligned}x' &= ax + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots \\y' &= bx + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + \dots\end{aligned}$$

e i coefficienti $a, b, a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}$ sono gli otto invarianti del 2° ordine della trasformazione.

⁽³⁾ Rimarrebbe da vedere come i coefficienti della equazione della nota ⁽²⁾, e così gli altri invarianti metrici di 2° ordine della trasformazione già noti, si esprimano mediante i nostri otto invarianti.

⁽⁴⁾ In S_3 sette rette passanti per un punto O hanno 11 invarianti metrici poichè tre di esse porgono tre (angoli) invarianti e ciascuna delle altre quattro è individuata da due angoli rispetto alle altre tre.

⁽⁵⁾ Infatti, come si è detto nella nota ⁽⁴⁾, tre rette di S_3 uscenti da un punto O porgono tre invarianti e la rimanente è individuata da due angoli rispetto alle prime tre.

⁽⁶⁾ Assumendo come triedri cartesiani i triedri principali (si veda ad es.: CREANGA, op. cit., pag. 177) le equazioni della trasformazione si scrivono:

$$\begin{aligned}x' &= ax + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + \dots \\y' &= by + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{23}yz + \dots \\z' &= cz + c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{12}xy + c_{13}xz + c_{23}yz + \dots\end{aligned}$$

e i coefficienti $a, b, c, a_{11}, \dots, c_{23}$ sono i 21 invarianti del 2° ordine della trasformazione.

⁽⁷⁾ CREANGA, op. cit.; CREANGA ha, più precisamente, dato le interpretazioni geometriche dei 21 coefficienti delle equazioni della nota ⁽⁶⁾.

per O' (converrà anzi assumere per queste r rette le corrispondenti delle prime r nella proiettività ω). Questi riferimenti finora non sono stati utilizzati mentre, pur non essendo ortogonali (in generale), sono più convenienti di quelli dei triedri principali ⁽⁸⁾ poichè fanno intervenire un numero di coefficienti inferiore.

Rimane da vedere come si esprimano mediante gl'invarianti da me ottenuti i coefficienti dell'intorno del 2° ordine, quando si assumano i riferimenti nel modo indicato. I coefficienti dell'intorno del 1° ordine sono i coefficienti di dilatazione lineare ⁽⁹⁾ relativi alle rette inflessionali che si sono assunte come assi cartesiani. Ora si ha:

Il coefficiente di dilatazione lineare relativo ad una retta inflessionale spiccata da O è

$$-\frac{O'J}{OI}$$

essendo I il punto limite appartenente a tale retta ed J il punto limite posto sulla retta inflessionale corrispondente (in ω) ⁽¹⁰⁾.

Nella Geometria proiettiva ho già osservato ⁽¹¹⁾ che una trasformazione puntuale fra due piani non possiede invarianti proiettivi fino all'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') di punti corrispondenti. Una trasformazione puntuale fra due S_3 possiede invece invarianti nell'intorno del 2° ordine di una coppia di punti corrispondenti. Basta pensare che le direzioni inflessionali per O sono sette e possono assumersi arbitrariamente.

6. — Anche i problemi relativi all'approssimazione di due trasformazioni puntuali nell'intorno del 2° ordine di una coppia di punti corrispondenti si risolvono assai agevolmente mediante la considerazione delle configurazioni caratteristiche ⁽¹²⁾.

Si ha infatti (n. 2):

Condizione necessaria e sufficiente perchè due trasformazioni puntuali fra due spazi lineari si oscolino in una coppia (O, O') di punti corrispondenti è che in (O, O') abbiano la stessa configurazione caratteristica.

⁽⁸⁾ Si veda ad es.: CREANGA, op. cit., pag. 177.

⁽⁹⁾ Si veda ad es.: CREANGA, op. cit., pag. 177.

⁽¹⁰⁾ Con OI si indica il segmento individuato dai punti O, I ed analogamente.

⁽¹¹⁾ Si veda: VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Nota II, « Rend. della Reale Accademia d'Italia », ser. 7, vol. III, n. 6, 1942.

⁽¹²⁾ Quando due trasformazioni puntuali s'approssimano nell'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') di punti corrispondenti, cioè coincidono in tale intorno, si dirà pure che ivi si *oscolano*.

Esistono particolari trasformazioni T_0 per le quali le proiettività caratteristiche sono subordinate fra le coppie di rette inflessionali dalla T_0 stessa. Segue quindi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione T_0 osculi in una coppia (O, O') una data trasformazione T è che T_0 subordini fra le coppie di direzioni inflessionali (di T) le proiettività caratteristiche (di T).

Questo risultato spiega perfettamente e permette di ridimostrare in modo rapido due teoremi da me ottenuti recentemente. Uno di questi teoremi si riferisce alle trasformazioni quadratiche che osculano una data trasformazione puntuale fra due piani in una coppia (O, O') di punti corrispondenti.

L'altro si riferisce alle trasformazioni cubiche $(3, 3)$ che osculano una data trasformazione puntuale fra due spazi ordinari in una coppia (O, O') di punti corrispondenti.

Infatti è facile verificare che le rette inflessionali di una trasformazione quadratica fra due piani sono quelle che congiungono O (oppure O') coi tre punti singolari della trasformazione e che le proiettività caratteristiche sono quelle subordinate fra le coppie di rette inflessionali corrispondenti (nella proiettività subordinata dalla trasformazione fra i fasci O, O') dalla trasformazione stessa. Sicchè le trasformazioni quadratiche fra due piani sono trasformazioni T_0 . Inoltre si verifica che, assegnati gli elementi liberi di una configurazione fra due piani ($n. 3$) esistono sempre ∞^2 trasformazioni quadratiche che li posseggono. Si conclude col teorema ⁽¹³⁾:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione quadratica osculi nella coppia (O, O') una trasformazione puntuale T fra due piani è che essa subordini fra le coppie di rette inflessionali (di T) le proiettività caratteristiche (di T). E siffatte trasformazioni quadratiche sono ∞^2 . Analogamente si verifica ⁽¹⁴⁾ che le rette inflessionali di una trasformazione cubica $T' (3, 3)$ fra due spazi ordinari (costruibile mediante tre reciprocità fra i due spazi) sono le sette corde uscenti da O (da O') della sestica C_6 (che costituisce la varietà base del sistema omaloidico) e che le proiettività caratteristiche sono quelle subordinate fra le coppie di rette inflessionali corrispondenti (nella proiettività subordinata dalla trasformazione fra le stelle O, O') dalla trasformazione stessa. Sicchè le trasformazioni \bar{T} sono trasformazioni T_0 .

⁽¹³⁾ Si veda: VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi*, Nota I, « Rend. della Reale Accademia d'Italia », ser. 7, vol. III, pag. 722, 1942.

⁽¹⁴⁾ Si veda: VILLA, *Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali fra due spazi mediante trasformazioni cremoniane*, « Rend. di Matematica », ser. 5, vol. III, pag. 222, 1942.

Inoltre si verifica che, assegnati gli elementi liberi di una configurazione fra due spazi (n. 3), esistono sempre ∞^9 trasformazioni \bar{T} che li posseggono. Si conclude col teorema ⁽¹⁵⁾:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione cubica \bar{T} osculi nella coppia (O, O') la trasformazione puntuale T è che essa subordini fra le coppie di rette inflessionali le proiettività caratteristiche. E siffatte trasformazioni \bar{T} sono ∞^9 .

⁽¹⁵⁾ Si veda il mio lavoro cit. nella ⁽¹⁴⁾ a pag. 227.

Astronomia. — *Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORIO NOBILE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Accade non di rado che nello studio dei complessi problemi dell'astronomia stellare moderna gli astronomi, ansiosi di conseguire risultati numerici immediati mentre non hanno (o credono di non avere) dati sufficienti per una trattazione rigorosa, pensino di superare ogni difficoltà sia col ricorrere a talune ipotesi le quali si rivelano spesso in seguito mal giustificate, sia coll'introdurre leggi empiriche discutibili nella loro essenza e nei principî e concezioni su cui si fondano oppure fuor di posto nei casi speciali in esame. Si perviene talvolta, per tali vie, alla costruzione di teorie illusorie ed effimere e sfugge allora in modo definitivo a chi troppo presto si è allontanato dalla via maestra che in non pochi casi un esame più approfondito e rigoroso della materia non presenta grandi difficoltà e vale a mettere in luce, più presto di quanto generalmente si creda possibile, la vera natura dei problemi in questione, a far riconoscere se essi siano determinati e accessibili e, in ogni modo, a ben precisare ciò che sostanzialmente osta perchè possa raggiungersi una soluzione accettabile.

Alle considerazioni e giudizi che precedono — e che si ricollegano strettamente con alcuni rilievi critici da me già fatti colla dovuta ampiezza in pubblicazioni anteriori ⁽²⁾ — sono stato ricondotto nel corso di uno studio sull'argomento della cosiddetta *rotazione galattica*. Non è mia intenzione di entrare qui in un esame speciale della soluzione proposta per l'accennato problema da altri studiosi, in base a procedimenti e metodi che io ritengo, per le ragioni di cui sopra e per altre che emergeranno nel

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

⁽²⁾ Sono queste le seguenti Memorie, che qui contrassegno brevemente con I e II dovendo ad esse riferirmi in seguito:

I) *La nozione di moto proprio solare e il suo valore come elemento per lo studio della evoluzione dell'ammasso galattico.* (« Memorie della Società Astronomica Italiana »; Nuova serie, vol. II, n. I).

II) *Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico.* (« Memorie della Soc. Astron. Italiana »; Nuova serie, vol. IV).

prosegua della discussione, poco raccomandabili. Più utile mi sembra invece che io riferisca senz'altro sulle conclusioni concrete del mio studio, dato il mio convincimento che queste potranno contribuire non poco a far riconoscere le direttive più opportune per eventuali ulteriori ricerche sull'argomento, ove non sembri che il problema stesso sia da abbandonare.

1. Attribuire ad un aggruppamento di punti materiali una rotazione d'insieme intorno ad un asse fisso o istantaneo è cosa che ha, evidentemente, un significato immediato solo quando quei punti si pensino come facenti parte di un sistema rigido. Se l'insieme di quei punti non è indeformabile e si vuole tuttavia parlare di una rotazione di esso, deve intervenire necessariamente o una convenzione che definisca bene il concetto ma che non può mancare di introdurre un elemento arbitrario nella definizione stessa, oppure un dato che valga a caratterizzare la distribuzione delle velocità, o spostamenti, dei punti del sistema per quanto basti a giustificare pienamente la decomposizione *in modo univoco* dell'atto di moto del sistema in quello corrispondente ad un moto rototraslatorio e in una *deformazione pura*, così come avviene, per esempio, nel caso della deformazione infinitesima di un mezzo continuo. È questo secondo caso quello che si presenta nel problema che qui occorre considerare? Evidentemente no, perchè, mentre nelle piccole deformazioni di un mezzo continuo il vettore che individua lo spostamento di un punto generico P è funzione *del punto stesso* e non di altri elementi e da questa ipotesi fondamentale consegue la decomposizione di cui innanzi riguardo all'atto di moto del sistema, condizioni analoghe non sussistono nel caso del sistema galattico, che è un sistema dinamico di punti materiali, gli spostamenti dei quali dipendono dalle mutue attrazioni e dalla configurazione e stato cinetico iniziali del sistema: elementi fra i quali non esiste, *a priori*, alcuna dipendenza o coordinazione. Dovendosi pertanto definire *con una convenzione* la rotazione dell'ammasso galattico ad una data epoca, si può immaginare solidificato tale ammasso nell'epoca considerata e, detto (Σ) il sistema rigido così ottenuto, attribuire a ciascuna stella S_i la velocità (vettore) che si ottiene sommando quella che al punto compete in un moto rototraslatorio di (Σ) con un'altra di vettore u_i , relativa a (Σ). Si vede subito che questa decomposizione non ha carattere di univocità: il moto rigido rimane *arbitrario* e l'arbitrarietà non potrà togliersi se non coll'imporre la condizione che le velocità addizionali u_i debbano verificare condizioni di carattere essenzialmente empirico e pertanto anch'esse più o meno arbitrarie e discutibili.

Ma è bene passare senz'altro ad una analisi rigorosa dei termini del problema della rotazione galattica così come tendono a porlo attualmente gli astronomi. Ciò sarà fatto con notazioni agili e appropriate le quali hanno, fra l'altro, il vantaggio di evitare che questioni del tutto

secondarie, inerenti a particolari sistemi di riferimento, abbiano a distrarre l'attenzione del lettore da ciò che è essenziale nel problema. Si metterà così anche più facilmente in luce la mutua dipendenza di talune questioni delle quali ciascuna trova nell'astronomia tradizionale una trattazione speciale, mentre, ai fini del problema in esame, conviene considerarle tutte come elementi costitutivi necessari di quella generale di cui qui si discute. E risulterà dopo ciò in piena evidenza quali siano le ipotesi alle quali la validità della soluzione finora ammessa rimane effettivamente subordinata, quali le convenzioni che presiedono alla impostazione del problema e pertanto, dopo un breve esame critico sulla consistenza di queste premesse, quali debbano considerarsi le prospettive di successo dell'intrapresa.

2. Supponiamo che un osservatore sia collocato in O (punto che possiamo immaginare coincidente col centro del Sole o col centro di massa del sistema solare, potendo sempre ridurci senza difficoltà ai predetti casi) e riferisca le osservazioni da lui fatte sulle stelle del sistema galattico ad un triedro trirettangolo T coll'origine in O , ossia determini per ogni stella S_i le coordinate del vettore $S_i - O$ ⁽¹⁾ rispetto al detto triedro. Questo, che generalmente non è inerziale, lo chiameremo triedro *intermediario* e indicheremo con Ω il vettore della sua rotazione istantanea assoluta, intendendo per spazio assoluto quello collegato ad un triedro rigorosamente inerziale indipendente dall'ammasso di stelle considerato. L'osservatore constaterà, per mezzo di osservazioni delle stelle S_i a varie epoche, l'esistenza di velocità delle dette stelle (relative a T), cosicchè, detti rispettivamente v_i e v_0 i vettori delle velocità assolute di S_i e di O e S'_{ri} ⁽²⁾ quello della velocità relativa di S_i , sarà valida la relazione vettoriale:

$$[1] \quad v_i = v_0 + S'_{ri} + \Omega \wedge (S_i - O).$$

(¹) Nella fase attuale dell'astronomia di osservazione l'astronomo non è in grado, a dir vero, di determinare le *distanze* stellari se non con procedimenti speciali tutt'altro che semplici e sicuri. Ma qui prescindiamo da tali difficoltà accessorie. Anche il problema delle distanze è destinato, del resto, ad essere radicalmente trasformato, come ho già mostrato da alcuni anni (nella Memoria II qui citata) e come avrò occasione di riaffermare in altra prossima Nota. Esso è riassorbito nel problema generale del riferimento pei moti propri stellari, il quale comporta una soluzione diretta, unitaria e rigorosa già da me indicata nella stessa Memoria II.

(²) Con l'accento si indica la derivazione del punto S rispetto al tempo, intendendosi la derivazione fatta con riferimento al triedro mobile (intermediario).

In seguito figurano anche derivate di punti e vettori con riferimento ad un triedro inerziale, ma confusioni non sono possibili, essendo queste ultime derivate contrassegnate con l'indice a , mentre nelle prime figura l'indice r .

Immaginiamo ora che a tutto l'ammasso galattico si voglia attribuire una rotazione assoluta $\overline{\Omega}$, in conformità della convenzione innanzi specificata: la velocità assoluta v_i della S_i sarà allora considerata come risultante della velocità di trascinamento di S_i dovuta al moto rototraslatorio del sistema (Σ) e di un'altra addizionale di vettore u_i . Sarà dunque, detto G un punto rigidamente collegato a (Σ) e G'_a la sua velocità assoluta,

$$[2] \quad v_i = G'_a + \overline{\Omega} \wedge (S_i - G) + u_i$$

donde, eguagliando le espressioni [1] e [2] della v_i e dopo aver posto in luogo di $S_i - G$ la somma $(S_i - O) + (O - G)$,

$$[3] \quad v_i - [G'_a + \overline{\Omega} \wedge (O - G)] = u_i - S'_{ri} + (\overline{\Omega} - \Omega) \wedge (S_i - O).$$

Ora, poichè il vettore indicato dalla somma racchiusa nella prima parentesi rappresenta, dato il significato già dichiarato dei simboli, la velocità di trascinamento di O , ossia del sistema solare, nel moto rototraslatorio di (Σ), l'intero primo membro è il vettore che, tenendo conto delle convenzioni fatte, rappresenta la velocità relativa di traslazione del sistema solare rispetto all'ammasso supposto solidificato nella configurazione attuale, ovvero, in sostanza, è ciò che gli astronomi chiamano *moto proprio solare*.

Detto τ il vettore così definito, esso sarà legato a dati di osservazione dalla relazione che si ottiene eguagliando τ al secondo membro della [3] e che scriveremo:

$$[4] \quad u_i = \tau + S'_{ri} - (\Omega - \overline{\Omega}) \wedge (S_i - O).$$

Questa relazione vettoriale fornisce tre equazioni scalari per ogni stella: se le stelle utilizzate sono n le equazioni saranno $3n$ fra $3n + 6$ incognite, cioè: le coordinate dei vettori u_i in numero di $3n$ e quelle dei vettori τ e $\Omega - \overline{\Omega}$. Il problema, per la risoluzione del quale non si dispone di altre equazioni all'infuori delle predette, risulta dunque indeterminato, come era prevedibile. Gli astronomi credono di aver superata questa difficoltà colla introduzione di concetti ed ipotesi del tipo innanzi accennato e che qui si porranno schematicamente in evidenza, allo scopo di confermare il carattere essenzialmente empirico delle soluzioni ottenute.

Anzitutto, se facciamo coincidere il punto G , la cui scelta era rimasta finora arbitraria, col *centroide*, o *centro di figura* dell'ammasso, cioè col punto definito vettorialmente dalla relazione

$$\sum_i (S_i - O) = n(G - O),$$

potremo scrivere, immaginando di aver sommato le n equazioni vettoriali [4] relative a tutte le stelle adoperate, l'equazione:

$$\sum_i u_i = n\tau + \sum_i S'_{ri} + n(\Omega - \overline{\Omega}) \wedge (G - O)$$

e se si suppone che, per n molto grande e per stelle distribuite equabilmente in tutte le regioni dell'ammasso, si possa attribuire ai vettori u_i una distribuzione del tutto *accidentale*, nel senso che non esistano nè direzioni preferite per i vettori stessi nè valori prevalenti dei moduli in determinate regioni, potrà, senza errore sensibile, ritenersi $\sum_i u_i = 0$ e si avrà quindi:

$$[5] \quad \tau = -\frac{1}{n} \sum_i S'_{ri} + (\bar{\Omega} - \Omega) \wedge (G - O).$$

Bisogna ora, per procedere oltre e per render possibile una traduzione immediata delle nostre conclusioni nel linguaggio astronomico usuale, scegliere convenientemente il triedro intermedio. Immaginiamo dunque un triedro trirettangolo $Oxyz$ che abbia uno dei suoi piani, per esempio, Oxy , parallelo all'equatore medio relativo ad una certa epoca t e l'asse delle x diretto verso l'equinozio medio; le due coordinate angolari di un sistema di coordinate polari spaziali possono allora farsi coincidere con l'ascensione retta e la declinazione (medie) all'epoca medesima.

Detto T_t questo triedro, immaginiamo che le posizioni medie delle stelle S_i corrispondenti alle varie epoche di osservazione si riferiscano al triedro con cui coincideva T_t ad un'epoca fissa t_0 : operiamo cioè una semplice trasformazione di coordinate e veniamo così a considerare, per ciascuna stella, le posizioni successive che essa assume rispetto ad un triedro *che rimane fisso nello spazio assoluto* ⁽¹⁾ e che chiameremo con \mathcal{T}_0 per distinguerlo da T_0 , che è mobile come T_t . Se scegliessimo \mathcal{T}_0 come triedro intermedio e se le formole di riduzione fossero del tutto esatte, si avrebbe rigorosamente $\Omega = 0$ e la [5] farebbe conoscere senz'altro τ (quando si supponga mod Ω_1 molto piccolo e mod $(G - O)$ non molto grande, in modo da potersi trascurare il prodotto vettoriale dei due) in funzione di quantità tutte misurabili. Si avrebbe infatti:

$$[5'] \quad \tau = -\frac{1}{n} \sum_i S'_{ri}.$$

formola che è, in sostanza, quella ora effettivamente utilizzata in pratica.

Questo procedimento porterebbe dunque a conoscere il moto proprio solare e i moti propri stellari all'epoca t_0 : questi ultimi coinciderebbero infatti, sostanzialmente, colle S'_{ri} . La rotazione galattica Ω rimarrebbe tuttavia ignota e così pure le u_i , essendo il sistema [1] tuttora indeterminato.

⁽¹⁾ La qualifica di *assoluto* va, naturalmente, intesa nel senso convenzionale dichiarato innanzi.

3. Ma le formole di riduzione adoperate per passare dalle posizioni dell'epoca t a quelle relative a t_0 *non possono considerarsi esatte* e ciò non per difetto della teoria del moto terrestre (orbitale e di rotazione) ma perchè i valori numerici delle costanti che quella teoria introduce debbono desumersi dalle osservazioni e nelle operazioni relative si prescinde, in prima approssimazione, dai moti propri. Con le approssimazioni successive si cerca bensì di tenerne qualche conto, ma non è ben chiaro che il processo di approssimazione *converga* e, soprattutto, che conduca a risultati indipendenti dal materiale di osservazione utilizzato.

È necessario pertanto mettersi da un punto di vista rigoroso. Bisogna, per questo, considerare le anzidette costanti *come ignote* e così pure Ω : ricordando però che la meccanica celeste porge le espressioni analitiche delle componenti di questo vettore in funzione del tempo e delle costanti medesime. Potrà allora considerarsi come triedro intermedio quello (mobile) T_0 . In tal caso *non si deve fare alcuna riduzione delle posizioni stellari da t a t_0* ; la successione, nelle varie epoche, delle coordinate delle S_i rispetto al triedro istantaneo T_t all'epoca dell'osservazione conduce senz'altro facilmente alla conoscenza delle velocità *relative* ⁽¹⁾ al triedro mobile per l'epoca t_0 (cioè a T_0) e vale allora la [1] in tutta la sua generalità.

In quanto alla rotazione Ω_0 di T_0 la immagineremo decomposta in due parti. La prima, che indicheremo con Ω_0^* , avrà per componenti quelle che risultano dalle espressioni che fornisce la meccanica celeste *quando queste siano calcolate con i valori attualmente adottati per le costanti*. La seconda parte sarà rappresentata da un vettore $\delta\Omega$ del tutto ignoto. La [1] si scriverà allora

$$[6] \quad u_i = (\tau + S'_{ti}) + (\Omega_0^* + \delta\Omega - \bar{\Omega}) \wedge (S_i - O)$$

e si vede subito non soltanto che il problema resta indeterminato anche dopo che si è conosciuto τ attraverso le ipotesi indicate e sulle quali occorrerà ritornare, ma ancora che eventuali nuove relazioni fra le incognite che potessero esser suggerite da considerazioni di carattere empirico *non potrebbero portare a conoscere altro che la differenza $\Omega - \delta\Omega$, cosicchè la rotazione galattica Ω rimane in ogni caso sconosciuta*, non essendovi alcuna ragione per ritenere che $\delta\Omega$ sia trascurabile di fronte ad $\bar{\Omega}$.

Per vedere in base a quali considerazioni si riesca a formare le equazioni che mancano perchè il sistema che nasce dalle [5] possa completarsi, supponiamo che, elevati a quadrato i due membri della [6], si sia fatta

(1) Queste non sono da confondersi, naturalmente, con i vettori indicati colla stessa notazione S'_{ti} nella [5], i quali, nella detta formola, debbono intendersi relativi a τ_0 .

la somma di tutte le equazioni così ottenute. Si potrà allora, quando si sia posto per brevità

$$\lambda_i = \tau + S'_i + \Omega_0^* \wedge (S_i - O) \quad , \quad \omega = \tilde{\Omega} - \delta\Omega ,$$

scrivere:

$$[7] \quad \sum_i u_i^2 = \sum_i \lambda_i^2 + \sum_i [\omega \wedge (S_i - O)]^2 - 2 \sum_i \lambda_i \times \omega \wedge (S_i - O) .$$

Sulla base del concetto fondamentale che sia lecito attribuire ai vettori u_i il carattere di deviazioni *puramente accidentali* delle velocità stellari da quelle che corrisponderebbero ad un moto rigido dell'ammasso (Σ) e che sia pertanto ammissibile un procedimento con cui si trattino questi vettori alla stregua di errori di osservazione, può sembrare a prima vista plausibile — ed è su questo concetto che si fondano, in sostanza, i metodi usuali concisamente schematizzati colle nostre notazioni — di attenersi ai procedimenti tipici della teoria degli errori e ritenere che i valori più opportuni da prescegliersi per le componenti p, q, r del vettore ω da determinare siano quelli che rendono minima la quantità $\sum_i u_i^2$. Questa, se si nota che le λ_i non dipendono da ω , può essere sostituita dalla funzione

$$[8] \quad \Phi(p, q, r) = \sum_i [\omega \wedge (S_i - O)]^2 - 2\omega \times \sum_i (S_i - O) \wedge \lambda_i .$$

Se si indicano ora con x_i, y_i, z_i le coordinate di S_i rispetto a T_0 e si nota che la prima sommatoria rappresenta il doppio dell'energia cinetica di un sistema di masse tutte eguali all'unità e collocate nei punti S_i quando il sistema abbia una rotazione istantanea di vettore ω , si potrà scrivere:

$$\sum_i [\omega \wedge (S_i - O)]^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2A_1qr + 2B_1pr + 2C_1pq ,$$

indicando coi coefficienti della forma quadratica A, B, C e A_1, B_1, C_1 , rispettivamente i momenti e i prodotti d'inerzia del predetto sistema di masse rispetto al triedro T_0 . In quanto al secondo gruppo di termini notiamo che se al sistema dei vettori λ_i (espressi, come si è visto, in funzione di vettori già noti) si attribuisce il momento $-\mu$ rispetto ad O e se si indicano con $-\mu_1, -\mu_2, -\mu_3$ le coordinate di questo vettore rispetto agli assi di T_0 , il gruppo considerato potrà scriversi

$$-2(\mu_1 p + \mu_2 q + \mu_3 r) .$$

La funzione da minimizzare è dunque

$$\Phi(p, q, r) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2A_1qr + 2B_1pr + 2C_1pq - \\ - 2(\mu_1 p + \mu_2 q + \mu_3 r)$$

e si è condotti così senz'altro al sistema

$$[9] \quad \begin{cases} Ap + C_1 q + B_1 r = \mu_1 \\ C_1 p + Bq + A_1 r = \mu_2 \\ B_1 p + A_1 q + Cr = \mu_3, \end{cases}$$

da aggregarsi a quello che proviene dalle [6].

4. Si vede ora in primo luogo che attraverso al procedimento esposto si possono determinare i valori numerici di p, q, r (componenti del vettore $\delta\Omega - \Omega$ per l'epoca t_0) e anche le componenti delle u_i . Ma, a parte il fatto che tali risultati sono, come è facile vedere e come mostrerò nelle conclusioni di questo studio, puramente formali, si ha, in quanto alla rotazione galattica Ω , che essa può presumersi determinata solo a condizione che si ponga, arbitrariamente, $\delta\Omega = 0$. Le componenti di Ω sarebbero, in tal caso, date da p, q, r .

Prima di rivolgere uno sguardo riassuntivo ai predetti risultati per fissarne il valore, notiamo però come la scelta fatta del triedro intermedio T_0 non risponda ad alcuna necessità essenziale e presenti solo il vantaggio di permettere una trattazione nella forma che è più familiare agli astronomi. Ma, come ho avvertito nella Memoria II ⁽¹⁾ e in una Nota preliminare anteriore alla I ⁽²⁾, sarebbe assai vantaggioso, al fine di ottenere una cospicua semplificazione di tutto il lavoro di teoria e di calcolo, di abbandonare definitivamente, per le ricerche di astronomia stellare, i riferimenti tradizionali e adottare un triedro mobile i cui assi siano direttamente collegati a determinate stelle. Si potrebbe, ad esempio, scelte due stelle S_1 e S_2 , far coincidere l'asse Ox colla congiungente OS_1 e il piano Oxy col piano $OS_1 S_2$. La semiretta delle y positive si otterrà allora facendo rotare di 90° nel piano $OS_1 S_2$ la OS_1 nel senso diretto e quella delle z positive sarà una semiretta normale al piano $OS_1 S_2$ e tale che un osservatore orientato secondo essa veda il moto di rotazione da Ox verso Oy compiersi in senso diretto. I coseni direttori della direzione di una stella qualunque S_i rispetto al detto triedro si deducono allora facilmente o per via fotografica da una lastra che contenga le immagini di S_1, S_2 e S_i , ovvero anche pel tramite dei riferimenti ordinari, i quali non interverrebbero, evidentemente, in modo essenziale ma solo per fornire le distanze angolari $S_1 OS_2, S_1 OS_i$ e $S_2 OS_i$ in una determinata epoca. In tal caso non si tratta più di stabilire una teoria della rotazione del triedro nè

⁽¹⁾ Cfr. nota a pag. 13 della detta Memoria.

⁽²⁾ Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti dell'astronomia stellare di posizione. (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXXIII, serie 5^a, fasc. 2).

quindi esistono costanti astronomiche da determinare: il vettore $\Omega_0 + \delta\Omega$ della trattazione precedente è sostituito dalla rotazione istantanea Ω del triedro predetto e le incognite p, q, r sono, nel caso presente, le componenti del vettore $\Omega - \Omega_0$.

Si viene così, per effetto della particolare scelta fatta del triedro intermedio, a riconoscere subito il significato del vettore che è stato determinato: esso rappresenta la rotazione *relativa* dell'ammasso galattico rispetto al triedro intermedio prescelto, significato che non appariva evidente colla scelta dell'altro riferimento.

5. È facile ora riassumere brevemente i risultati di questa disamina e venire a semplici e ben chiare conclusioni:

a) Anzitutto il *concetto* di rotazione galattica è mal definito. Ad un sistema di punti in movimento e non collegati rigidamente si può attribuire un moto rototraslatorio d'insieme *arbitrario* (in certi limiti, naturalmente, nel nostro caso particolare) purchè delle velocità addizionali che debbono introdursi e rappresentate qui dai vettori u_i si disponga opportunamente. La insufficiente definizione della predetta rotazione Ω contribuisce, come ben s'intende, ad accrescere la indeterminatezza del problema generale di cui è questione nelle considerazioni che qui seguono;

b) Il problema stesso non ha utilità o interesse ai fini di una teoria dinamica, sia pure provvisoria, della deformazione dell'ammasso; l'analogia che eventualmente potesse riscontrarsi fra l'«atto di moto» del sistema galattico e quello corrispondente ad un moto d'insieme rototraslatorio potrebbe avere solo un certo interesse di carattere cosmogonico in quanto porterebbe a congetturare che una identica e più accentuata analogia si sia verificata in un passato remotissimo (distribuzione *vorticiosa* delle velocità *iniziali*). Ad ogni modo se un tal problema si vorrà affrontare bisognerà riconoscere che esso, insieme ad altri finora considerati come particolari, e cioè quello della rotazione del triedro di riferimento, quello del cosiddetto *moto proprio solare* e quello della determinazione dei moti propri stellari attuali, forma un problema *unico*, il quale è *indeterminato*;

c) Le condizioni empiriche addizionali successivamente introdotte

$$\sum_i u_i = 0 \quad , \quad \sum_i u_i^2 = \min.$$

le quali rappresentano qui concisamente il risultato dei tentativi fatti dagli astronomi per procurarsi nuove relazioni fra gli elementi incogniti, mentre non bastano a sopperire ai dati mancanti ma solo servono a

rimediare alla insufficienza concettuale di cui è questione nella osservazione *a*), portano ad attribuire ai vettori u_i una distribuzione puramente *accidentale* (analoga a quella che si ammette per gli errori di osservazione) ed affermano con ciò, in sostanza, la *inesistenza* di quelle stesse leggi di distribuzione dei moti propri che col problema complessivo ci si studia poi di ricercare;

d) La rotazione galattica assoluta $\bar{\Omega}$ rimane in ogni caso inseparabile da quella Ω del triedro intermediario T_0 adoperato pel riferimento. Ciò che solo può conoscersi – attraverso i procedimenti innanzi esaminati e soggetti, come si è visto, alle più gravi obiezioni – è la rotazione *relativa* dell'ammasso galattico rispetto a T_0 . Quest'elemento diverrebbe utile solo quando si fosse per altra via, pervenuti alla determinazione *diretta* della rotazione Ω predetta;

e) La connessione dei quattro problemi innanzi considerati permane *fino a che non si venga in possesso di altri dati*, rappresentati da leggi di osservazione ben sicure o da nuovi e ben giustificati postulati. Credo che la seconda via sia la più sicura; la introduzione di un postulato *di carattere dinamico* già da me esaminato e proposto fin dal 1928 (Memoria II innanzi citata) permette di scindere il problema (che di fronte ai procedimenti usuali geometrico-cinematici si presenta inevitabilmente unitario) e di risolvere con procedimento diretto e rigoroso i due problemi parziali aventi interesse veramente preminente, cioè quelli della rotazione Ω e della distribuzione dei moti propri nell'interno dell'ammasso. Le due altre questioni, sulla rotazione galattica e sul moto proprio solare, divenute così accessorie e indipendenti e considerevolmente semplificate, potranno quindi con molto vantaggio trattarsi a parte, qualora venga riconosciuta la loro utilità che sembra, peraltro, molto dubbia.

Brevi osservazioni relative a queste nuove vedute sulla trattazione più opportuna del complesso delle questioni qui esaminate daranno materia ad altra mia Nota.

Geofisica. — *Grafico per l'utilizzazione delle registrazioni di variazione del campo magnetico terrestre.* Nota di MARIO TENANI, presentata (1) dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

1. — Le registrazioni dei variometri magnetici sono destinate, come è noto, alla determinazione degli scostamenti ΔD , ΔH , e ΔZ del valore attuale della declinazione D , della componente orizzontale H e della componente verticale Z , dal loro valore normale; questi scostamenti permettono di calcolare immediatamente le componenti ΔX , ΔY , ΔZ , del campo magnetico perturbatore f , responsabile delle suddette variazioni, secondo l'asse orizzontale x diretto verso il nord, l'asse orizzontale y diretto verso est e l'asse verticale z diretto verso il basso.

Tale calcolo è, in linea di principio, fattibile un modo molto semplice per via analitica; fra le tre grandezze in oggetto, D , H e Z e le componenti X , Y , Z del campo magnetico normale, non perturbato, esistono le note relazioni:

$$X = H \cos D \quad Y = H \sin D \quad Z = Z;$$

da queste derivano le equazioni:

$$[1] \quad \Delta X = \Delta H \cos D - H \sin D; \Delta Y = \Delta H \sin D + H \cos D; \Delta Z = \Delta Z,$$

che servono allo scopo; la componente orizzontale $h = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$ del campo perturbatore f , ha l'azimut $\alpha = \text{artg} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$; il campo $f = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}$, contenuto nel piano verticale di tale azimut, è inclinato sull'orizzonte dell'angolo

$$i = \text{artg} \frac{\Delta Z}{\sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}}.$$

Se non che, in pratica, dovendo eseguire i detti calcoli per numerosi valori simultanei di ΔH , ΔD e ΔZ , che permettano di seguire nel tempo il modificarsi del campo perturbatore, il lavoro riesce assai ingombrante.

(1) Nell'adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

2. — Nell'Osservatorio di Genova si è ripetutamente constatato il vantaggio di procedere più rapidamente, per via grafica, all'immediata determinazione della proiezione orizzontale h , dell'azimut α del vettore f e della sua inclinazione i , per alcuni istanti ben scelti, e al tracciamento diretto della curva luogo geometrico dell'estremità del vettore rappresentativo della suddetta proiezione; riducendo il laborioso lavoro di calcolo richiesto, anche dallo studio di una sola perturbazione, da molte ore a pochi minuti.

La prima idea di tale grafico è immediatamente offerta dall'ispezione delle formule [1] sopracitate, per quanto non conduca direttamente allo scopo. Riferendoci infatti ad assi ortogonali ΔH e ΔD , quelle formule lineari definiscono le rette $\Delta X = \text{cost.}$ e $\Delta Y = \text{cost.}$; tracciate tali rette, il punto di coordinate ΔH e ΔD , viene a determinare senz'altro, sul grafico, i valori corrispondenti di ΔX e di ΔY ; in tal modo però resta a calcolarsi la proiezione orizzontale del vettore, $h = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$ e il suo azimut $\alpha = \text{arctg} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$. Un grafico di tal genere fu proposto a suo tempo da C. C. ENNIS ⁽¹⁾.

3. — Riferiamoci invece ad assi ΔX (ordinate) e ΔY (ascisse); le equazioni:

$$[2] \quad \Delta D = -\frac{\Delta X}{H} \sin D + \frac{\Delta Y}{H} \cos D; \quad \Delta H = \Delta X \cos D + \Delta Y \sin D,$$

che si ottengono risolvendo le [1] rispetto a ΔD e ΔH , permettono di tracciare:

il fascio delle rette $\Delta D = \text{cost.}$, che risultano parallele inclinate dell'angolo D rispetto all'asse ΔX e che tagliano l'asse ΔY nei punti di ascissa $\Delta Y = d' \cdot \frac{H}{\cos D} \cdot \sin 1'$ (d' essendo il valore costante di ΔD , espresso in primi);

il fascio delle rette $\Delta H = \text{cost.}$, (che risultano parallele inclinate dell'angolo D sull'asse ΔY , normali alle precedenti, che tagliano l'asse ΔX nei punti di ordinata $\Delta X = h'/\cos D$ (h' essendo il valore costante di ΔH espresso in γ ; $1\gamma = 10^{-5}$ gauss).

Tracciate tali rette, per ogni coppia di valori d' e h' delle variazioni ΔD e di ΔH , il punto d'incontro delle rette $\Delta H = h'$ e $\Delta D = d'$ ha per coordinate i corrispondenti valori ΔX e di ΔY ; tale punto, congiunto con l'origine, permette di ottenere e misurare direttamente, sul grafico, la proiezione orizzontale $h = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$ del vettore f del campo perturbatore, e il suo angolo α con l'asse ΔX , e cioè l'azimut del piano verticale in cui è contenuto il campo perturbatore f .

⁽¹⁾ *Terr. Magn. and El.*, vol. 38 (1933), pag. 331.

Per Genova, ad esempio, ove si assumano come valori normali $H = 22140 \gamma$ e $D = -50' 50''$ (W), le equazioni [2] si scrivono (prendendo per unità: 1 γ per ΔH , ΔX e ΔY , e 1' per ΔD):

$$\Delta D = \Delta X/62,223 + \Delta Y/6,448 \quad ; \quad \Delta H = \Delta X/1,005 - \Delta Y/9,701 ;$$

e quindi: le rette $\Delta D = d'$, incontrano l'asse ΔY nei punti $\Delta Y = d' \cdot 6,448$; e le rette $\Delta H = h'$, incontrano l'asse ΔX nei punti $\Delta X = h' \cdot 1,005$. Il grafico che ne risulta è rappresentato nella figura 1. Le quote in esso indi-

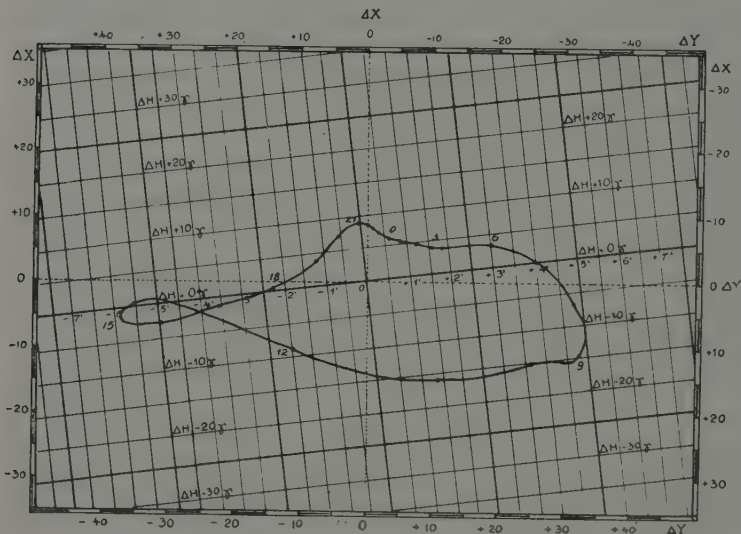


Fig. 1.

cate possono anche intendersi moltiplicate per un numero qualsiasi, uguale per tutte, estendendo così il campo di applicazione del grafico.

4. — In modo del tutto analogo, indicando con F il valor medio della intensità totale del campo terrestre, con I il valor medio della sua inclinazione, ed essendo in generale:

$$[3] \quad \Delta F = \Delta H \cos I + \Delta Z \sin I \quad ; \quad \Delta I \sin I' = \frac{1}{F} (\Delta Z \cos I - \Delta H \sin I),$$

si ha:

$$[4] \quad \Delta H = \Delta F \cos I - \Delta I \cdot F \sin I' \sin I \quad ; \quad \Delta Z = \Delta F \sin I + \Delta I \sin I' \cos I.$$

Riferendoci ad assi coordinati ΔF (ordinate, in γ) e ΔI (ascisse, in primi):

le rette $\Delta H = \text{cost} = h'$, sono parallele inclinate dell'angolo $i' = -\text{arctg}(F \text{ tg } I \text{ sen } 1')$ sull'asse ΔF , ed incontrano l'asse ΔI nei punti di ascissa $-h'/F \cos I \text{ sen } 1'$;

le rette $\Delta Z = \text{cost} = z'$ sono inclinate dell'angolo

$$i'' = \text{arctg} \frac{F \text{ sen } 1' \cos I}{\text{sen } I}$$

sull'asse ΔF (normali alle precedenti), e incontrano l'asse ΔF nei punti di ordinata

$$\Delta F = \frac{z'}{F \cos I \text{ sen } 1'}.$$

Il grafico di tali isolinee permette immediatamente di passare dalle variazioni registrate $h' = \Delta H$ e $z' = \Delta Z$, espresse in γ , alla variazione ΔI della inclinazione, espressa in primi, ed alla variazione ΔF subita dalla intensità totale, espressa in γ .

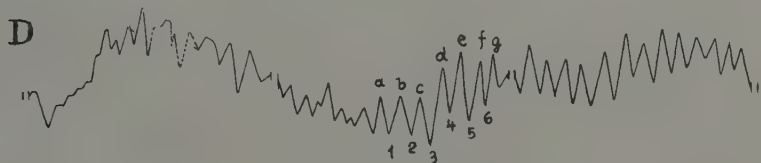


Fig. 2.



H

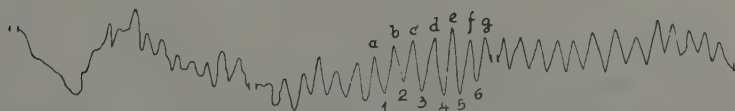


Fig. 3.

5. — Analogamente, un grafico in coordinate h (ascisse) e ΔZ (ordinate), espresse in γ , permette di ottenere immediatamente il valore in γ , e l'inclinazione i , in gradi, del campo perturbatore f .

Essendo infatti $\text{tang } i = \frac{h}{\Delta Z}$, riferendoci a due assi coordinati ortogonali: h (ascisse in γ), positivo verso dritta, e ΔZ (ordinate positive

TABELLA I.

*Medie delle variazioni registrate alle varie ore nei mesi di giugno
dell'intervallo 1933-1939.*

Ore TMEC	Ore locali h m	ΔD	ΔH	ΔX	ΔY
1	0 36	+ 0'9	+ 5.3 γ	+ 6.0 γ	+ 3.0 γ
2	1 36	+ 1.2	+ 4.9	+ 5.5	+ 7.0
3	2 36	+ 1.6	+ 4.9	+ 5.5	+ 9.5
4	3 36	+ 1.8	+ 3.5	+ 5.0	+ 11.5
5	4 36	+ 2.0	+ 3.6	+ 5.5	+ 12.5
6	5 36	+ 3.0	+ 2.7	+ 6.0	+ 18.5
7	6 36	+ 4.2	— 0.2	+ 3.0	+ 27.0
8	7 36	+ 4.7	— 6.8	— 3.0	+ 31.0
9	8 36	+ 4.9	— 14.9	— 11.0	+ 33.0
10	9 36	+ 3.6	— 14.9	— 12.0	+ 25.0
11	10 36	+ 1.3	— 15.8	— 15.0	+ 10.5
12	11 36	— 2.0	— 7.9	— 10.0	— 11.5
13	12 36	— 4.2	— 1.6	— 5.0	— 26.0
14	13 36	— 5.5	+ 1.0	— 3.0	— 35.0
15	14 36	— 6.0	— 0.6	— 6.0	— 38.0
16	15 36	— 5.0	— 2.5	— 6.5	— 31.5
17	16 36	— 3.4	— 1.6	— 4.0	— 21.5
18	17 36	— 2.2	+ 1.3	— 0.5	— 14.0
19	18 36	— 1.1	+ 3.6	+ 4.0	— 7.5
20	19 36	— 0.6	+ 7.2	+ 7.0	— 4.0
21	20 36	+ 0.1	+ 8.5	+ 9.0	0.0
22	21 36	+ 0.2	+ 8.2	+ 8.0	+ 0.5
23	22 36	+ 0.3	+ 7.6	+ 7.5	+ 1.5
24	23 36	+ 0.6	+ 6.2	+ 7.0	+ 3.0

verso il basso, pure in γ , nella stessa scala) e portando in ascissa il valore di h trovato sopra col grafico di cui al N. 3, e in ordinata il valore di ΔZ , si determina un punto che, unito con l'origine degli assi, fornisce il vettore f del campo perturbatore, nella sua inclinazione i , nel piano verticale di azimut α sopra determinato.

TABELLA II.

Punti della registrazione	ΔD	ΔH	ΔX	ΔY
a	— 2'.8	0 γ	— 2 γ	— 17 γ
1	+ 0.8	— 27	— 25	+ 8
b	— 2.7	+ 11	+ 8	— 18
2	+ 0.9	— 19	— 19	+ 8
c	— 2.8	+ 9	+ 7	— 18
3	+ 2.1	— 23	— 22	+ 17
d	— 5.5	+ 14	+ 10	— 37
4	— 0.3	— 23	— 16	0
e	— 6.5	+ 16	+ 11	— 43
5	— 0.3	— 25	— 25	+ 5
f	— 5.8	+ 12	+ 7	— 38
6	— 1.8	— 14	— 16	— 10
g	— 6.9	+ 14	+ 8	— 44

6. — Applichiamo il grafico descritto in 3):

1° — alla determinazione della proiezione orizzontale h del campo magnetico f responsabile della *variazione* diurna del campo magnetico a Genova nel mese di giugno.

Facendo la media delle variazioni osservate alle singole ore del giorno nei vari mesi di giugno dell'intervallo 1933-1939, si sono ottenute le variazioni medie per le singole ore del giorno nel suddetto intervallo, contenute nelle due prime colonne della tabella I. Il grafico corrispondente riprodotto sulla figura 1, è stato ottenuto riunendo a mano libera i punti corrispondenti alle singole coppie ΔD e ΔH relative alla medesima ora: esso ha un andamento generale molto prossimo a quelli, molto ana-

loghi tra loro, che si sono costruiti via via colle variazioni medie orarie dei singoli mesi di giugno: il vettore che unisce l'origine degli assi con ciascun punto della curva rappresenta la componente orizzontale h del vettore responsabile della variazione diurna media del campo terrestre nel detto mese, nel suo azimut rispetto al nord rappresentato dal semiasse ΔX diretto verso l'alto. Le componenti ΔX e ΔY di tale vettore, dedotte immediatamente dal grafico, sono contenute nelle colonne 3^a e 4^a della tabella.

2° - alla *perturbazione magnetica con « oscillazioni giganti » del giorno 1 marzo 1942.*

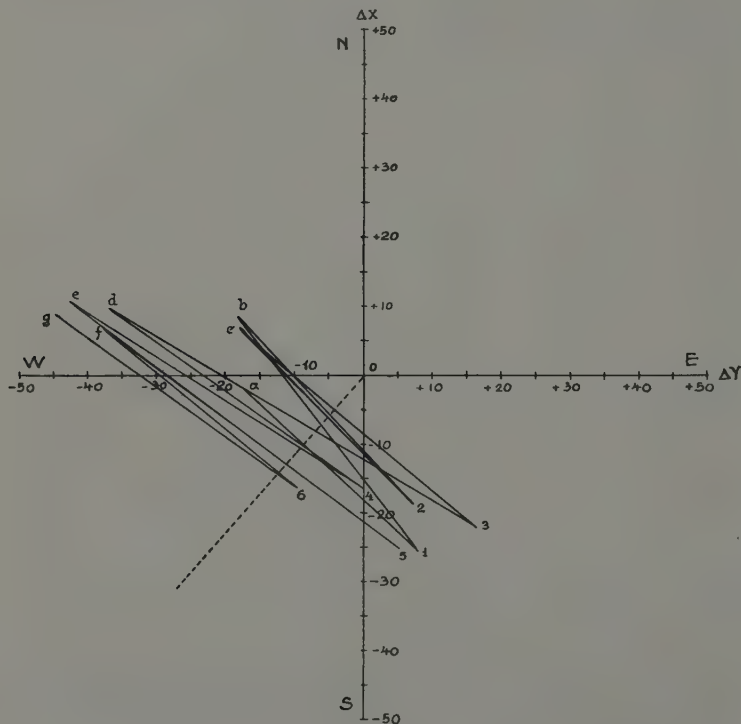


Fig. 4.

Le figure 2 e 3 rappresentano le registrazioni dei variometri D ed H dell'Osservatorio di Genova. Lo spoglio accurato dei punti corrispondenti delle due curve registrate tra le ore 1630 e 1700 di TMEC, ha fornito le variazioni ΔD e ΔH contenute nelle prime due colonne della tabella II (contate dai valori $50' 50''$ W per D , e 22110γ per H). I punti corrispondenti del

grafico (fig. 4) mostrano che la proiezione orizzontale del vettore perturbazione può ritenersi in ogni istante la somma geometrica: di un vettore di direzione quasi costante, verso W-SW, e di intensità lentamente e progressivamente variabile; e di un vettore pure di direzione costante (da NW a SE pei punti contraddistinti da numeri e da SE a NW pei punti contraddistinti da lettere), ma di intensità rapidamente variabile alternativamente da 0 a $\pm 50 \gamma$ circa, col periodo di 5 minuti circa. Nelle altre due colonne della tabella sono dati i valori ΔX e ΔY dedotti dal grafico.

Il grafico della figura 4 offre immediatamente la suddetta interpretazione, che sarebbe stato difficile ottenere per via analitica.

Fisiologia. — *Sul problema psicofisico.* Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico SILVESTRO BAGLIONI.

Il problema psicofisico, nella fisiologia degli organi di senso, è comunemente inteso secondo gli sviluppi e la dottrina con cui il fisico tedesco FECHNER (1860) partendo dalle osservazioni di E. H. WEBER (1831) credè di poter risolvere il rapporto tra le sensazioni e gli stimoli che le provocano secondo l'equazione

$$S = C \log R$$

in cui S indica l'intensità della sensazione, C una costante, R l'intensità dello stimolo. FECHNER la chiamò formula della misura psicofisica, intendendo che la sensazione è proporzionale al logaritmo dello stimolo.

È noto che le successive numerose ricerche dei fisiologi e degli psicologi hanno dimostrato praticamente e teoricamente poco fondata la dottrina, soprattutto perchè i due ordini di grandezze, che formano i due membri dell'equazione, non sono omogenei e non ammettono quindi una comune unità di misura. Tuttavia essa gode ancora, specialmente nel campo dei fisici, una larga diffusione, contenendo un nucleo di verità, rappresentato essenzialmente dalle geniali osservazioni del fisiologo WEBER, che è opportuno ricordare con esattezza ⁽²⁾.

Il problema che WEBER si propose e cercò di risolvere sperimentalmente era di stabilire le più piccole differenze di pesi che noi possiamo distinguere col senso tattile, di lunghezza delle linee colla vista e dei suoni coll'udito. Nel primo caso vide che la più piccola differenza di due pesi (chiamata poi soglia discriminativa) che siamo in grado di poter distinguere mediante il senso dello sforzo dei muscoli, corrisponde (indipendentemente dall'entità assoluta dei pesi) al rapporto di 39 a 40, ossia quando l'uno è di circa 1/40 più grave dell'altro. Se invece di servirsi del senso dello sforzo muscolare, si usa il senso tattile, o di pressione, che i due pesi esercitano successivamente sulla cute della mano, si può distinguere una dif-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

⁽²⁾ E. H. WEBER, *Der Tastsinn und das Gemeingefühl*, R. WAGNER's, *Handwörterbuch der Physiologie*, III. Band, 2. Abt. Braunschweig, 1846, pagg. 481-588.

ferenza maggiore di peso, corrispondente circa a $1/30$, nel rapporto cioè di 29 a 30.

Venendo al campo della vista, WEBER osservava che una persona dotata di un eccellente potere di misurare a occhio, è capace di distinguere la differenza di lunghezza di due linee esaminate comparativamente, l'una dopo l'altra, le cui lunghezze, indipendentemente dalla loro misura di lunghezza assoluta, sono nel rapporto di 50 a 51, e persino di 100 a 101. Nel campo dell'udito, WEBER riferendosi alle ricerche di DELEZENNE (1827) rilevava che la più piccola differenza nell'altezza di due toni, vicini all'unisono, che un artista può distinguere, quando li esamina l'uno dopo l'altro, è di $1/4$ di comma ($81/80$), mentre un dilettante può distinguere $1/2$ comma; ossia nel primo caso un rapporto di $321/322$, nel secondo di $160/161$.

Il punto saliente della dottrina di WEBER sta nel fatto che il giudizio (si tratta di un complesso di attività psichica superiore che implica un confronto tra le proprietà della sensazione avvertita immediatamente nel tempo precedente) della differenza in più o in meno è indipendente dalla misura assoluta, ma è basato sul rapporto o riferimento, secondo cui l'una percezione, *concepita o interpretata sinteticamente*, diventa misura dell'altra.

Nel confronto dei pesi egli vide infatti che la soglia discriminativa, ossia il minimo peso capace di essere avvertito come differenza, è sempre nel rapporto di circa $1/40$ o di $1/30$, sia che si tratti di once o di libbre. Col nostro sistema metrico di misura significherebbe che per percepire il minimo aumento di un peso di 100 grammi è necessario salire a 102,5 grammi essendo 2,5 g pari a $1/40$ di 100 grammi, rispettivamente 103, 3 nel caso di $1/30$; se invece si confronta 1000 g è necessario salire a 1025 g, essendo appunto $1/40$ di 1000 25 g ecc.

« Die Auffassung (conclude WEBER) der Verhältnisse ganzer Grössen, ohne dass man die Grössen durch einen kleineren Maassstab ausgemessen und den absoluten Unterschied beider kennen gelernt hat, ist eine äusserst interessante psychologische Erscheinung. In der Musik fassen wir die Tonverhältnisse auf, ohne die Schwingungszahlen zu kennen, in der Baukunst die Verhältnisse räumlicher Grössen, ohne sie nach Zollen bestimmt zu haben, und eben so fassen wir die Empfindungsgrössen oder Kraftgrössen so auf bei der Vergleichung der Gewichte ».

Il concetto (traduco in italiano) dei rapporti di intere grandezze, senza che si siano misurate mediante un mezzo più piccolo di misura e si sia imparato a conoscere la differenza assoluta di ambedue, è una manifestazione psicologica estremamente interessante. Nella musica concepiamo i rapporti di tono, senza conoscere i numeri delle vibrazioni, nell'architettura i rapporti di grandezze spaziali senza averle determinate in pollici, e così parimenti concepiamo le grandezze di sensazione o di forza nel confronto dei pesi.

Considerando attentamente questa conclusione del WEBER, risulta chiaro che egli ha voluto esprimere un fatto di pertinenza assolutamente psicologica: egli ha voluto dire che quando noi giudichiamo due grandezze omogenee molto simili tra loro, siamo in grado di avvertirne la minima differenza in più o in meno, confrontandole come un tutto unico, senza cioè essere necessario al nostro giudizio scomporle in unità elementari. Con altre parole si rivela in questa particolare forma di attività del pensiero il modo generale di procedere di esso, cioè di concepire e giudicare sinteticamente (anche quando il processo analitico non sia stato compiuto) e assumendo come unità di misura il dato di fatto percepito nel momento attuale.

Come in ogni altra attività del pensiero entra anche qui in giuoco il fattore dell'attenzione e dell'esercizio: il WEBER stesso rileva che nel caso dei suoni musicali, gli artisti esercitati possono avvertire valori differenziali della metà più piccoli dei non esercitati.

Egli stesso, pur riconoscendo la grande importanza del fatto, non ha affermato che nei diversi campi delle grandezze omogenee confrontate vige lo stesso rapporto, come invece ha voluto il FECHNER fissando nella sua formula che tale rapporto fosse uguale a quello matematico del logaritmo coi numeri, qualunque siano le modalità o categorie delle sensazioni. Il WEBER ha visto infatti che nel confronto dei pesi tale rapporto può essere di $1/40$ oppure di $1/30$ secondo la modalità dei sensi impiegati (muscolare più tattile, oppure tattile, solo); di $1/100$ nel caso del confronto visivo della lunghezza di linee; di $1/320$, rispett. $1/160$ nel caso del confronto dell'altezza di due toni musicali.

Un'altra osservazione è da fare: il confronto tra le due grandezze pur riguardando grandezze omogenee (di peso, di lunghezza di linee, di altezza di toni) non riguarda proprietà consimili od omogenee delle relative grandezze. Nel confronto di differenti pesi, il giudizio riguarda variazioni di intensità, in quello delle lunghezze lineari riguarda variazioni geometriche, in quello dei toni riguarda variazioni di altezza o frequenza. È chiaro che per questi ultimi il confronto può essere fatto anche per toni della stessa altezza o frequenza che abbiano variazioni di intensità o ampiezza. Nel sistema moderno della scala fonica (Phonskala) si è applicata dai fisici la formula del FECHNER, riferendola alle variazioni di intensità e non di frequenza.

Ma vi è un'altra, secondo me, più importante osservazione da fare alla dottrina del WEBER: quella che riguarda il fattore tempo, durante il quale si compie il giudizio di confronto tra le due grandezze omogenee. Il WEBER descrivendo il metodo delle sue ricerche fissa bene la condizione sperimentale che, nel confronto delle grandezze, le osservazioni debbano susseguirsi l'una all'altra, e non essere contemporanee, senza stabilire, per altro il limite del tempo. È chiaro però che praticamente l'una osservazione

doveva essere seguita dall'altra, in un tempo relativamente breve. Sarebbe opportuno stabilire con speciali (non difficili ad essere eseguite) ricerche che influenza ha sull'esattezza della realizzazione della legge il fattore tempo. Da quanto c'è oggi noto al riguardo possiamo certamente prevedere che questo fattore deve avere una grande, anzi decisiva importanza.

Due sono i modi con cui può agire il tempo che intercede tra le percezioni (si tratta di vere percezioni e non di semplici sensazioni; quelle che intervengono nel confronto) e il giudizio della differenza delle loro grandezze attribuite, secondo la legge estesiologica, agli stimoli, ossia alle proprietà del mondo esterno.

Prendendo in considerazione le percezioni visive (che sono le meglio indagate) si distinguono vari tempuscoli nel decorso dell'eccitamento visivo provocato da uno stimolo luminoso.

Tra il momento dell'applicazione dello stimolo e il momento in cui la sensazione raggiunge la sua piena chiarezza intercede un tempuscolo di circa 0,07 a 0,16 di secondo, probabilmente dovuto al (discutibile) periodo latente, più certamente al fatto che la percezione visiva impiega una certa fase di accrescimento prima di raggiungere il grado massimo di chiarezza, che rimane poi costante (periodo di *fissità*) finchè dura lo stimolo; se questo dura a lungo, la chiarezza della percezione va lentamente diminuendo (periodo di *decrecenza*); ciò si attribuisce alla fisiologica stanchezza degli organi periferici e centrali sensitivi e percettivi.

Quando lo stimolo cessa di agire, la percezione non scompare immediatamente; rimane per un tempo abbastanza lungo (periodo dell'*eccitamento postumo*) che lentamente decresce sino a raggiungere lo stato di eccitabilità iniziale, durante il quale la sensazione conserva il carattere qualitativo, mentre la sua intensità (chiarezza) gradatamente va diminuendo, (eccitamento o sensazione postuma *positiva*). A questa prima fase segue (secondo la legge di HERING dell'autogoverno della materia vivente) la seconda fase della sensazione (o immagine) visiva postuma *negativa*, che ha il carattere qualitativo opposto (nero se lo stimolo era bianco, azzurro, se era giallo, verde se era rosso) o complementare.

Su questo eccitamento visivo postumo positivo si basa l'arte cinematografica.

In questo primo modo di agire del tempo sul decorso della sensazione-percezione provocato da uno stimolo luminoso, le variazioni avvengono entro un periodo di tempo relativamente breve, dopo la cessazione dello stimolo, e si svolgono prevalentemente negli elementi periferici dell'organo di senso (retina), sebbene non si possa escludere compartecipazione degli elementi sensoriali centrali.

Il secondo modo di intervento del tempo è esclusivamente centrale, quello connesso colla memoria dell'eccitamento pregresso e che è a base del processo psichico della rappresentazione.

È soprattutto il primo modo che deve essere preso in considerazione nel problema psicofisico, non soltanto per le sensazioni-percezioni visive ma per tutti gli altri sensi, tra i quali una particolare importanza assume l'uditivo.

Nelle ricerche di DELEZENNE, ricordate dal WEBER, l'esperimento consisteva nel far giudicare dell'eventuale differenza di altezza avvertita tra due suoni (toni) vicinissimi tra loro, prodotti l'uno dopo l'altro. Non sappiamo quale era il tempo che intercedeva tra l'uno e l'altro stimolo, ma possiamo credere che esso fosse il più breve possibile. Non sappiamo neanche di quale strumento e in quale ambito di frequenze erano scelti i suoni. Oggi sappiamo in base alle più recenti ricerche che l'udito umano, nell'ambito della curva di massima acuità uditiva, (tra 200 e 4000 v. d.), può distinguere un tono semplice (di diapason, scevro di toni parziali) che varî di una vibrazione, nel rapporto quindi per il tono più basso di 200/201, che va mano mano gradatamente diminuendo quando si sale in altezza. Nel limite estremo di 4000 v. d. si scenderebbe teoricamente al minimo rapporto di 4000/4001. Sappiamo pure che tale capacità discriminativa è in funzione inversa del tempo che intercede tra l'uno e l'altro suono. Quanto più breve è tale tempuscolo, altrettanto più facile è il riconoscimento, sino al punto in cui se i due suoni si producono contemporaneamente, ossia il tempuscolo si riduce a zero, la soglia discriminativa diventa minima, per i battimenti che si avvertono nei due suoni unisoni.

Ma anche in questo rapporto è da prevedere che entrino altri fattori decisivi, quelli dell'attenzione e dell'esercizio.

Non sappiamo se anche per la sensazione-percezione uditiva prodotta da uno stimolo unico, si avveri e come si manifesti, al cessare di questo un eccitamento postumo positivo e negativo, come è il caso per le sensazioni luminose.

Il problema psicofisico dell'udito presenta altri lati, oltre quello del giudizio discriminativo dell'altezza di toni puri: il lato del confronto di suoni ricchi di sovratoni parziali (timbri), quello della scala delle variazioni di intensità (piano e forte) e finalmente quelle dei rapporti di affinità o parentela dei suoni, sui quali si basano le scale musicali. Quando saranno risolti sperimentalmente questi diversi lati del problema psicofisico dei suoni, resta ancora il più vasto problema analogo dei rumori, che coi vari suoni vocali formano gli elementi fonetici della parola delle lingue umane.

COMMEMORAZIONE DI MARIO BETTI

Tenuta ⁽¹⁾ dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO

MARIO BETTI nacque ai Bagni di Lucca in Val di Lima il 21 marzo 1875. Dei suoi ascendenti diretti si hanno notizie sicure dal 1692 e consta che già agli inizi del secolo XVIII i proavi del nostro Collega scomparso esercitassero l'arte del Farmacista. Farmacista furono i Betti da allora ininterrottamente fino a quell'Adelson Betti, padre del defunto Senatore, il quale esercitò la professione nella avita farmacia ancora oggi esistente ai Bagni di Lucca.

Fin da giovinetto MARIO BETTI viveva nei periodi di vacanze scolastiche nella Farmacia coadiuvando il Padre nelle varie preparazioni di prodotti chimici e di farmaci. Allora la grande industria chimica non esisteva e non si poteva fornire, come oggi, al Farmacista ogni prodotto ed ogni medicamento già pronti all'uso. Questi perciò doveva essere assai versato nelle scienze chimiche ed assai pratico nei vari metodi della chimica preparativa.

Il giovane BETTI crebbe così in una atmosfera favorevole allo sviluppo della passione per la Chimica e contribuirono a questo sviluppo le di lui doti personali di osservatore acuto, di operatore preciso e minuzioso, di indagatore appassionato dei fenomeni naturali.

Il BETTI entrò nel 1892 nella Scuola chimica dell'Università di Pisa già con una buona preparazione e soprattutto con la viva passione di fare il Chimico poichè alla Chimica egli si sentiva attratto e dallo studio e dall'esercizio di questa Scienza sentiva di avere delle emozioni tra le più care al suo spirito.

MARIO BETTI trovò nella Università di Pisa un centro ricco di tradizioni scientifiche nel campo della Chimica. La Scuola chimica pisana, orgogliosa di avere avuti a fondatori uomini grandi come PIRIA e BERTAGNINI, esplicava allora per opera del TASSINARI una speciale attività nel

(¹) Nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

campo chimico analitico dove il TASSINARI era abile Maestro. L'Istituto Chimico farmaceutico di quella Università si occupava di ricerche di Chimica organica nel gruppo, allora di vivo interesse, dei composti eterociclici; questo Istituto aveva anche dato interessanti contributi di ricerche nel campo dei rapporti tra proprietà fisiche e costituzione molecolare dei composti organici. Le ricerche sulla tensione superficiale ed i suoi rapporti con la costituzione molecolare eseguite in quei tempi a Pisa possono rivendicare alla scienza italiana un titolo di priorità quando si pensi ai successi ottenuti più tardi da SUGDEN con le ricerche sul paracoro dei composti organici.

L'ambiente pisano dove il BETTI si laureò in Chimica e Farmacia nel 1897 e dove si fermò assistente influi assai sulla sua prima formazione chimica. Alla Scuola del TASSINARI egli sviluppò e perfezionò le spiccate qualità di operatore e di analista preciso e coscienzioso, nella collaborazione con ROBERTO SCHIFF maturò la viva passione per lo studio degli eterociclici ed in questo campo della chimica organica il BETTI doveva poi lasciare con i suoi lavori orme difficilmente cancellabili. Nell'Istituto Chimico farmaceutico pisano il BETTI fu pure portato a meditare sui rapporti fra proprietà fisiche e costituzione chimica delle molecole e queste giovanili meditazioni trovarono poi sviluppi fecondi negli anni più maturi della sua attività scientifica consolidandosi in uno degli apporti più segnalabili dell'opera bettiana: gli studi sulle relazioni fra potere rotatorio ed attitudine chimica nei composti organici.

Possiamo perciò affermare che il periodo pisano servi al BETTI per la formazione embrionale di quelle direttrici di lavoro e di indagini che sviluppatasi poi con successo nel periodo fiorentino della sua carriera diedero un netto ed inconfondibile carattere all'opera scientifica dell'Uomo che oggi commemoriamo.

Gli anni nei quali il BETTI iniziò la carriera erano particolarmente significativi per la nostra scienza. La chimica organica aveva avuti successi insperati: i concetti strutturalistico-geometrici, della efficacia formale e della potenza euristica dei quali KÉKULÉ ebbe una chiara e sicura intuizione, avevano già vinto la loro battaglia nello sviluppo del pensiero chimico-organico, e, pur dopo la vittoria, avevano mostrato una fecondità senza pari nella storia di altre scienze. In quegli anni procedeva superbo lo sfruttamento di questa vittoria. Un entusiastico fervore di ricerca portava i giovani chimici verso la chimica organica e questa parte della scienza formulava ancora per l'avvenire seducenti promesse per i suoi cultori: promesse che furono invero meravigliosamente mantenute.

Il nostro giovane Studioso sentiva però il bisogno di trapiantarsi in un ambiente di ricerca più ampio e più movimentato, in un ambiente più combattivo e militante di quello che non fosse la serena e contemplativa Scuola pisana. L'occasione non tardò a presentarsi al BETTI per pas-

sare a Firenze al Laboratorio chimico di via Gino Capponi: uno dei Laboratori universitari chimici italiani più insigni per belle tradizioni, per attività svolte, per valore di uomini che vi hanno operato. Così, ancora giovanissimo, il BETTI entrò a far parte di quella Scuola che già aveva dato al nostro Paese ricercatori indimenticabili come ICILIO GUARESCHI, LUIGI BALBIANO, ARNALDO PIUTTI, GUIDO PELLIZZARI. Quivi il BETTI mentre allargava ed approfondiva la sua cultura chimica e prendeva più profonda dimestichezza con i problemi chimici che si agitavano nel campo internazionale del tempo, procedeva di pari passo a perfezionarsi nella più fine ed elegante tecnica della chimica organica tanto da diventarne un virtuoso padrone.

Erano caratteristiche della severa Scuola chimica fiorentina il rigore sperimentale, il giusto e sano criterio nella valutazione dei risultati ottenuti, il misurato equilibrio delle conclusioni. In queste doti era facile al BETTI perfezionarsi in quanto ad esse era portato dal mirabile equilibrio della propria natura. Queste doti costituirono poi sempre l'*abitus* dignitoso e severo del ricercatore e dello studioso nei diversi periodi della sua attività di Scienziato e di Maestro.

La chimica delle sostanze eterocicliche nella quale il BETTI aveva fatto già le sue prime armi a Pisa e per la quale egli aveva una buona preparazione sperimentale doveva naturalmente presentarsi con insistenza al suo interesse di ricercatore a Firenze. Questa parte della chimica aveva polarizzata l'attenzione degli specialisti dal 1883 da quando cioè VICTOR MAYER aveva scoperto il Tiofene, Qualche anno più tardi GIACOMO CIAMICIAN, l'Insigne Maestro che doveva poi dar tanta gloria alla Scuola chimica bolognese, riassume le sue magistrali ricerche sul pirrolo in una storica monografia onorata dal Premio Reale dell'Accademia Lincea nel 1887. Nel turno successivo del Premio Reale per la chimica, e cioè nel 1893, l'ambito riconoscimento era toccato a LUIGI BALBIANO per le ricerche sul pirazolo. KNORR, KLEISEN, BUCH, HANTSCH, MICHAEL, FISCHER ed i loro Allievi all'estero davano un meraviglioso impulso alle ricerche in questa parte della chimica nella quale in Italia chimici Illustri quali CIAMICIAN, ANGELI, BALBIANO, GUARESCHI, PELLIZZARI, ecc., avevano portato e stavano portando contributi di primissimo ordine.

Il giovane BETTI si dedicò con entusiasmo a queste indagini scoprendo ben presto una reazione generale di sintesi di derivati eterociclici reazione che egli ha studiato e chiarito in ogni sua parte con rigoroso metodo sperimentale.

Queste ricerche, pubblicate nella *Gazzetta Chimica Italiana*, fra il 1900 ed il 1904, attirarono per prime sul BETTI l'attenzione del mondo chimico di allora.

Anche più tardi negli anni della maturità il BETTI doveva segnalare ai chimici un interessante ed acuto problema strutturistico pure nel

campo della chimica degli eterociclici con le eleganti ricerche sugli acidi alfa-fenil-gammametilisoossiazolcarbonici.

Ma la fervida attività scientifica del BETTI nel periodo fiorentino non si limita al campo della pura chimica organica preparativa. Egli intuì assai presto che le teorie classiche della chimica organica avrebbero avuto bensì in futuro ancora mirabili successi per individuare, classificare e riprodurre innumerevoli sostanze organiche di alto significato biologico o di gran valore industriale e pratico, ma si sarebbero però rapidamente avviate verso l'esaurimento per quello che rappresenta il problema fondamentale dell'indagine chimica pura, nel rendersi cioè conto della intima e reale struttura e del nascosto dinamismo molecolare per poter spiegare e prevedere nel modo più ampio e generale le proprietà delle sostanze. Le semplificazioni (talvolta anche primitive dal punto di vista logico e fisico) proprie al modo di ragionare della classica chimica organica si sarebbero dovute integrare o anche sostituire con nuovi modi di vedere e di rappresentare, modi che possibilmente potessero penetrare in maniera meno formale nel segreto pulsare della realtà fisica delle molecole.

Una delle proprietà fisiche più interessanti di un forte gruppo di sostanze organiche è certamente quella di far ruotare il piano della luce polarizzata. Basti ricordare che questa proprietà è una caratteristica delle più significative sostanze chimiche che compongono gli organismi biologici vegetali ed animali.

I rapporti tra costituzione chimica e potere rotatorio erano, all'inizio del nostro secolo, quanto mai oscuri ed incerti anche sotto un punto di vista puramente fenomenologico. Dopo che VAN T'HOFF e LE BEL avevano mostrato che la presenza del potere rotatorio era legata alla concomitanza di speciali caratteri di simmetria delle molecole, i chimici si erano dedicati con fervore a moltiplicare gli esempi che confermavano l'idea fondamentale di PASTEUR nella precisazione vantoffiana ma non si erano dedicati con pari diligenza a penetrare la natura dei rapporti che potessero intercorrere tra le varie caratteristiche dell'architettura molecolare organica e quella proprietà ottica.

GUYE nel 1890 aveva tentato di costruire una teoria alquanto formale del potere rotatorio delle sostanze organiche facendo dipendere questa proprietà dalla massa dei quattro gruppi, fra loro diversi, che stanno uniti in molecola all'atomo di carbonio asimmetrico.

Questa idea di far dipendere esclusivamente dalle masse pesanti dei costituenti molecolari un fenomeno di natura squisitamente elettronica può sembrare a noi oggi alquanto strana: ma i chimici organici d'allora incoraggiati dal successo enorme del formalismo nella costruzione della loro teoria si lasciavano guidare facilmente da criteri puramente formali.

In un primo lavoro sull'argomento del potere rotatorio apparso nel 1906 BETTI fa una acuta critica alla teoria del GUYE e sostiene che se

anche si vuole ammettere provvisoriamente questa teoria come semplice ipotesi di lavoro non si può negare che a parità di massa i sostituenti all'atomo di carbonio asimmetrico devono avere influenza diversa sul potere rotatorio della molecola a seconda del loro « carattere costitutivo » ovvero della loro « funzione chimica ».

Questa idea del BETTI sviluppata poi in modo nettissimo e completo in venticinque anni successivi di ricerche sperimentali ha potuto mostrare come a questo « carattere chimico » e non alla « massa pesante » di GUYE si debba attribuire dal lato sperimentale e chimico l'effetto del sostituito all'atomo di carbonio asimmetrico sul potere rotatorio.

In questa direttiva i chimici ed i chimico-fisici avevano fino allora lavorato poco. Ai tempi dei primi lavori del BETTI si registrava nella bibliografia solo qualche fugace richiamo di BILZ e qualche accenno pure fugace di WALDEN ad una quistione così profondamente importante e squisitamente chimica.

Il lavoro del BETTI costituisce perciò un apporto di importanza fondamentale e decisiva per la nostra scienza e d'altra parte si può ben affermare che le ricerche sui rapporti fra costituzione chimica e potere rotatorio rappresentino anche la parte centrale e più organica dell'opera bettiana.

Onde poter giungere in modo elegante ed inequivocabile a dimostrare sperimentalmente il suo punto di vista il BETTI ideò e preparò per la prima volta per sintesi una speciale base otticamente attiva (il beta-naftolfenilaminometano) nella quale l'atomo di carbonio asimmetrico si presenta in condizioni particolarmente semplici e chiare. La preparazione di tutta una serie di derivati aldeido-aminici di questa base permise al BETTI di sostituire all'atomo di carbonio asimmetrico gruppi di attitudine chimica diversa se pure talvolta anche di massa eguale. E dopo aver dimostrato che alla così detta legge di GUYE non si poteva attribuire anche dal lato sperimentale e fenomenologico alcun sicuro fondamento stabili un punto di speciale importanza (che emerge già dalle prime ricerche del 1906-1907) trovando che l'andamento dell'influenza dei vari radicali legati al carbonio asimmetrico sul potere rotatorio è parallelo a quello della costante di dissociazione degli acidi carbossilici costituiti dallo stesso radicale. BETTI scopriva perciò un netto parallelismo tra l'andamento delle proprietà acide di tutta una serie di acidi organici e l'andamento dei poteri rotatori dei derivati della sua base con le aldeidi corrispondenti agli acidi stessi. Questa relazione, che ben a ragione è stata chiamata « la relazione di Betti » costituisce uno degli apporti più degni di speciale rilievo nel campo della chimica organica generale dei primi lustri di questo secolo.

Dal 1907 al 1923 il BETTI continuò a lavorare per circa tre lustri nel campo del potere rotatorio dei composti organici allargando le basi

sperimentali delle sue ricerche, risolvendo problemi collaterali chiarendo punti controversi ed è giunto così a conferire alla sua costruzione scientifica solidità e quadratura segnalabili. Nel frattempo egli vinceva per concorso la cattedra di Chimica farmaceutica presso la Università di Cagliari e, dopo due anni di permanenza in questa città, dopo aver costruito il nuovo Istituto di Chimica farmaceutica dell'Università, passava per trasferimento all'Università di Siena, dove insegnò per un decennio riprendendo con intensità l'attività scientifica anche in mezzo alle nuove cure della direzione dell'Istituto e poi al Rettorato di quell'antico Ateneo.

Da Siena, nel 1921, il BETTI passò a Genova pure alla direzione dell'Istituto Chimico farmaceutico di quella Università ed a Genova egli scrisse una memorabile Nota riassuntiva sull'argomento « costituzione chimica e potere rotatorio » che conclude su un piano prettamente chimico le ricerche di sedici o diciassette anni.

Le nuove teorie fisiche sulla struttura degli atomi e delle molecole cominciavano allora a diffondersi anche fra i chimici. Nel 1919 era apparsa, come una rivelazione per il mondo chimico, la prima edizione tedesca del noto libro di SOMMERFELD: i rapporti fra radiazione e materia prendevano tutto un nuovo aspetto che permetteva di impostare sotto una luce nuova il problema delle proprietà ottiche delle sostanze. In questa direttiva le ricerche polarimetriche del BETTI pur mantenendosi su un piano puramente sperimentale cercavano nuove possibilità di interpretazione e di sviluppi per quanto il problema dei rapporti fra potere rotatorio e costituzione chimica fosse uno dei più difficili e meno maturi per essere allora trattati da un punto di vista più strettamente fisico-teorico.

Già nella sua permanenza a Siena il BETTI accanto alle ricerche polarimetriche aveva dato la sua attività ad altre ricerche di chimica organica. Basti citare gli studi sugli isomeri degli acidi isoossiazolcarbonici e le eleganti reazioni per distinguere gli aldosi dai chetoni, ecc. A Siena egli si era pure dedicato a ricerche di chimica naturalistica ed in primo piano di chimica idrologica. Anzi ebbero qui inizio i suoi studi idrologici, studi continuati con passione fino ai suoi ultimi giorni di vita e che portarono il nostra Collega ad illustrare l'idrologia di varie regioni italiane come per esempio, quella del Trentino, dell'Alto Adige, della Regione Emiliana-Romagnola, di Fiuggi, ecc. Segnalabili anche le diligenti e belle ricerche del BETTI sulle acque minerali e termali di Bagni di Lucca e del suo Bacino Imbrifero.

Sull'imbrunire del 2 gennaio 1922 cessava di vivere in Bologna GIACOMO CIAMICIAN. La Facoltà di Scienze di quella Università, pur dopo faticose e non facili adunanze, esitò ad assumersi direttamente la grave responsabilità di dare un Successore a quel grande Maestro e non volle chiedere al Ministro un trasferimento. Domandò invece l'apertura di un

Concorso affinché una Commissione nazionale di chimici nominata dal Ministro si assumesse con maggior competenza la grave responsabilità.

MARIO BETTI riuscì primo all'unanimità in questo Concorso e venne nominato alla Cattedra bolognese nell'anno 1923. In quei tempi altre grandi Cattedre di chimica in Italia avevano visto salire Maestri nuovi.

A Roma, NICOLA PARRAVANO, a Firenze LUIGI ROLLA, a Napoli FERRUCCIO ZAMBONINI, a Bologna MARIO BETTI. La nostra Chimica si rinnovava e si slanciava con fede verso i nuovi compiti nazionali dell'Italia Fascista.

L'Istituto Chimico dell'Università bolognese aveva allora sede nei vecchi locali di via Zamboni; il nuovo e grande edificio ideato e si può dire costruito dal CIAMICIAN era quasi finito come costruzione ma mancava ancora di tutti gli impianti e di tutti gli arredamenti necessari per poter iniziare il suo funzionamento. Il nostro Collega scomparso affrontò così una situazione difficile per riorganizzare la Chimica generale bolognese nel nuovo Istituto ma con sforzo tenace Egli riuscì in pochi anni a ridare alla Chimica bolognese una nuova organizzazione ed una nuova attività.

Il periodo bolognese dell'attività del BETTI è il più lungo e complesso della sua carriera. Una delle sue prime affermazioni scientifiche in questo periodo si ebbe nel 1926 al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze dove Egli tenne un memorabile discorso scientifico alla presenza del DUCE analizzando con competente maestria alcuni aspetti della chimica organica che possono avere uno spiccato significato biologico. In questo discorso, come già nella prolusione tenuta al corso di Chimica generale nel 1923, vediamo accentuarsi la tendenza del BETTI verso i problemi chimico-biologici. Non si può con ciò affermare che venisse meno l'interesse del Maestro per i problemi generali e teorici della Chimica organica. Infatti le sue ricerche polarimetriche culminarono proprio, a Bologna con gli studi spettropolarimetrici che riuscirono a mettere in una forma definitiva ed elegante le fondamentali acquisizioni di questo indirizzo di ricerca. Così appartengono al periodo bolognese gli studi sui rapporti tra momento elettrico molecolare e potere rotatorio, studi che si ricollegano in modo suggestivo alle nuove teorie chimico-fisiche e costituiscono una anticipazione sperimentale sui recentissimi sviluppi fisici che hanno finalmente dato una base teorica ai fenomeni della attività ottica delle molecole organiche.

Non vanno poi dimenticati gli eleganti lavori di scissione in antipodi ottici di prodotti racemici, tecnica questa nella quale il BETTI era un finissimo specialista.

La passione per la Chimica biologica ha indirizzato, come ho già detto, l'attività scientifica del BETTI negli ultimi due lustri di vita.

Dalla pubblicazione del BETTI del 1926 *Problemi ed aspetti della chimica della materia vivente* all'ultima Memoria del 1941 sul tema *Chimica organica e vitalismo* il BETTI ha scritto una serie di lavori biochimici sia di indole sperimentale che teorica tutti di vivo interesse e di particolare pregio.

Uno degli aspetti assai interessanti delle trasformazioni chimiche negli organismi biologici è certamente quello per il quale si formano in seno ad esso sostanze caratterizzate dalla proprietà di far ruotare il piano della luce polarizzata. Molte delle sostanze che si formano negli organismi vengono riprodotte, artificialmente, dalla Chimica, per sintesi e con tutte le proprietà chimiche e fisiche che li caratterizzano quando si formano attraverso a processi biochimici. Il Chimico però non è capace di preparare sostanze dotate di potere rotatorio se non ricorrendo direttamente o indirettamente a sostanze formatesi in seno agli organismi viventi. Attraverso a quali vie materiali e fisiche si originarono in natura queste sostanze? Ecco il problema che si sono posti tanti illustri Studiosi da PASTEUR in poi.

Già a Genova nel 1922 il BETTI pensava di organizzare speciali ricerche per studiare la parte più chimico-fisica del problema. Un principio generale di simmetria dettato dal CURIE poteva essere di guida preziosa. A Bologna egli riprese l'argomento nel 1927. Queste ricerche ottennero di già qualche risultato incoraggiante che convinse il BETTI sull'opportunità di continuare le esperienze utilizzando la luce polarizzata circolarmente come già aveva fatto BICK in precedenti tentativi. Il BETTI sperava di essere più fortunato del BICK specialmente perchè aveva ideato una reazione particolarmente adatta ed elegante per provocare la sintesi di un composto otticamente attivo per via fotochimica.

Proprio in quegli anni Werner KUHN, riusciva con l'aiuto della luce polarizzata circolarmente a demolire asimmetricamente un composto racemico ottenendo così per via fisica in laboratorio una sostanza otticamente attiva. Ma il BETTI si proponeva di giungere non alla demolizione asimmetrica di un racemo ma alla sintesi diretta ed assoluta di una sostanza otticamente attiva senza passare prima per il composto racemico.

Dal lato sperimentale, questa ricerca si presentava assai delicata. Infatti se pure attraverso ad una reazione fotochimica in luce polarizzata circolarmente si fosse giunti ad un prodotto dotato di potere rotatorio si poteva sempre restar dubbiosi se si fosse ottenuta una vera sintesi asimmetrica totale ovvero se non si fosse formato un racemo che sotto l'azione della luce polarizzata circolarmente avesse subito una parziale demolizione asimmetrica portando così ad una sostanza dotata di potere rotatorio.

Soltanto l'applicazione di un criterio cinetico avrebbe potuto portare a risultati non controversi: se si fosse riusciti cioè a produrre una sostanza

otticamente attiva per effetto della luce polarizzata circolarmente in un tempo abbastanza breve ed inferiore a quello necessario per la demolizione fotochimica asimmetrica del racemo stesso. In questo caso si sarebbe dovuto senz'altro concludere che la sintesi asimmetrica assoluta era raggiunta.

Il BETTI si indirizzò per questa giusta via utilizzando reazioni fra sostanze gassose atte a produrre composti liquidi e quindi facilmente e rapidamente sottraibili all'azione fotochimica. Il lavoro si presentava già all'inizio come diviso in due momenti successivi. In un primo momento occorreva dimostrare che sotto l'azione della luce polarizzata circolarmente si ottiene in un determinato tempo un prodotto otticamente attivo. In un secondo momento occorreva indagare se il prodotto racemico di reazione sottoposto allo stato di vapore all'azione della luce polarizzata circolarmente non riuscisse nello stesso intervallo di tempo a mostrare la benchè minima traccia di attività ottica proveniente in questo caso dalla demolizione asimmetrica dello stesso.

Il BETTI affrontò questo ultimo lavoro quando già le sue condizioni di salute lasciavano molto a desiderare. La sistemazione della prima parte dell'esperienza aveva mostrato in pratica complicazioni e difficoltà che avevano richiesti alcuni anni di rigorose ricerche sperimentali. Nell'ultimo anno di vita il BETTI riuscì ad avere un netto risultato positivo per questa indagine e le condizioni nelle quali l'esperienza era stata fatta rendevano altamente probabile una interpretazione positiva nei riguardi dello scopo finale della ricerca.

Ed il vecchio Maestro nonostante il male che ne stava demolendo rapidamente il corpo ormai indebolito e stanco si rimise ancora al lavoro con lena e con entusiasmo per raggiungere le ultime dimostrazioni sperimentali del successo.

Ma la corda, troppo tesa, finì per spezzarsi. Credo che il BETTI avesse negli ultimi mesi della sua vita la sensazione della sua prossima fine: e perciò intensificava il lavoro per giungere prima di morire alla conclusione delle sue ricerche. Egli voleva lasciare il suo nome, un nome di italiano, alla prima sintesi asimmetrica totale della chimica organica. Anche nella ultima sua comunicazione all'Accademia bolognese verso la fine del marzo del 1942 Egli si intrattenne in modo veramente suggestivo ed elegante sui più recenti e favorevoli risultati di questo lavoro.

Il 13 maggio MARIO BETTI ci lasciava per sempre!

Non vorrei che gli Illustri Colleghi che mi ascoltano ricavassero dalle mie parole l'impressione di un BETTI soltanto Scienziato, soltanto Organizzatore, soltanto diligente e lungimirante Capo di un Istituto Scientifico.

Devono essere qui pure ricordate le eccezionali doti del BETTI come Insegnante di tutti i giorni e di tutte le lezioni.

Perfetto e limpido espositore, efficace ed appassionato Insegnante, sapeva rendere semplici ed accessibili anche i concetti più complessi ed astrusi. Elegantissimo nella forma, esercitava con le sue lezioni un fascino del tutto particolare sugli studenti che seguivano con entusiasmo i suoi corsi.

Meticoloso nel curare la parte sperimentale delle sue lezioni Egli voleva educare i giovani alla profonda e diligente osservazione dei fatti prima di guidarli ad elaborazioni ed interpretazioni teoriche o ad inquadrature d'insieme.

Come Maestro, e cioè come allevatore di nuovi ricercatori e di nuovi docenti Universitari, il BETTI aveva pure doti di alto pregio. Del resto Egli considerava la funzione di Maestro come una tra le più nobili e le più gravi di responsabilità.

La singolare perizia del BETTI valse a far chiamare lo stesso in consessi tecnici ed amministrativi vari dove Egli portò sempre il suo equilibrio misurato, l'alta competenza, l'assoluta probità, la provata e sicura fede, un costante senso di squisita signorilità.

Alla stima ed all'amicizia dei buoni e degli onesti, all'affetto filiale dei Collaboratori, alla venerazione degli Allievi, ricompense (altissime per un uomo della Scienza e della Scuola nella sua vita terrena, si aggiunsero nella carriera del BETTI numerosi e significativi riconoscimenti di carattere ufficiale ed accademico.

Egli fu Accademico Benedettino dal 1924, Membro di altre insigni Accademie scientifiche italiane come della Reale Accademia dei Lincei di cui fu Socio Nazionale, della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Membro della Società dei XL, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia dopo la trasformazione dell'Accademia Lincea.

L'alta distinzione della Stella d'Oro al merito della Scuola venne alcuni mesi prima della morte a dare al BETTI il riconoscimento del Governo Fascista per l'opera costante e diligente svolta in più di quarant'anni di vita universitaria a favore dell'insegnamento e della scuola.

Bologna volle decretargli negli ultimi anni di vita il premio SACCHETTI concesso a coloro che hanno contribuito a portare l'Ateneo dell'Alma Mater in maggior fama e prestigio.

Nel campo politico il BETTI, fervido patriota e fedele e convinto servitore del Regime Fascista, resse con grande dignità ed efficacia per dodici anni la carica di Fiduciario della Sezione bolognese dell'Associazione Fascista della Scuola. La figura del Cittadino e del Fascista ebbe nel 1939 un altissimo riconoscimento nazionale con la nomina a Senatore del Regno su proposta del DUCE.

Con la morte di MARIO BETTI è scomparso uno fra i più insigni e nobili rappresentanti della precedente generazione di chimici, di quella generazione che si è trovata in questa Scienza a cavallo di due epoche. Questi chimici pur essendosi formati nel periodo classico di sviluppo della nostra disciplina hanno intuito però i tempi nuovi che si stanno aprendo alla Chimica moderna ed hanno avuto il merito di credere in essi.

In molte parti dell'opera del BETTI osserviamo, anche attraverso alle linee classiche e tradizionali, una volontà rinnovatrice, una pacata ma ferma tendenza a trovare eleganti problemi che mettano in evidenza l'insufficienza del pensiero e dei metodi classici della chimica.

Perciò anche nel futuro, quando il ritmo urgente del progresso porterà la nostra attività di chimici per vie non tentate, vivrà pur sempre operante in noi l'insegnamento di MARIO BETTI Scienziato e Maestro e la di Lui fama supererà il tempo.

E la rievocazione di questo grande Italiano più che nell'effimero suono della mia parola disadorna, trova e troverà sostanza nei germi vitali sparsi nella di Lui opera, opera proiettata verso il futuro in una certezza di ascensione e di vita per questa Italia nostra, eterna madre di civiltà e di bellezza.

Progressi e problemi della scienza del mare.

Relazione (1) di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia

Debbo innanzi tutto scusarmi per la vastità del tema trattato, ma il fine di dimostrare il reciproco aiuto che si danno le diverse scienze per intendere il mare nella complessità dei suoi fenomeni non poteva altrimenti perseguirsi.

Il lato più interessante è anzi l'armonia dei fattori fisici, chimici e biologici, intorno alla quale si è lavorato per più di mezzo secolo da scienziati eminenti, da Laboratori marittimi, da poderose organizzazioni internazionali, da particolari crociere alcune delle quali legate al nome di navi divenute celebri come il *Challenger*, la *Vittor Pisani*, la *Princesse Alice*, il *Meteor*.

Un oceanografo, per usare un paragone che piaceva al fisico MACH deve essere come HANS SACHS che pur battendo la suola al suo deschetto non disdegnava di guardare il lavoro del suo vicino, conviene anzi che egli sia, come di se stesso diceva il MURRAY, un eterno studente.

Convien che gli studiosi del mare si associno, come avrebbe detto FEDERICO CESI, in una scientifica compagnia. Se un oceanografo fisico può fino a un certo punto ignorare la biologia, viceversa uno zoologo, come talvolta ho visto, che pretenda di essere oceanografo senza conoscere i problemi della oceanografia fisica, è un controsenso.

Prendiamo il colore del mare; esso molte volte dipende oltre che dai noti fattori fisici, dalla presenza di talune specie di alghe, dalla loro abbondanza, e altre volte dalla loro scarsità; il mare azzurro, il nostro magnifico Mediterraneo è un deserto di vita, come disse SCHÜTT, e pure questa elementare cognizione mi è costata una faticosa propaganda per farla comprendere anche a persone di elevata coltura, le quali non volevano capire come il Mediterraneo sia meno pescoso del mare del Nord, per un insieme

(1) Letta nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

di fattori fisici sui quali dovremo tornare a proposito della salinità, della temperatura e della batimetria.

Lo stesso intenso colore azzurro si riscontra nel mare dei Sargassi che è un mare caldo e salato, la cui povertà del *plancton* microscopico non va confusa con la lussureggiante vegetazione di superficie, che forse anzi, a mio credere, intercettando la luce riesce dannosa per la vegetazione dei più minuti esseri che noveriamo sotto il nome di *microplancton*.

Tutti i problemi della talassografia fisica danno aiuto al biologo e viceversa.

Quando a Simi notai che tuffatori classici (sono quelli già descritti dagli scrittori dell'*Ellade*) si vedevano a occhio nudo ancora a diversi metri di profondità, pensai che il mare del Dodecanneso dovesse essere più trasparente di quello di Capri, e il collega VERCELLI ne ha dato poi l'esatta dimostrazione estendendo le osservazioni già note sulla trasparenza del bacino orientale del Mediterraneo.

Evidentemente l'istinto dei tuffatori si è sviluppato dai giuochi in quel mare trasparentissimo.

Resta confermato anche per il Dodecanneso che la trasparenza si accompagna con la povertà di vita del canuto Egeo.

Nozioni che sembrano di pura scienza, come quella del mare molto trasparente, hanno conseguenze pratiche enormi, sia per l'economia di un mare, come anche nei riflessi di studi che interessano la difesa; per esempio, nel Mediterraneo i sottomarini sono più visibili che nell'Oceano e nei Mari del Nord; motivi ovvii ci impediscono di approfondire come vorremmo questo argomento, che ha qualche problema laterale.

Nei riguardi del fattore della temperatura esaurienti studi ci permettono di comprendere le basse temperature dei fondi oceanici e, a causa della soglia di Gibilterra, la più elevata temperatura del fondo mediterraneo che non si abbassa sotto i 13° e rappresenta la temperatura media dei mesi più freddi nelle acque superficiali mediterranee, fattore anche questo negativo per la ricchezza della pesca. È noto infatti che le acque fredde sono le più ricche di vita; noi vediamo così gradatamente profilarsi i caratteri speciali del nostro Mediterraneo.

Anche la sua povertà di nitrati, intorno alla quale richiamai l'attenzione della Commissione internazionale per l'esplorazione scientifica del Mediterraneo, oltre che colle elevate temperature, è forse in rapporto colla intensità di luce che si ripercuote sui fenomeni della vita batterica dei nitrificanti.

Qualche cosa di simile avviene in agricoltura, dove non sono precisamente le terre più soleggiate a produrre più grano, benchè qui intervenga anche il fattore piovosità.

* * *

Passando dalle acque superficiali alle profonde la pretesa mancanza di vita negli abissi venne nell'inizio sostenuta proprio per il Mediterraneo, ma contraddetta presto dal rinvenimento di organismi fissati sui cavi telegrafici sottomarini.

La pretesa azoicità dei fondi abissali si è mostrata infondata nei suoi supposti, poichè nè le condizioni determinate dalla pressione per la permeazione dell'acqua attraverso gli esseri viventi, nè quelle delle temperature, nè ordinariamente quelle chimiche sono tali da determinare il così detto zero di vita. Gli animali abissali migrano gradatamente alla superficie e hanno realizzato prima dell'uomo il principio della decompressione graduale, che forma oggi materia di addestramento pei palombari e pei sommergibilisti. Quando il FORBES suppose una azoicità per il nostro Mediterraneo fu il GIGLIOLI, aiutato dall'ammiraglio MAGNAGHI, che è un poco il Maestro ideale di noi tutti talassografi, a dimostrare il contrario. Nei casi come nel Mar Nero dove vi è un relativo zero di vita, dico relativo perchè come è noto vi sono microrganismi anaerobi e solfobatteri, ciò si deve alle anormali condizioni chimiche dovute a particolari proprietà del fondo marino.

Condizioni eccezionali si sono verificate anche nelle età passate, generando le così dette alistasie o deserti marini noti ai geo-paleontologi.

Si intende che però la vita vegetale delle piante clorofilliane non si svolge che fin dove giunge la luce determinante la fotosintesi. La vita animale degli abissi, come è noto, è in certo modo schiava della vita vegetale degli strati superficiali.

Come altra volta ho scritto, nulla su ciò ha cambiato il reperto nelle acque abissali delle così dette « cellule verde oliva » da parte del *Meteor*, perchè si tratta evidentemente di piante saprofite, di cianoficee affrancate come gli animali dalle necessità di luce.

La coltre che ricopre il fondo dell'Oceano che è stata oggetto di geniali studi da parte di VERNADSKY, è un grande laboratorio chimico, in cui però, anche a causa delle acque fredde del fondo, vi è una lenta catarsi.

I progressi della chimica del mare sono, come è noto, notevoli, dagli studi esatti sulla salinità a quelli sui sali nutritivi. Tutte le principali Nazioni vi hanno contribuito, compresa la nostra, in cui BRUNI gettò le basi del primo laboratorio chimico del Comitato talassografico.

La così detta legge del minimo, che in agricoltura ha avuto classiche dimostrazioni, è nel Mare ancora più evidente per le più omogenee condizioni del *medium* acquatico, e la sua relativa semplicità in confronto al terreno, la cui complessità affatica i moderni pedologi.

Il così detto *stock* biologico, la quantità di vita, è in correlazione a questi fattori. Si è visto che da una parte le acque costiere esercitano

una sorta di potere concimante, dall'altra, che nelle acque fredde profonde oceaniche si accumulano fosfati e nitrati, che le correnti convettive rimettono in circolo, mentre fosfati e nitrati sono scarsissimi nelle acque superficiali. La crociera del *Meteor* ha dato su questo punto esaurienti dimostrazioni.

È per la mancanza delle acque fredde oceaniche e di queste correnti convettive, che il Mediterraneo insieme con altri motivi non è ricco di vita. Esso è povero così di fosfati che di nitrati. Anche per il mare la bellezza si accompagna sovente alla povertà.

Per la opposta ragione ricche di vita sono le coste occidentali africane, in alcune zone ove affiorano tali correnti, e in cui Alvisè Cà da Mosto da secoli aveva riscontrato ricca pescagione.

Non mi sembra che i biologi e i chimici abbiano ancora abbastanza collaborato per spiegare la maggiore ricchezza di fosfati delle acque fredde oceaniche, in confronto a quelle dei mari chiusi. Bisogna tenere conto, secondo me, anche dell'azione concimante di densissimi stuoli di uccelli marini che trovano nella ricchezza dei mari freddi la loro pastura e sovente, come nell'Antartide, il freddo intenso non permettendo la vita che di pochi mammiferi, gli uccelli marini, per la minore concorrenza dei mammiferi terrestri, si riproducono in un numero sterminato.

La vita abissale ci ha riserbato anche altri interessanti problemi come quello della luminosità degli organismi, che evidentemente si è sviluppata per due motivi, la possibilità in un ambiente oscuro di cercare il nutrimento, tanto più che gli organi luminosi servono anche quali organi di adescamento e la possibilità di avvalersi delle sagome luminose tra gli individui di una stessa specie per riconoscersi. In altri casi come del resto per gli stessi batteri luminosi la luminosità è un semplice fenomeno di ricambio senza particolari finalità. Intorno a ciò vertono discussioni di opposte scuole. Ma qual'è l'origine di questa luminosità, e particolarmente quella degli organi luminosi nei metazoi? In alcuni casi si tratta, come ha mostrato con interessanti ricerche il collega PIERANTONI, di microrganismi simbiotici, cioè di batteri che rendono luminosi altri organismi come, ma solo parzialmente, aveva intravisto GIARD. Altri lo negano. È più probabile una via intermedia che i simbiotici, quando esistono, si siano avvalsi annidandovisi di preesistenti organi mucosi che avevano già una particolare innervazione. Taluno potrebbe meravigliarsi che gli animali luminosi abbondino in una profondità intermedia e non nel fondo abissale, eppure vi è un motivo biologico. La coltre di sostanza organica in decomposizione che riveste il fondo marino offre un pabulum di vita ad alcuni animali particolarmente adatti ad essa, e che non han più bisogno di andare a caccia di organismi, come gli abitatori intermedi del pelago.

La Natura è un tessuto di armonie.

* * *

Pochi si sono domandati i motivi all'infuori di quello della leggenda e della tradizione, perchè esseri i più primitivi trovino nelle acque marine il loro ambiente di vita.

Non pretendo neppure affacciarmi al troppo discusso tema sull'origine marina della vita e discutere le numerose ipotesi seguite a quelle della primitiva monera Haeckeliana, che sotto altra forma un nostro collega ha voluto far rivivere in un recentissimo Congresso della S. I. P. S. Il più modesto quesito di ritrovare i motivi della semplicità di organizzazione degli esseri marini in quello che HENDERSON chiama il medio vitale per eccellenza, trova il suo fondamento nella biochimica.

Vogliamo dare un esempio interessante, quello dell'azione antagonista di alcuni ioni che per primo LOEB ha posto in luce e che rende possibili le pulsazioni dell'apparato circolatorio più semplice, quello dei Celenterati, in cui non vi è una sostanza sanguigna, ma è la stessa acqua marina che circola. I morfologi che mi hanno insegnato con tanti dettagli il sistema gastrovascolare delle meduse, non hanno dato nessuna importanza alla scoperta di LOEB.

Questo organismo cuore, come voglio chiamarlo, è la medusa che tutti conosciamo, comprendiamo così come i celenterati all'infuori dell'idra facciano una comparsa eccezionale nelle acque dolci, dove manca questa azione degli ioni antagonisti.

Se volessimo fare della poesia i primi palpiti del cuore si debbono all'azione antagonista degli ioni nell'acqua di mare, così vive un poco della leggenda greca che il palpito di vita sia stato acceso nel regno di Nettuno.

In fondo, come diceva CLAUDIO BERNARD, l'organismo è un acquario vivente; quando per necessità della mia vita vidi ristretto il mio campo di studi, che per mia natura sono portato ad estendere, afferrai questa frase e la portai alle ultime conseguenze.

Tutti conoscono la teoria di QUINTON secondo la quale il nostro sangue ripete le condizioni chimiche dell'acqua di mare a ricordo dell'ambiente in cui la vita ha avuto origine. La teoria è stata in parte contraddetta; basta pensare per esempio, ai sali di magnesio relativamente abbondanti nell'acqua di mare.

A parte il tentativo di spiegare questa differenza rifacendosi alle condizioni chimiche di mari di epoche passate, in fondo resta qualche cosa di vero. Diversi fisiologi hanno studiato le condizioni osmotiche degli animali marini d'acqua dolce e terrestri e studiato l'affrancamento chimico dei liquidi circolanti dall'ambiente esterno, senza di che la vita di molti organismi nelle acque dolci sarebbe, per esempio, impossibile.

Classici, per citare solo i più recenti, sono gli studi di KROG sulla regolazione osmotica che ci rendono conto della capacità di penetrazione di alcuni organismi marini nelle acque dolci mediante particolari meccanismi di assorbimento degli ioni; uno di questi organismi adattabili è l'*Eriochir* un granchio marino proveniente dalla Cina che invade ora le acque continentali europee.

Da questo punto di vista vi è un campo enorme di studi e di discussione perchè occorrerebbe conoscere le condizioni chimiche dei mari primitivi e d'altra parte vi sono studiosi come MAC FARLANE che sostengono che la vita viceversa ebbe origine nell'ambiente di acqua dolce, tesi che però non ha molti sostenitori.

* * *

La maggior parte dei geologi ammette che i sali siano venuti all'Oceano dall'interno della terra, soprattutto per cause di fatti vulcanici, le emanazioni vulcaniche sono infatti ricche di cloruri.

In generale non si ammette più l'antica ipotesi di LAVOISIER che riguardava la salinità marina come una sorta di totalizzazione della salinità fluviale. Vi sono però autori che assumono ancora una posizione intermedia, altri che girano la questione ritenendo la salinità marina un fatto primario.

La salinità dei mari primitivi è ancora oggetto di discussione.

Si potrebbero ancora porre eleganti problemi sull'origine del sodio e del calcio e sulla loro concentrazione, problemi che STOPPANI, in un'opera quasi dimenticata si era posto; e saremmo portati anche cedendo ai cortesi inviti degli astronomi moderni a cercare la frequenza del calcio e del sodio nella materia oscura che inviluppa la grande spirale della via lattea.

È una pura coincidenza che può vestirsi di poesia, che elementi così importanti per la vita animale, siano così diffusi negli spazi dell'universo.

Queste incursioni sono un po' pericolose come quando il chimico ARRHENIUS fu attratto a studiare il divenire dei mondi, ma vi è un punto in cui tutte le scienze si incontrano per sollevare i più celati misteri. Un chimico come ARRHENIUS, un biologo come WALLACE si videro attratti dalla scienza astronomica.

Lo studio delle salinità dei diversi mari ha fatto notevole progresso, avendo formato oggetto di ricerche sistematiche da diversi comitati internazionali, dopo la Conferenza di Stoccolma del 1899, che portò alla fondazione del Consiglio Internazionale permanente per la esplorazione del mare, e sottoposto a metodici periodici rilevamenti.

Un lato interessante, quello dello studio delle acque lagunari, da parte di REDEKE, di REMANE e mia, è stato oggetto di estese ricerche nei

riguardi dei problemi della colonizzazione delle acque interne, e di altri problemi scientifici e pratici.

Un decennio di pazienti studi condotti nel laboratorio da me diretto ha permesso di individuare alcuni organismi, veri indicatori delle acque salmastre.

Il carattere diverso della vita lagunare in confronto alla marina è stato da me, in parziale contrapposizione alle vedute di REDEKE, posto in relazione non solo colla salinità, ma colle oscillazioni termiche che limitano il numero delle specie viventi. Le acque lagunari per il loro volume, relativamente piccolo in confronto del mare, sono sottoposte a oscillazioni termiche assai notevoli in confronto alla relativa omotermia del mare. Specie stenoterme infatti, benchè eurialine non possono vivere nelle lagune.

Altro carattere della vita lagunare è la tanatocenosi, per esprimerci col WASMUND, che involge la distruzione catastrofica di migliaia di organismi sia per le oscillazioni termiche che per i processi putrefattivi del fondo.

I paleontologi, dai quali poi in origine abbiamo appreso a valutare queste catastrofi, non hanno però sufficientemente alla loro volta preso in esame il processo di tanatocenosi quale attualmente si verifica secondo i nostri studi nelle lagune.

Paragonando le zone petrolifere più note nel mondo mi sembra quasi evidente che come per i petroli del Caucaso, le imponenti tanatocenosi che si sono dovute verificare nel Caspio e nelle zone forse più estese dalle inondazioni del Volga, e nel più esteso e poco profondo mare Sarmatico, siano in rapporti coi giacimenti di petrolio.

Studiando le zone petrolifere del Messico, del Golfo Persico, il più caldo mare del mondo, e delle Indie Olandesi, si verrebbe forse alla stessa conclusione. E apparisce forse il motivo delle nostre disillusioni nella ricerca dei petroli nel Mar Rosso se si eccettuano, poche zone come quelle dell'Egitto in cui tali tanatocenosi possono essersi verificate mentre il Mar Rosso come tale non presenta come il Caspio motivi di così vaste morie e forse una troppo rapida mineralizzazione.

Questi processi di tanatocenosi si accordano colla constatazione già fatta dai geologi che, per esprimerci col VINASSA, tutti i giacimenti noti di petrolio si trovano in prossimità di antichi litorali con acque basse e fondo argilloso, quindi sempre nel dominio del mare sottile.

* * *

La distribuzione della quantità di vita nelle acque legate così ai fattori della salinità, della temperatura, delle correnti, ha fatto notevoli progressi col parallelo sviluppo della oceanografia fisica e biologica.

Lo studio qualitativo e quantitativo delle distribuzioni degli organismi nell'Oceano ha dato luogo a un'imponente serie di ricerche e anche

a particolari spedizioni, oltre la più antica del CHALLENGER, quelle poi seguite dalla Plankton Expedition, della Valdivia per la pesca abissale, del *Meteor*, con speciale riguardo ai più moderni metodi e ai problemi fisico-chimici. Spetta come è noto al fisiologo HENSEN aver pensato a una legge distributiva degli organismi, nella quale egli si avvalse, ciò che prova l'importanza dell'aiuto che si danno le scienze sorelle, della metodica nota agli ematologi, del conteggio dei globuli sanguigni.

Ma HAECKEL colla sua geniale impetuosità insorse contro questa dottrina, facendo notare giustamente l'influenza di fattori di disturbo come le correnti ecc.

Nondimeno ricerche quantitative hanno assunto notevole importanza proprio in rapporto ai fattori perturbanti della vita e alla loro identificazione.

I metodi poi di una esatta ricerca quantitativa per le perdite dovuta sia alla filtrazione dei più minuti esseri, sia nel maneggio degli strumenti, vennero perfezionati prima da LOHMANN colla centrifugazione, con classiche ricerche eseguite nel mare di Siracusa, e poi col metodo della sedimentazione e del più esatto conteggio. È interessante il fatto dell'inversione delle quantità di vita dei tropici ai poli e più genericamente parlando dei mari caldi poveri di *plancton* rispetto ai mari freddi particolarmente ricchi, rispetto alla vita terrestre che, come è noto, lussureggia nelle regioni tropicali.

Ma non è una vera inversione quando ci si riferisca al numero delle specie. Le specie sono più abbondanti anche nel mare nelle regioni calde che nelle regioni fredde. Quello che muta è soltanto la quantità degli individui. Un'ambiente cattivo per la maggior parte delle specie, un'ambiente *pejus* come dice qualche biogeografo, diventa buono per le specie adattabili senza concorrenza vitale. Nelle regioni calde avviene nel mare come nella terra la possibilità di cicli riproduttivi, distribuiti durante tutto l'anno; da ciò nè trassi una legge biologica che il grande zoologo SEMPER aveva già accennato per gli animali terrestri, legge però di ricchezza qualitativa e non quantitativa per gli animali marini.

Tipico è il Mediterraneo dove il numero delle specie è enorme, e invece la quantità di vita è inferiore a quella dei mari nordici.

Già i geografi avevano visto che nelle regioni nordiche gli animali di uno stesso genere raggiungono poi grandi dimensioni rispetto al modo di accrescimento, quando si paragonino a specie meridionali. Non pochi autori, pongono in relazione queste maggiori dimensioni degli animali dei mari freddi con la legge di VAN'T HOFF e con una maggiore longevità. Sarebbero in proposito interessanti una serie di ricerche.

Lo studio delle quantità di vita venne anche esaminato fisiologicamente dal lato della nutrizione e della circolazione delle sostanze nutritive.

In rapporto al problema della circolazione della vita nel mare fece grande chiasso, come è noto, la teoria di PÜTTER che trovava insufficiente

la nutrizione degli esseri marini attraverso il *plancton*, e riteneva che gli animali marini possano nutrirsi di sostanze organiche disciolte nell'acqua di mare. Gli esperimenti di PÜTTER vennero sottoposti a revisione, si dovette tener conto dei progressi realizzati nelle ricerche quantitative del *plancton*, mediante i più esatti metodi della centrifugazione e sedimentazione.

Oltre il *plancton* devono però certamente considerarsi le sostanze colloidali derivanti dal disfacimento degli organismi morti.

Questa degradazione per la bassa temperatura dei fondi oceanici è molto lenta nelle grandi profondità.

È per la ricchezza di questa sostanza che la vita bentonica sotto il mare dei Sargassi è ricca, procedendo dal disfacimento di ingenti raccolte di alghe. Così presso le coste vi è la degradazione di immense quantità di *Zostere* e di *Posidonie*, che non sono però alghe come ritengono i profani. Ora questi materiali detritici si aggiungono al *plancton* per alimentare la vita animale dell'Oceano.

La critica della teoria di PÜTTER involve la valutazione del ciclo del carbonio e dell'azoto nel mare.

Per il ciclo del carbonio le precise conoscenze sull'equilibrio dell'acido carbonico contenuto nell'atmosfera rispetto a quello sciolto nelle acque di mare e in rapporto alla fissazione del carbonio, operata dalla sintesi clorofilliana, è ormai studiato in relazione all'alcalinità dell'acqua di mare e alla concentrazione idrogenionica.

È stata affrontata in pieno quella che KRÜMMEL chiamava la vera croce dei chimici talassografi, la determinazione dell'acido carbonico assorbito dall'acqua di mare.

Per il ciclo dell'azoto le minime quantità di nitriti e di nitrati che si riscontrano nell'acqua marina ha dato luogo a numerose discussioni.

Si è visto comunque che le acque fredde e meno salate sono più ricche di nitrati.

Circa la sorgente dell'azoto oltre quella derivante dalla decomposizione degli organismi ha interesse l'azoto atmosferico, specialmente nelle regioni del mare sottoposte a temporali. A tale azoto atmosferico si è voluto da taluno dare notevole importanza. Diversi autori hanno discusso sul ciclo dell'azoto nel mare tenendo naturalmente conto anche delle acque di drenaggio e di dilavamento dei terreni.

Per il fosforo già LINDGREN nella sua geologia economica ammette sei passaggi dalla sua prima concentrazione nelle cianofeece attraverso le catene di nutrimento, sino al guano accumulato dagli uccelli marini.

Il problema della quantità di vita è stato studiato non solo con le ricerche quantitative sul *plancton*, ma colle ricerche sugli animali di fondo mediante il metodo di PETERSEN, che segue metodicamente il conteggio degli animali di fondo in rapporto alle aree dragate.

* * *

Il problema della quantità di vita si ricollega ai moderni studi di geochimica sulle sedimentazioni marine.

Ciò che avviene nel fondo marino interessa non solo i problemi della vita, ma anche la minerogenesi.

Naturalmente si è voluto dire che si tratta più di processi distruttivi che creativi, ma non bisogna dimenticare l'azione esercitata dagli organismi sulle concentrazioni di alcuni elementi e le proprietà radioattive dei fondi marini.

In questo campo va ricordata la geochimica di VERNADSKY che è soprattutto basata su conoscenze oceanografiche. Ora, come ha rilevato giustamente MILLOSEVICH, che ci è grato qui ricordare, mentre quella di CLARKE, di GOLDSCHMID è la geochimica del mineralogista, quella di VERNADSKY nella qualità e nelle grandi linee della sua concezione risponde più alla mentalità del geologo. Alle considerazioni del MILLOSEVICH mi piace aggiungerne un'altra e ciò perchè VERNADSKY ha soprattutto tenuto conto di quanto avviene nei fondi marini, un laboratorio in cui pare che travagli il lavoro dei secoli in coltri di morte e di resurrezioni di vita. Tutta la chimica dell'Oceano è dominata dalla vita secondo VERNADSKY.

Come italiani dobbiamo col BLANC ricordare che l'origine quasi esclusivamente biologica del materiale sedimentario di vaste aree di fondi oceanici ha avuto per precursori il celebre naturalista di Bologna ULISSE ALDROVANDI e G. B. BECHI contemporaneo di MALPIGHI.

Benchè importanti progressi siano stati fatti in questo campo della geochimica resta tra gli altri problemi ancora da approfondire la batteriologia marina, lo studio degli alibatteri, dei nitrificanti e denitrificanti in rapporto a quello che si chiama lo *stock* biologico a sua volta in relazione colla legge del minimo.

Ma la vita batterica del mare interessa anche altri problemi pratici di altissimo valore come la corrosione dei metalli, alla quale dopo gli studi inaugurati da FARADAY che concepivano la corrosione come una elettrolisi, sono seguite numerose ricerche, anche di indole biologica sull'azione dei batteri.

La batteriologia marina non ha fatto i progressi che avremmo voluto; purtroppo per avere un batteriologo specializzato in tal campo mi sono battuto invano, anche quando urgevano ragioni sanitarie come il controllo delle coltivazioni dei molluschi.

Per associazioni di idee dobbiamo ricordare il contributo dato dall'oceanografia alla patologia colla scoperta dell'anafilassi dovuta a collaboratori del Principe di Monaco. L'anafilassi, come è noto, ha rivoluzio-

nato la immunologia e sono state le colorite Fisalie dell'Oceano ad attrarre l'attenzione del geniale fisiologo marino PORTIER, che aveva per Laboratorio non una sala di ospedale ma una cabina di bordo. Questi studi sono troppo noti e la scoperta data da troppo tempo, ma gli oceanografi non la dimenticheranno mai per chi ritiene che la loro scienza sia solo uno sport di alto mare.

* * *

Abbiamo accennato così a grandi linee le conquiste della oceanografia biologica, ma nuova luce si attende da più recenti conquiste dell'oceanografia fisica che, com'è noto, interessano diversi rami dell'economia nazionale.

Un problema affascinante è quello del livello medio dei mari. Allorquando i servizi geodetici e di livellamento generale delle principali potenze civili hanno adottato la suggestione francese tendente a prendere il livello medio dei mari come superficie di riferimento, hanno ammesso implicitamente che questo livello dimorasse invariabile, almeno nei riguardi delle necessità della pratica, ma è stato constatato da diversi ricercatori e in diversi mari che questo livello sembra in alcune stazioni importanti subire variazioni lente e sistematiche.

Passando ad altro argomento dal punto di vista fisico-chimico il mirabile fenomeno posto in luce dal SCHLÖSING dell'equilibrio dell'acido carbonico nell'atmosfera, rispetto all'acido carbonico contenuto nell'Oceano, nella proporzione necessaria e propizia per la vita, interessa in sommo grado il biologo e ci rende conto delle condizioni dell'alcalinità dell'acqua marina. Sarebbe interessante risalire con ARRHENIUS alle variazioni delle quantità di acido carbonico nell'atmosfera, nelle diverse epoche della terra. Voglio arrischiare una ipotesi: giganteschi fossili che da qualche autore sono stati posti in rapporto con anormali condizioni delle loro ghiandole a secrezione interna, forse respiravano in un *medium* diverso e la respirazione dei giganteschi cetacei marini, alquanto enigmatica sotto certi aspetti, ne è forse un ricordo.

Ma non posso lasciarmi trascinare oltre dalle dottrine evoluzionistiche.

Anche al fattore metereologico della piovosità non si è data dai biologi marini sufficientemente importanza. Esso invece certamente modifica l'intensità riproduttiva di alcune alghe, coll'abbassamento della salsedine e quindi il *pabulum* di vita del così detto pesce turchino o di superficie.

È molto probabile che il ciclo di annate buone e cattive del pesce turchino, come io ho supposto, sia in rapporto colle precipitazioni atmosferiche che influiscono sulla salsedine delle acque costiere, e quindi sulla

vegetazione delle alghe di cui si nutre il pesce turchino. Siamo agli albori di una metereologia peschereccia.

La metereologia marina ha ancora larghi compiti da assolvere e il momento è propizio, poichè il suo sviluppo è richiesto dalla aereonavigazione e questa prospetta la necessità di osservazioni in pieno Oceano, come giustamente nota EREDIA. È superfluo ricordare in questo campo quanto dobbiamo al progresso delle radiocomunicazioni e alla loro organizzazione internazionale.

L'importanza che ha lo studio delle maree per la navigazione e per l'economia dei paesi costieri è a tutti nota, e non è il caso di insistere. Le maree hanno una scarsa importanza nel Mediterraneo, eppure richiedono ancora uno studio sistematico con una collaborazione geodetica geofisica, paragonando i dati delle diverse stazioni mareografiche colle livellazioni di precisione, scopo assolto dalla nostra ricostituita Commissione mareografica.

Interessanti fenomeni della vita lagunare, sono in rapporto con le maree. Leonardo da Vinci ne studiò l'importanza nei bacini di espansione in relazione al regime dei porti canali. La stratificazione delle acque salse e dolci nella espansione della marea nei canali di bonifica ha dato nuova luce a problemi malarilogici.

Ben altra importanza hanno in altri mari le grandi maree nelle coste, ove esse giuocano con gli imponenti fenomeni indimenticabili per chi ha avuto occasione di visitare l'isola di Saint-Michel in Normandia.

Perfino alcuni sports, come ricorda l'ABETTI, perfino alcuni giuochi di ragazzi come io stesso ho visto a La Baule nella costa Bretona, si intonano a questi ritmi imponenti della marea, nei mari marginali.

L'importanza di questi fenomeni della marea sui ritmi vitali del celebre verme australiano *Palolo* è stata da me discussa in un lavoro giovanile. Era molto semplice per me sostituire i ritmi della marea alle fasi lunari, delle quali solo si parlava per spiegare tali ritmi riproduttivi. Era un passo assai semplice da far sorridere un fisico, ma evidentemente gli zoologi del tempo non avevano gran dimestichezza con la fisica. Ne trassi un'altra conseguenza, che questa sciamatura riproduttiva in relazione con i ritmi di marea doveva ritrovarsi in molti altri anellidi, come infatti è stato constatato più tardi da MC INTOSH che giunse alla stessa conclusione; dico più tardi come si può rilevare dalla data del tempo in cui la mia Nota fu presentata.

Dopo di allora il così detto enigma astrobiologico fu diversamente discusso, scomparve dalle gazzette illustrate e fu il solo premio della mia giovanile fatica.

Ma qui non si arresta l'importanza della marea, nel regime di vita lagunare e della pesca valliva giuoca sugli importanti fenomeni dell'immigrazione e della emigrazione dei pesci.

In base a ciò con la collaborazione degli ingegneri BULLO, DE ANGELIS, VELATTA, trassi la vallicoltura dalla grezza empiria fino a farne un caposaldo della bonifica idrobiologica.

ABETTI dice giustamente che anche per altri fenomeni vitali la marea può avere notevole importanza.

Quando passai a studi pratici sulla produttività del mare non dimenticai gli insegnamenti della scienza pura.

Branche dell'economia nazionale come la navigazione e la pesca si sono enormemente avvantaggiate notoriamente dallo studio delle maree, delle correnti e dei fondi marini; ma senza ricordare ciò che è a tutti noto vogliamo dare qualche esempio dei problemi meno conosciuti, che rivestono purtroppo una attualità, come quello della deriva delle mine vaganti.

Un esempio notevole è quello degli studi del Principe di Monaco, il quale, dopo venti anni di ricerche sulle grandi correnti dell'Atlantico mediante galleggianti si trovò preparato dopo la prima grande guerra mondiale allo studio delle mine erranti, che seguitavano a minacciare le coste di due continenti.

Grazie alla similitudine della flottazione delle mine con quello dei galleggianti usati in così lunga serie di esperienze, egli si trovò rapidamente in grado di fornire ai navigatori dell'Atlantico del Nord una carta esatta per premunirsi da tali insidie marine. Si può vedere in questo lavoro un ciclo immenso di cui le Azzorre occupano il centro, e che le mine percorrono in un periodo di quattro anni circa che è necessario per effettuare un viaggio di andata e ritorno, tra la Manica e le isole Canarie e le Antille.

Passando ad altro campo, estese ricerche batimetriche eseguite coi più moderni e rapidi metodi di ricerca hanno potuto confermare che al di là del pendio continentale, il fondo degli oceani non è così uniforme, come da taluno si riteneva. Tali ricerche hanno dato nuova luce a problemi vulcanologici e sismologici.

La conferenza navale negli Stati Uniti richiedeva giustamente un maggiore sviluppo della cartografia sottomarina. Sono troppo note le conquiste dello scandaglio sonoro basate sulla piezoelettricità; esse ci permettono di rivedere rapidamente le carte batimetriche di estese regioni oceaniche. Talvolta ho sentito gente che ritiene studi di lusso anche questi; ma qui invece il legame della scienza pura e pratica si ravvisa tra i più profondi, scienza di pace e scienza di guerra. Pochi sanno che è del dopoguerra lo studio e la valorizzazione dei banchi pescosi nei bassi fondali tra la Sicilia, Lampedusa, Pantelleria e la costa africana. Debbo ricordare che per la valorizzazione industriale di quei banchi pescosi mi sono avvalso di semplici nozioni oceanografiche relative al ponte siculo tunisino, ben noto ai geologi.

È in questa zona di bassi fondi che è una piccola isola, divenuta celebre, comparve e si inabissò, non dando tempo agli Inglesi di emettere il decreto di annessione che avevano preparato. Si tratta di bassi fondali che separano i due bacini del Mediterraneo e sui quali oggi è rivolta l'attenzione di tutto il mondo.

Le carte batimetriche rilevano di un colpo la pescosità dei mari; è la natura abissale del Tirreno che rende questo mare poco pescoso in confronto all'Adriatico.

La geofisica, alla quale tanto deve la oceanografia, ha prospettato nuovi e discussi problemi che appassionano anche per le loro ripercussioni i biologi marini.

Persino il modesto fenomeno della turbolenza vicino alle acque costiere ha enorme importanza per i fenomeni vitali degli organismi che le popolano, influenzando soprattutto sulla respirazione.

Voglio inoltre accennare alle moderne ricerche di fotometria sottomarina che eseguite con esatti metodi hanno modificato molte nostre idee, gettando nuova luce sui processi fotosintetici e sui limiti della vegetazione delle alghe.

Di notevole importanza è anche la ipotesi delle maree interne del PETERSON e quella delle trasgressioni marine.

Le une e le altre hanno un intimo legame e possono anche in taluni casi confondersi, come dice il collega LE DANOIS.

In rapporto al ciclo di queste maree interne e di queste eccezionali trasgressioni marine si verificano periodicamente anormali anni di grande pesca.

Il LE DANOIS è un biologo e perciò la sua dottrina delle trasgressioni oceaniche ha trovato qualche ostilità nel mondo dei fisici. Posso però dire per diretta conoscenza, che il LE DANOIS è anche un bravo marinaio bretonne che conosce assai bene le navigazioni atlantiche. In fondo voglio assumere una posizione intermedia come l'oceanografo HERDMAN. I rami delle calde correnti atlantiche che toccando le coste europee generano i ben noti prodigi delle ripercussioni sull'agricoltura, ormai non si considerano più da alcuni come rami della corrente del golfo; è una questione di terminologia ma sta di fatto che non è necessaria la sola corrente del golfo per determinare correnti di acque calde, che come del resto è arcinoto si verificano in modo analogo nelle acque del Pacifico e in altri mari. Circa le cause di periodicità delle trasgressioni eccezionali sono state poste in relazione con diversi fenomeni astronomici, tra i quali anche le macchie solari.

Gli oceanografi sanno che le correnti atlantiche non sono solo dovute ai venti, ma anche alle differenze di temperatura, come già LEONARDO aveva divinato, e di salinità come rilevarono HELLAND HANSEN e NANSSEN che appartenne alla nostra famiglia zoologica e prima di loro il MARSIGLI;

si debbono cioè, come anche si dice, non solo a forze esterne ma anche a forze interne archimedee. Il contendere ormai sulla natura delle correnti atlantiche sarebbe un controsenso.

Una cosa è certa, la scienza oceanografica deve essere collegata maggiormente così alla fisica e alla chimica del mare che alla meteorologia; ma non esagerare nessuna delle moderne tendenze. Oggi distinguiamo alcune correnti cogli indicatori chimici, talvolta con indicatori biologici, e non è senza significato che è stato un chimico, il CLEVE, divenuto botanico, a mettere in evidenza speciali organismi che individuano alcune correnti.

È uno dei tanti meriti del Principe di Monaco avere intimamente collegati gli studi dell'oceanografia agli studi dell'alta atmosfera e a quelli fisico-chimici.

Non solo naturalmente la vita dell'oceano non può considerarsi indipendentemente da quella dell'atmosfera e dal chimismo delle acque, ma le dottrine dell'una si ripercuotono sull'altra.

È per analogia colle moderne conoscenze sulla stratosfera e la troposfera che DEFANT, come è noto, ha sviluppato la sua teoria della troposfera e della stratosfera dell'Oceano che limitano masse d'acqua perturbate e non perturbate e di differente temperatura.

I biologi marini sanno da tempo e sembra paradossale che i più delicati scheletri come quello della vaga spugna *Euplectella* che sembra un tessuto di fate e che su per giù ogni studente universitario ha visto, si riscontrano appunto negli abissi; ma pochi insegnanti avranno ricordato allo studente il motivo della tranquillità delle acque oceaniche profonde, per spiegare questi sottili ricami del dio Nettuno in confronto agli scheletri robusti dei coralli, che vivono solo in poche decine di metri di profondità e sottoposti quindi all'azione meccanica delle acque.

Robusti sono anche perchè sottoposti a notevoli azioni meccaniche i coralli che cingono lo scoscendimento dello zoccolo continentale lungo l'Oceano, e che io ho riscontrato anche nello scoscendimento del mare Ligure, estendendo nel Mediterraneo le ricerche di JOUBIN e della sua scuola.

* * *

Non voglio tacere delle più moderne conquiste della geofisica; non starei alle mie premesse perchè da tali conquiste la nostra scienza biologica ha sempre avuto nuovi stimoli.

Così nello studio delle correnti si è analizzato il campo di massa colla distinzione di superficie isostere ed isobare, che permettono di dividere la sezione trasversale in un certo numero di parallelogrammi.

L'applicazione della matematica ha cambiato l'oceanografia da scienza descrittiva in una scienza fisico-matematica.

Applicando considerazioni fisico-matematiche BJERKNES e i suoi seguaci hanno reso possibile derivare la velocità e la direzione delle correnti da osservazioni sugli indici della temperatura e della salinità dell'acqua che rompono l'equilibrio di densità. Tali osservazioni si compiono più facilmente che le corrispondenti osservazioni di corrente, ma richiedono una fitta rete di stazioni e conviene che questi calcoli di idrodinamica tengano conto di fattori difficilmente calcolabili per quanto talvolta riproducibili sperimentalmente, come le condizioni del fondo e della linea di costa che determinano vortici stazionari e correnti di compensazione.

Investigazioni matematiche in rapporto tra venti e correnti da parte di EKMAN hanno condotto a modificare le nostre idee circa i rapporti tra direzione dei venti e direzione delle correnti.

Da tempo poi sono note le applicazioni della matematica allo studio delle maree, che culminano nella loro analisi armonica, che ha tra di noi appassionati cultori in TENANI e in VERCELLI, al quale dobbiamo anche un analizzatore meccanico delle curve oscillanti.

Ma anche in altri campi dell'oceanografia, come è meno noto, DEFANT ha mostrato l'importanza di considerazioni fisico-matematiche nello studio della conduzione molecolare e della convezione dinamica, che tengono a portare il mare in una condizione isoterma e provano che questa stazionarietà è solo mantenuta da correnti che continuamente conducono acque fredde nella profondità.

Più recenti applicazioni del calcolo sono quelle del PETTERSSON sulle maree interne, ossia sulla maree sottomarine semidiurne e parallattiche di grande ampiezza, benchè sul significato di queste maree interne possa ancora contendersi come ha mostrato il nostro VERCELLI.

Le prime osservazioni sulla marea parallattica furono congiunte alle osservazioni di enormi cascate sottomarine di acqua oceanica rinnovellanti le acque stagnanti e conducendo frotte di pesci migratori quali maccarelli, aringhe ed eglefini. Ecco un inaspettato incontro fra la matematica, la geofisica e la pesca.

La realtà dell'esistenza della marea interna essendo stabilita dalle esperienze, restava a scoprire la causa di un fenomeno nuovo inatteso per matematici e i fisici.

Secondo la ipotesi di PETTERSSON sarebbe la componente verticale della gravitazione del Sole e della Luna agenti attraverso alla superficie del mare sulla sottostante massa mobile dell'acqua. È la massa intera dell'acqua tra la superficie e il fondo del mare che si muove alzandosi o discendendo secondo la direzione alternata della forza verticale di gravitazione F degli astri.

Questa circolazione sarebbe impercettibile se l'acqua di mare fosse omogenea; ma essendo divisa in strati di differente densità si rivela alla superficie di discontinuità.

L'applicazione della matematica alla oceanografia si è svolta poi non solo nella geofisica, ma anche nella talassografia, a parte le note ricerche biometriche sulla specie, anche nello studio dell'equilibrio dei viventi.

LOTKA colla sua biologia fisica è stato di ciò un geniale precursore e fece in Italia conoscere i suoi interessanti studi sulle catene di nutrimento.

In seguito VOLTERRA colla collaborazione di D'ANCONA ha espresso in diverse formule le leggi della lotta per l'esistenza tra le specie. Naturalmente non sono in grado di farne una critica dal punto di vista matematico; riconosco il merito di questo audace tentativo.

Alcune conclusioni però che se ne sono volute trarre non mi trovano consenziente nel senso che ricorre troppo spesso negli studi di VOLTERRA la frase di non considerare altri fattori, matematicamente esatta e biologicamente assurda. Il dramma della specie mangiante e mangiata in un punto dell'Oceano, rispetto ai numerosissimi punti in cui una specie vive perde di vista la vastità del campo in cui si opera.

È noto che in un certo momento vaste estensioni dell'Oceano furono coperte dei cadaveri di un pesce *Lopholatilus* che pareva già estinto quando si ritrovò, colla stessa frequenza alcuni anni dopo.

Com'è noto secondo la legge di SPENCER è enorme il numero dei discendenti di molte specie marine. I fattori naturali di disturbo in mare nella lotta per l'esistenza comprese le influenze climatiche risultano assai maggiori dell'azione umana che può avere importanza solo in zone ristrette di mare, ma per il diminuito reddito della pesca questa cessa prima che la specie sia minacciata, come con me ammettono altri oceanografi e pratici.

E quando uno studioso volle dimostrare l'esattezza della legge di VOLTERRA (tale è il titolo) con una verifica pratica della teoria collo studio della oscillazioni del mercato del pesce di Cagliari, egli si era semplicemente dimenticato di enumerare i prodotti della pesca meccanica inviati nel continente senza passare per il mercato. Altro che equazioni integro-differenziali, altro che esatta dimostrazione. Non voglio riaccendere una polemica, ma a tali critici secondo i quali la pesca meccanica, il cui sviluppo è costato venti anni di lotta, avrebbe spopolato il mare, mentre le statistiche mostrano che il prodotto della pesca era semplicemente raddoppiato, a tali critici dobbiamo dire che senza lo sviluppo di quella pesca meccanica centinaia di moto-pescherecci militarizzati in servizio di dragamine alle dirette dipendenze della F. Marina, oggi non solcherebbero i mari a difesa delle rotte del nostro naviglio mercantile e militare.

* * *

Se l'oceanoграфия, diremo così, di alto mare ci ha offerto il campo di discutere moderni problemi, non bisogna dimenticare l'importanza di alcuni fenomeni costieri. Anzi è proprio dallo studio dei mari sottili e poco profondi che, in vista dei grandi problemi economici della pesca, sono sorte le prime organizzazioni internazionali sullo studio del mare, dalle quali è mossa la unificazione dei metodi fisici e chimici perseguita poi anche dalla nostra Commissione internazionale per l'esplorazione del Mediterraneo, che ha l'onore di essere presieduta dal Grande Ammiraglio THAON DI REVEL.

Ho conosciuto forse troppi talassografi che ritengono che solo le ricerche di alto mare siano fruttuose; certamente lo erano come tutte le cose nuove, ma poi si è finito troppo per disprezzare le ricerche costiere ed è un errore grave, perchè gli studi del litorale interessano forse maggiormente non solo la biologia e la geologia, ma l'economia nazionale nei suoi aspetti della navigazione, delle bonifiche e della pesca.

Molti anni addietro, alle mie prime armi di talassografo, non comprendevo per esempio, come nel Mediterraneo si abbia un numero di sinistri marittimi più vicino alle coste che in alto mare. Ci vogliono i nostri bravi pescatori per conoscere le difficoltà dell'entrare con mare cattivo nei porto-canali oppure i cattivi tempi vicino alle isole, come nella tempesta di *Graziella* descritta da LAMARTINE. Ma io debbo oggi discutere solo di problemi scientifici.

Per questo ricordo il grande interesse che offre lo studio del litorale, quello delle erosioni marine e delle conseguenti variazioni della linea di spiaggia che ha presso di noi eminenti studiosi nell'ing. D'ARRIGO, nel prof. TONIOLO e collaboratori e di cui è nota l'importanza che per la costruzione dei porti e che richiede la conoscenza delle correnti lungo le spiagge sottili. Se la direzione dei servizi portuali di tutto il mondo avesse reclutato qualche geologo di più, sarebbero state risparmiate decine e centinaia di milioni, invece di ricorrere a pericolose improvvisazioni come quelle che un celebre Ministro dei Lavori Pubblici, SILVIO SPAVENTA, richiedeva al non meno celebre CORNAGLIA, perchè cercasse di abbreviare la discussione con un colpo di calcolo o simili. Salutammo perciò la corda batilologica marina del compianto collega MANFREDONIA come un mutamento di indirizzo.

Merita maggiore studio anche la psammografia che vanta le ricerche di SALMOIRAGHI, di CHELUSSI, di ARTINI, di CLERICI, di D'ACHIARDI e di FABIANI, ai quali voglio aggiungere il nome del compianto ing. CATTANEO a proposito della utilizzazione delle sabbie ferrifere tornate di moda.

Sono grato al Consiglio delle Ricerche di avere accolto la mia proposta di dare alla geologia marina maggiore importanza.

È merito di WASMUND aver fondato in Germania in Istituto di Geologia marina nell'Università di Kiel, incorporato poi nel servizio governativo del sottosuolo con estese applicazioni pratiche.

Lo studio oceanografico del litorale poi ha un'enorme importanza per la biologia; è sul confine della terra che le più aspre lotte dei viventi si sono manifestate nel passaggio dalla vita marina alla vita terrestre; passaggio di vivaci lotte per l'esistenza come mostra la così detta fauna intercotidale, oggetto di nostri prediletti studi, che ha sospinto le forme animali verso grandi conquiste. Tale studio oceanografico del litorale illumina la geopaleontologia marina che ha in Italia nei BLANC insigni cultori. Quando studiavo nell'Istituto oceanografico di Monaco non capivo nell'inizio perchè il Principe di Monaco avesse avvicinato gli studi del mare a quelli della paleontologia umana coi celebri scavi delle grotte di GRIMALDI, ma poi mi apparve l'intimo legame di questi studi che è quello che nel mare e nell'uomo vedono il punto di partenza e di arrivo della evoluzione dei viventi, e se vogliamo il punto di partenza e di arrivo della scienza umana.

Le oscillazioni del livello marino non interessano oggi soltanto colle variazioni delle linee di spiaggia, ma interessano l'antica storia degli oceani e dei mari aperti. Le grandi oscillazioni climatiche dell'era glaciale sono state infatti accompagnate da spostamenti talora notevoli del livello degli oceani e dei mari aperti. Ad ogni periodo glaciale, come ricorda A. C. BLANC, masse enormi d'acqua venivano sottratte al velo idrico e trattenute sui continenti a formare le immense calotte di ghiaccio ricoprenti metà dell'Europa e dell'America settentrionale e vaste regioni dell'Asia. Nel ciclo idrico terrestre diminuiva quindi la quantità di acqua che ritornava al grande serbatoio oceanico e il livello dei mari si abbassava di conseguenza talvolta di centinaia di metri. Lo stesso autore attratto da una visione non meno realistica che poetica, pensa che questo lento e ritmico respiro degli oceani ha avuto una grande influenza sulla diffusione di animali e di piante e nelle migrazioni umane.

Le pianure costiere, i ponti che si stabilivano fra sponde opposte durante i periodi glaciali, per esprimerci con detto autore, sono state infatti le vie percorse dalla fauna e dall'uomo, sospinti dal gelo e dalla fame verso nuovi orizzonti.

È universalmente noto che il cambiamento di livello dell'Oceano durante le epoche passate è uno dei più grandi problemi della geologia e della paleogeografia in cui si rivelarono il genio di LYELL, di DANA e di SUESS. Debbo rasserenare gli uditori che volgo alla fine del mio discorso. Il tema da noi trattato è così vasto che minaccerebbe diventarlo anche più se avessimo la pretesa, con un viaggio più periglioso di quello di Ulisse,

perchè dovremmo muovere dal mare primigenio della Pantalassa che tutta copriva la Terra, di disentere dei rapporti degli antichi mari e degli antichi continenti. E tuttavia non possiamo tacere che una delle più recenti e discusse ipotesi, quella di WEGENER sulla deriva dei continenti, è in certo modo una ipotesi oceanografica, in cui i continenti alla deriva somigliano a gigantesche masse fluttuanti sull'Oceano del Sima. Il fondo degli oceani sarebbe il custode di questo Sima di natura basaltica, in confronto al più leggero Sial delle masse continentali. Una cosa è certa all'infuori di ogni discussione: le antiche connessioni dei continenti esigono lo studio dei mari primitivi e delle sedimentazioni marine; ciò del resto è noto ai geologi fino dalle antiche discussioni tra nettunisti e plutonisti che deliziarono la nostra giovinezza avida di scontri di dottrine. Se prendiamo come punto di partenza questa teoria, noi veniamo a soddisfare a tutti i postulati sia della teoria degli antichi collegamenti che della dottrina della permanenza. Si parla bensì di ponti continentali, ma come collegamento di terre ora separate e non attraverso continenti sprofondati e si parla di permanenza non dei singoli oceani o continenti come tali, bensì dell'area complessiva degli oceani e dei continenti.

Il problema della deriva dei continenti si riconnette allo studio dell'isostasi e della geologia sottomarina a cui sono collegate ricerche gravimetriche in oceano eseguite con l'aiuto dei sottomarini, che vennero anche discusse in questa sede.

Queste ricerche si ricollegano poi ai più moderni risultati circa la notevole difformità del fondo oceanico, che non era prevista al di là dello zoccolo continentale.

* * *

Ci siamo permessi una così rapida trattazione o meglio sfioramento di problemi, perchè abbiamo l'onore di parlare d'innanzi a Maestri di singole discipline, i quali naturalmente troveranno diverse lacune in questo nostro tentativo di porre in evidenza progressi e problemi della scienza del mare, che richiederebbero ben altro respiro, ben altro tempo, e ben altro dominio.

Abbiamo visto che l'oceanografia non consente quelle soverchie specializzazioni che io chiamo di isolamento, e che appartengono all'artificio della scienza umana e non alla natura.

L'oceanografia è stata l'antesignana di intimi incontri tra la fisica e la chimica, la geologia e la biologia; è noto che l'oceanografo MURRAY era solito interloquire, e con quale competenza, in alcuni campi, ove chimici e geologi trovavano ragioni di dissidio, ma anche problemi di studio delle due scienze confinanti. Non possiamo dimenticare in questo campo THOU-

LET di cui conoscemmo la ancor geniale vecchiaia. I fondi marini furono da lui sottoposti ad accurate analisi, valendosi anche di metodi nuovi.

Le innumerevoli e ingenti spoglie di viventi che si accumulano nel fondo dei mari per formare nuove rocce ci fanno meditare sopra un aspetto umano della scienza, in cui fasi di morte e di vita passano nei grandi archivi anagrafici delle sedimentazioni.

Un solo problema di proposito non abbiamo trattato; quello che viceversa più attira il grosso pubblico; la possibilità di trarre ingenti quantità di oro dal mare, problema che dal punto di vista scientifico e pratico è enormemente differente e del quale tuttavia si seguita continuamente a parlare.

Anche supponendo risolto il problema, tutti gli oceanografi sanno che in tal caso ogni uomo diverrebbe milionario, ma si verificherebbe la profezia di quel critico dell'alchimia che diceva che gli uomini rimarrebbero allora ugualmente poveri; ma vi è certamente un oro più prezioso da trarre dal mare e questo è l'infinita poesia di una scienza che lavora per l'elevazione dell'umanità, che a contatto coi grandi quotidiani drammi del mare più apprezza il valore della vita, e dinnanzi ai grandi spettacoli della natura induce l'uomo a meditare quella infinita armonia delle forze naturali, che era la gioia e il travaglio della scienza di Leonardo, che mai come dinnanzi al moto delle acque assurse alle più divine sembianze, trasmettendoci la face inestinguibile della scienza italiana del Rinascimento.

Matematica. — *Corrispondenza conforme tra campi complementari.* Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

1. CAMPI COMPLEMENTARI. — Si consideri il piano complesso $z = x + iy$ diviso in due parti C e C_1 da una linea *semplice* l che costituisce netta separazione tra C e C_1 (fig. 1, 2); colla qualifica *semplice* si vuol esclu-

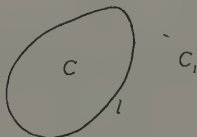


Fig. 1.



Fig. 2.

dere per esempio, il caso in cui l presenta dei cappi (fig. 3 e 4). Se l è chiusa (fig. 1), rappresenti C la porzione *limitata* o *interna* e C_1 quella *illimitata* o *esterna*. Si potrà sempre assumere l'origine $z = 0$ in C ; il

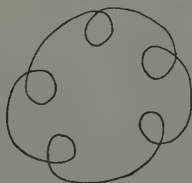


Fig. 3.



Fig. 4.

punto $z = \infty$ appartiene a C_1 . Se l è linea *aperta* (fig. 2) entrambe le regioni C e C_1 sono *illimitate*. Si ammette che la linea l di separazione tra le dette regioni C e C_1 abbia andamento tale che C e C_1 debbano comprendere complessivamente, e senza sovrapposizioni, tutti i punti del piano.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 22 gennaio 1943 XXI.

Nel caso della linea aperta il punto all'infinito appartiene alla linea stessa, allora si converrà di assumere il punto $z = 0$ in un punto proprio della stessa linea l . In tutti i casi chiameremo C e C_1 campi complementari.

2. CAMPI COMPLEMENTARI TIPICI. — Un esempio tipico nel quale il campo C è limitato si ha quando l è una circonferenza (fig. 5) il cui raggio potremo assumere unitario.

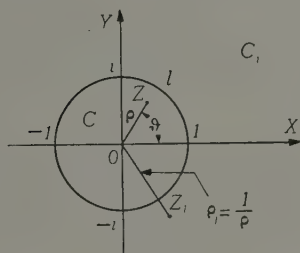


Fig. 5.

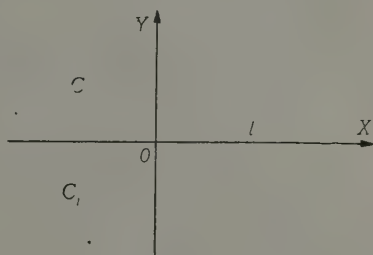


Fig. 6.

Posto

$$Z = \rho e^{i\theta} \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X},$$

i due campi sono contraddistinti dalle condizioni

$$\rho < 1 \quad \text{in} \quad C, \quad \rho > 1 \quad \text{in} \quad C_1.$$

L'esempio più semplice di campi complementari illimitati si ha quando l è una retta (fig. 6). Assunta questa retta come asse dei numeri reali X e l'asse Y orientato dalla parte di C , i due campi C e C_1 risultano caratterizzati dalle seguenti condizioni:

$$Y > 0 \quad \text{in} \quad C, \quad Y < 0 \quad \text{in} \quad C_1.$$

3. CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA CAMPI COMPLEMENTARI TIPICI. — Riferendoci al caso di C circolare si potrà stabilire tra i punti

$$Z = \rho e^{i\theta}$$

di C e i punti Z_1 di C_1 la nota corrispondenza biunivoca per raggi vettori reciproci, per cui

$$[1] \quad Z_1 = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}.$$

In virtù di tale corrispondenza il modulo di Z_1 è

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho} > 1.$$

Sopra l ; avendosi $\rho = 1$, risultano:

$$Z = e^{i\theta} \quad , \quad Z_1 = e^{-i\theta} = \bar{Z};$$

essendo Z e \bar{Z} quantità complesse coniugate ⁽¹⁾, le coppie di punti corrispondenti sono punti della circonferenza simmetricamente disposti rispetto all'asse reale.

Se ci riferiamo ora al caso in cui C e C_1 sono semipiani rileviamo che ad ogni punto $Z = X + iY$ di C si può far corrispondere il punto $Z_1 = X - iY = \bar{Z}$ di C_1 ; tale corrispondenza è manifestamente biunivoca, solamente i punti dell'asse reale hanno per corrispondenti se stessi, cioè sono punti *uniti*.

4. CASO GENERALE DI l CHIUSA. - Riferendoci al caso di due regioni complementari C e C_1 nelle quali C è limitata, vogliamo stabilire una corrispondenza biunivoca quando l è una linea chiusa semplice qualsiasi (fig. 1).

Siano

$$[2] \quad z = \Psi(Z) \quad , \quad Z = \Psi^*(z),$$

dove Ψ^* è la funzione inversa di Ψ ⁽²⁾, le relazioni che mettono in corrispondenza biunivoca il campo C del piano $z = x + iy$ (fig. 7) col cerchio Γ del piano $Z = X + iY$ (fig. 8).

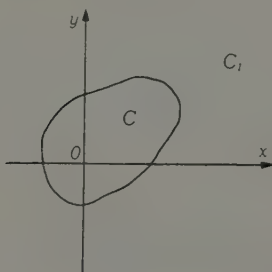


Fig. 7.

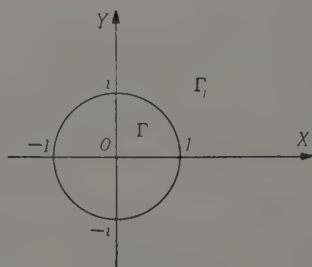


Fig. 8.

Parimenti siano

$$[3] \quad z_1 = \Psi_1(Z_1) \quad , \quad Z_1 = \Psi_1^*(z_1)$$

⁽¹⁾ Verrà in seguito indicata colla lineetta sovrapposta ad una lettera la quantità coniugata di quella rappresentata dalla stessa lettera senza soprassegno.

⁽²⁾ Anche nel seguito verranno indicate con asterisco le funzioni *inverse* di quelle rappresentate colla medesima lettera senza asterisco.

le relazioni che mettono in corrispondenza biunivoca e conforme i due piani forati C_1 e Γ_1 (fig. 7 e 8). Se z è l'affissa di un punto comune prescelto di C , ad esso corrisponde in Γ il punto

$$Z = \Psi^*(z);$$

siccome è per la [1]

$$[4] \quad Z_1 = \frac{1}{Z}$$

il corrispondente di Z in Γ_1 , si avrà per la precedente e la prima di [3], mediante la eliminazione di Z_1 , la relazione seguente

$$[5] \quad \boxed{z_1 = \Psi_1 \left(\frac{1}{\Psi^*(z)} \right)}$$

che stabilisce la corrispondenza conforme tra i punti di C e quelli di C_1 .

La precedente relazione definisce esplicitamente z_1 in funzione di z ; ma facilmente si deduce da [5] la z in funzione esplicita di z_1 ; si ha infatti per la [4], tenute presenti le relazioni ultime di [2] e [3]:

$$[6] \quad \boxed{\Psi^*(z) \cdot \Psi_1^*(z_1) = 1},$$

ovvero

$$\Psi_1^*(z_1) = \frac{1}{\Psi^*(z)}, \quad \Psi^*(z) = \frac{1}{\Psi_1^*(z_1)},$$

la prima delle quali risolta rispetto a z_1 diviene la [5], mentre la seconda risolta rispetto a z dà:

$$[5'] \quad \boxed{z = \Psi \left(\frac{1}{\Psi_1^*(z_1)} \right)}.$$

La relazione [5] e le equivalenti [6] e [5'] esprimono l'estensione a due campi complementari C e C_1 della corrispondenza per raggi vettori reciproci classica per l circolare. Infatti nel caso particolare in cui l è una circonferenza di raggio R è

$$z = RZ, \quad z_1 = RZ_1,$$

per cui

$$\Psi(Z) = RZ, \quad \Psi^*(z) = \frac{z}{R}, \quad \Psi_1(Z_1) = RZ_1, \quad \Psi_1^*(z_1) = \frac{z_1}{R},$$

in conseguenza le [5], [6] e [5'] divengono rispettivamente:

$$z_1 = \frac{R^2}{z}, \quad z \cdot z_1 = R^2, \quad z = \frac{R^2}{z_1},$$

com'è ben noto.

5. APPLICAZIONE A UN CONTORNO ELLITTICO. — Sia l un'ellisse di semiasse a e $b < a$ (fig. 9).

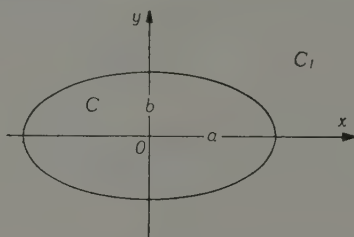


Fig. 9.

Colle posizioni:

$$[7] \quad z_1 = \frac{a+b}{2} \left(Z_1 + \frac{\sqrt{q}}{Z_1} \right), \quad Z_1 = \frac{z_1}{a+b} + \sqrt{\frac{z_1^2}{(a+b)^2} - \sqrt{q}},$$

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2,$$

il piano C_1 forato ellitticamente (fig. 9) viene messo in corrispondenza biunivoca e conforme col piano Γ_1 forato circolarmente (fig. 8).

Ponendo:

$$[8] \quad \left\{ \begin{aligned} Z &= \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right), \\ k &= 4\sqrt{q} \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} \\ \left| \frac{2K}{\pi} \right| &= (1-q^2)(1-q^4)\cdots[(1+q)(1+q^3)\cdots]^2, \end{aligned} \right.$$

vengono messi in corrispondenza biunivoca e conforme l'area ellittica C (fig. 9) e l'area circolare Γ (fig. 8) (1).

(1) FORSYTH, *Theory of Function of a complex variable*, Cambridge, University Press, 1893, pag. 505.

Riferendoci al contenuto del numero precedente da [8] si ricava:

$$[9] \quad \begin{cases} \Psi(Z) = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sn} \left(\frac{\pi}{2K} \operatorname{sn}^* \frac{Z}{\sqrt{k}} \right), \\ \Psi^*(z) = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right), \end{cases}$$

Per [7] si ha:

$$[10] \quad \begin{cases} \Psi_1(Z_1) = \frac{a+b}{2} \left(Z_1 + \frac{\sqrt{q}}{Z_1} \right), \\ \Psi_1^*(z_1) = \frac{z_1}{a+b} + \sqrt{\frac{z_1^2}{(a+b)^2} - \sqrt{q}}. \end{cases}$$

Pertanto la [6] nel caso attuale risulta essere:

$$[11] \quad \left[\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \left(\frac{z_1}{a+b} + \sqrt{\frac{z_1^2}{(a+b)^2} - \sqrt{q}} \right) = 1 \right].$$

Questa relazione mette in corrispondenza biunivoca e conforme l'area ellittica colla rimanente parte, cioè il piano forato secondo l'ellisse stessa.

Nel caso particolare di $a = b = R$, avendosi:

$$q = 0, \quad k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} u \right) = u,$$

e infine

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) &= \lim \sqrt{\frac{k}{a^2 - b^2}} z = z \lim \sqrt{\frac{k}{a^2 - b^2}} = \\ &= 2z \lim \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 2z \lim \sqrt{\frac{\frac{a-b}{a+b}}{(a-b)(a+b)}} = 2z \lim \frac{1}{a+b} = \frac{z}{R}, \end{aligned}$$

la [11] diviene:

$$z \cdot z_1 = R^2,$$

che è la nota corrispondenza per raggi vettori reciproci.

Ponendo:

$$[12] \quad \chi(z) = \frac{a+b}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)} + \sqrt{q} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{z}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right) \right\}$$

la relazione [11] può scriversi

$$[13] \quad z_1 = \chi(z),$$

che risolta rispetto a z fornisce

$$z = \chi^*(z_1).$$

Scende dalla [12] che $\chi(0) = \infty$: dunque al centro dell'area ellittica ($z = 0$) corrisponde il punto all'infinito del piano forato.

6. CASO GENERALE DI l APERTA. — Riferendoci al caso di due regioni complementari C e C_1 nelle quali l è una linea aperta (fig. 2) vogliamo ora stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti z di C e quelli z_1 di C_1 che nel caso particolare di l rettilinea (fig. 6) vada a coincidere con quella già messa in rilievo: cioè a ogni punto z di C corrisponda il punto $z_1 = \bar{z}$ di C_1 che è il simmetrico del primo rispetto all'asse reale. A tal uopo si immaginino note le relazioni che mettono in corrispondenza biunivoca e conforme il campo C del piano $z = x + iy$ col semipiano $Y \geq 0$ del piano $Z = X + iY$; siano esse:

$$[14] \quad z = \Phi(Z) \quad , \quad Z = \Phi^*(z).$$

Analogamente, siano

$$[15] \quad z_1 = \Phi_1(Z_1) \quad , \quad Z_1 = \Phi_1^*(z_1)$$

le relazioni che mettono in corrispondenza biunivoca e conforme il campo C_1 del piano $z = x + iy$ e il semipiano $Y \leq 0$ del piano $X + iY$. Se z è un punto generico di C , esso ha per corrispondente a norma della seconda di [14] il punto $Z = \Phi^*(z)$ del semipiano $Y \geq 0$; sarà $Z_1 = \bar{Z}$ il punto corrispondente di Z nel semipiano $Y \leq 0$, cioè:

$$Z_1 = \overline{\Phi^*(z)} = \overline{\Phi^*(z)}.$$

Infine per la prima di [15] sarà

$$[16] \quad z_1 = \Phi_1 \left[\overline{\Phi^*(z)} \right]$$

il punto z_1 di C_1 che corrisponde al prescelto punto z di C .

Nel caso particolare in cui l è l'asse reale, avendosi:

$$z = Z \quad , \quad z_1 = Z_1$$

risulta

$$\Phi(Z) = Z \quad , \quad \Phi^*(z) = z \quad , \quad \Phi_1(Z_1) = Z_1 \quad , \quad \Phi_1^*(z_1) = z_1;$$

quindi

$$\Phi = \Phi^* = \Phi_1 = \Phi_1^*,$$

per cui la [16] diviene:

$$z_1 = z,$$

come si sapeva.

7. APPLICAZIONE A UN CONTORNO PARABOLICO. — Prendiamo in esame il caso particolare in cui l è una parabola (fig. 10) di parametro p :

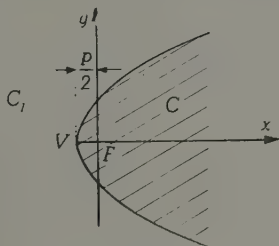


Fig. 10.

sia essa riferita a un sistema di assi cartesiani coll'origine nel foco e l'asse delle ascisse coincidente coll'asse della parabola.

Colla posizione:

$$[17] \quad Z = i \operatorname{Ch} \pi \sqrt{\frac{z}{2p}}$$

vengono messi in corrispondenza biunivoca e conforme il campo C , tratteggiato nella figura 10, che si suole chiamare *interno della parabola*, e il semipiano $Y \geq 0$ del piano $Z = X + iY$, pure tratteggiato nella figura 11.

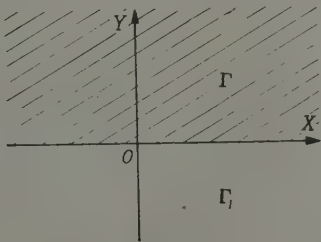


Fig. 11.

Colla posizione

$$[18] \quad Z_1 = i\sqrt{p} - \sqrt{2z_1}$$

vengono messi in corrispondenza la regione C_1 esterna e il semipiano Γ_1 di coordinate negative $Y \leq 0$. Dal confronto delle [14] con [17] risulta

che nel caso in discorso è:

$$[19] \quad \Phi(Z) = \frac{2p}{\pi^2} \overline{\text{Sett Ch}}^2(-iZ) \quad , \quad \Phi^*(z) = i \text{Ch } \pi \sqrt{\frac{z}{2p}} ,$$

avendo indicato con *Sett Ch* la funzione inversa di *Ch*.

Dal confronto di [18] colle [15] si ottengono le relazioni:

$$[20] \quad \Phi_1(Z_1) = \frac{1}{2} (i\sqrt{p} - Z_1)^2 \quad , \quad \Phi_1^*(z_1) = i\sqrt{p} - \sqrt{2z_1} .$$

Per [19] e [20] la [16] diviene:

$$[21] \quad \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{p} + \text{Ch } \pi \sqrt{\frac{\bar{z}}{2p}} \right)^2} .$$

Questa relazione fa corrispondere a un punto z i C il punto z_1 di C_1 . In questa corrispondenza i punti uniti appartengono alla parabola l , cioè ogni punto z di l ha per corrispondente $z_1 = z$, com'è naturale se si pensa che punti z e z_1 hanno per corrispondenti nei rispettivi semipiani i punti Z e Z_1 e che nella corrispondenza tra questi ultimi i punti uniti si trovano sull'asse reale del piano Z e quest'asse è in corrispondenza colla parabola. Tuttavia se ne può fare anche la verifica formale notando che, per [17], su l deve essere Z reale per cui

$$\text{Ch } \pi \sqrt{\frac{\bar{z}}{2p}} = -\text{Ch } \pi \sqrt{\frac{z}{2p}} \quad \text{sopra } l ;$$

in conseguenza [21] può scriversi

$$z_1 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{p} - \text{Ch } \pi \sqrt{\frac{z}{2p}} \right)^2 \quad \text{sopra } l .$$

D'altra parte sopra l è $Z = Z_1$ per cui da [17] e [18] si deduce

$$\text{Ch } \pi \sqrt{\frac{z}{2p}} = \sqrt{p} + i\sqrt{2z} ;$$

da questa e dalla precedente relazione scende appunto

$$z_1 = z , \quad \text{c. d. d.}$$

Matematica. — *Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati* ⁽¹⁾.
Nota di LUIGI AMERIO, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE,
Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella trattazione del problema di DIRICHLET per le equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine, di tipo ellittico, contenuta nei suoi *Appunti di Analisi Superiore*, il prof. PICONE dimostra come tale problema risulti determinato anche se il dominio di integrazione è illimitato quando si imponga alla soluzione un opportuno comportamento all'infinito, senza fare alcuna ipotesi sulla natura delle derivate parziali nell'intorno di tale punto, ipotesi che, ammesse generalmente per superare delle difficoltà analitiche, rendono lo studio di questo caso diverso da quello relativo ai domini limitati.

Esponendo poi tali questioni durante il corso di lezioni tenuto presso l'Istituto di Alta Matematica nell'anno 1941-1942, con particolare riguardo all'equazione

$$[I] \quad \Delta_2 U - \lambda U = 0, \quad (\lambda > 0)$$

ha proposto di ricercare se esiste effettivamente la soluzione dotata del comportamento indicato.

Tale ricerca è l'oggetto della presente Nota. Si dimostra, in questa, che la soluzione del problema così posto esiste sotto larghissime condizioni per una equazione lineare del secondo ordine, di tipo ellittico. Si sono infatti ottenuti due teoremi di esistenza, il primo ammettendo un comportamento all'infinito dei dati assegnati sul contorno un po' più generale di quello indicato dal prof. PICONE, il secondo ammettendo invece un tale comportamento, con una ulteriore precisazione. Si dimostra inoltre che, in questo secondo caso, la soluzione ha il comportamento all'infinito richiesto per la sua unicità.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

Infine si sono applicati i risultati ottenuti allo studio dell'equazione [I] nei domini illimitati, in due e in tre variabili.

1. Si consideri l'equazione lineare a derivate parziali, di tipo ellittico,

$$[1] \quad E(u) = \sum_{i,k}^{1 \dots n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_1^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

dove le a_{ik} , b_i , c , f sono funzioni reali e continue in un insieme A aperto e illimitato di S_n .

Se D è un insieme contenuto in A , indicheremo, in quanto segue, con FD la frontiera di D , con P, Q, R un generico punto variabile in $D, FD, D + FD$; si porrà poi, in corrispondenza a ogni punto $K(x_1, \dots, x_n)$,

$$|K| = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}.$$

Diremo infine che una funzione ω è *regolare* in un insieme aperto B contenuto in A se è continua in $B + FB$ ed è dotata di tutte le derivate di ordine ≤ 2 che compaiono nella [1], continue in B .

2. Ricordiamo due teoremi relativi all'equazione [1] e dovuti al prof. PICONE^(*).

I. Sia A limitato, $c \leq 0$, $f \leq 0$. Se esiste una funzione ω regolare in A , con

$$\omega(R) > 0, \quad E(\omega) < 0,$$

una soluzione regolare della [1] che sia ≥ 0 su FA è ≥ 0 in A .

II. Sia A illimitato, $c \leq 0$ ed esista una funzione ω , regolare in A , con

$$\omega(R) > 0, \quad E(\omega) < 0.$$

Se esiste una funzione $\varphi(R)$, con

$$E(\varphi) \leq 0,$$

regolare in A e positiva in $A + FA$, assegnata comunque in FA una funzione continua $h(Q)$, tale che risulti

$$[2] \quad \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h(Q)}{\varphi(Q)} = 0,$$

(*) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 695-696, 701-704.

è unica la funzione u , regolare in A , soddisfacente alla [1] e alle condizioni

$$u(Q) = h(Q),$$

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} \frac{u(R)}{\varphi(R)} = 0.$$

3. Il Teorema II dà una condizione sufficiente per l'unicità della soluzione del problema di DIRICHLET relativo alla [1] nell'insieme illimitato A .

Mostreremo ora, nei due teoremi seguenti, come la condizione [2], o una ad essa vicina, possa venir utilizzata per provare l'esistenza della soluzione.

III. Sia A illimitato, $c \leq 0$ ed esista una funzione ω , regolare in A , con

$$\omega(R) > 0 \quad , \quad E(\omega) < 0.$$

Assegnata poi in FA una funzione continua $h(Q)$, supponiamo che:

a) esista una funzione non negativa φ , regolare in A , con

$$E(\varphi) \leq -|f|,$$

$$\varphi(Q) \geq |h(Q)|;$$

b) esista una successione $\{\lambda_n\}$, con

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

tale che il problema di Dirichlet relativo alla [1] sia univocamente risolubile in ogni insieme B_n formato dai punti di A interni all'ipersfera Σ_n col centro nell'origine e raggio λ_n ⁽⁴⁾;

(⁴) L'esistenza della soluzione del problema di DIRICHLET relativo alla [1] in un dominio limitato C è assicurata quando le a_{ik} , b_i , c , f siano in C hölderiane e FC soddisfi a opportune condizioni di regolarità (M. GEVREY, *Determination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique*. « Journal de Math. », vol. IX, 1930, pagg. 60, 68-72; J. SCHAUDER, *Lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. « Math. Zeit. » 1933, vol. 38, pagg. 277-279). Se poi si suppongono le derivate prime delle b_i e le derivate seconde delle a_{ik} hölderiane in C le condizioni di regolarità relative a FC per l'equazione di Laplace valgono anche per la [1] (G. TAUTZ, *Reguläre Randpunkte beim verallgemeinerten Dirichletschen Problem*. « Math. Zeit. », 1935, vol. 39, pagg. 550-554).

c) presa comunque un'ipersfera T , tale che l'insieme $T + FT$ sia contenuto in A , la soluzione (unica) del problema di Dirichlet in T , per $f \equiv 0$ in $T + FT$, sia data da un'espressione del tipo

$$u(P) = \int_{FT} u(Q) H_T(P, Q) dQ,$$

con $H_T(P, Q)$ funzione continua di (P, Q) per Q variabile in FT e P nell'interno di T ⁽⁵⁾.

Allora esiste una funzione u , regolare in A , la quale soddisfa ivi alla [1] e, inoltre, alle condizioni

$$u(Q) = h(Q),$$

$$|u(R)| \leq \varphi(R).$$

DIMOSTRAZIONE. — Cominciamo con l'osservare che, senza ledere la generalità, si può sempre supporre $h(Q) \geq 0$ su FA , $f(P) \leq 0$ in A , poichè, per la linearità della (1), la soluzione del caso generale si deduce da quella di questo caso. La condizione a) diventa allora: $E(\varphi) \leq f$, $\varphi(Q) \geq h(Q)$. Considerato poi l'insieme B_{n+1} , definiamo nei punti di FB_{n+1} una funzione continua $k_n(Q)$ ponendo

$$[3] \quad k_n(Q) = h(Q)$$

nei punti di FB_{n+1} interni all'ipersfera Σ_n , e ponendo

$$[4] \quad k_n(Q) = h(Q) \frac{\lambda_{n+1} - |Q|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

nei rimanenti punti di FB_{n+1} .

Sarà perciò $0 \leq k_n(Q) \leq h(Q)$ nei punti di FB_{n+1} appartenenti a FA , e $k_n(Q) = 0$ nei punti di FB_{n+1} situati sul contorno dell'ipersfera Σ_{n+1} .

Sia $u_n(P)$ la soluzione del problema di DIRICHLET relativo alla [1] nell'insieme B_{n+1} , soddisfacente nei punti di FB_{n+1} alla condizione

$$[5] \quad u_n(Q) = k_n(Q).$$

Sarà per il Teorema I, in tutti i punti di $B_{n+1} + FB_{n+1}$,

$$[6] \quad u_n \geq 0.$$

(⁵) M. GEVREY, loc. cit. in (⁴).

Osserviamo ora che, essendo $u_n(Q) = 0$ per $|Q| = \lambda_{n+1}$, risulta $\varphi(Q) - u_n(Q) \geq 0$ nei punti di FB_{n+1} e inoltre $E(\varphi - u_n) \leq 0$ nei punti di B_{n+1} .

Ne segue, per le [5], [6] e per il Teorema I, in tutti i punti di B_{n+1} ,

$$[7] \quad 0 \leq u_n(P) \leq \varphi(P).$$

Considerando poi la funzione $u_{n+1}(P)$, si ha in tutti i punti di $B_{n+2} + FB_{n+2}$

$$[8] \quad u_{n+1} \geq 0$$

e inoltre, nei punti di FB_{n+1} ,

$$[9] \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

Infatti la [9] è verificata nei punti di FB_{n+1} interni all'ipersfera Σ_{n+1} , avendosi, in essi,

$$u_{n+1}(Q) = k_{n+1}(Q) = h(Q) \geq k_n(Q) = u_n(Q).$$

Nei rimanenti punti di FB_{n+1} , situati sul contorno dell'ipersfera Σ_{n+1} , si ha poi

$$u_n(Q) = k_n(Q) = 0$$

e quindi dalla [8] segue la [9].

Siccome, per P in B_{n+1} , risulta $E(u_{n+1} - u_n) = 0$, per le [7], [9] e per il Teorema I, si ricava che la disuguaglianza

$$[10] \quad \varphi(P) \geq u_{n+1}(P) \geq u_n(P) \geq 0$$

vale in tutti i punti P di B_{n+1} .

Preso comunque P in A , esiste allora finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = u(P)$$

e soddisfa alla disuguaglianza

$$[11] \quad 0 \leq u(P) \leq \varphi(P).$$

Dimostriamo che la funzione $u(P)$ così ottenuta soddisfa all'equazione [1] in tutti i punti di A .

Per questo, si consideri un'ipersfera T , tale che $T + FT$ sia costituita dai punti di A , e supponiamo che P vari in un insieme chiuso D

interno a T . Se ν è il più piccolo intero positivo per cui T è contenuto in B_ν si ha, per la condizione c), supposto $\nu \leq m < n$,

$$[12] \quad |u_m(P) - u_n(P)| = \\ = \left| \int_{FT} (u_m(Q) - u_n(Q)) H_T(P, Q) dQ \right| \leq M \int_{FT} |u_m(Q) - u_n(Q)| dQ$$

dove M è il massimo di $|H_T(P, Q)|$ al variare di Q in FT e di P in D .

Dalla [12], per il teorema di ARZELÀ-LEBESGUE, segue la uniforme convergenza della successione $\{u_n(P)\}$ in D e quindi si deduce che la funzione limite $u(P)$ è continua in tutti i punti di A .

Si ha poi, per P in D ,

$$\begin{aligned} u(P) &= u_\nu(P) + (u(P) - u_\nu(P)) = u_\nu(P) + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(P) - u_\nu(P)) = \\ &= u_\nu(P) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{FT} (u_n(Q) - u_\nu(Q)) H_T(P, Q) dQ = \\ &= u_\nu(P) + \int_{FT} (u(Q) - u_\nu(Q)) H_T(P, Q) dQ \end{aligned}$$

e quindi $u(P)$ soddisfa in tutti i punti di A alla [1].

Proviamo ora che la $u(P)$ è continua anche nei punti di FA .

Per questo, preso un punto Q_0 di FA , bisogna dimostrare che è

$$[13] \quad \lim_{P \rightarrow Q_0} u(P) = h(Q_0).$$

Sia $\Sigma_{\nu+1}$ la prima ipersfera della successione $\{\Sigma_n\}$ tale che Q_0 risulti interno all'ipersfera Σ_ν ; preso $\varepsilon > 0$ si può determinare $\delta > 0$ in modo che, per $\overline{PQ_0} < \delta$, sia

$$|u_\nu(P) - k_\nu(Q_0)| = |u_\nu(P) - h(Q_0)| < \varepsilon$$

e quindi

$$[14] \quad u(P) \geq u_\nu(P) > h(Q_0) - \varepsilon.$$

Definiamo poi una funzione $\vartheta(Q)$, continua in FB_ν , ponendo

$$[15] \quad \vartheta(Q) = h(Q) + \varphi(Q) \frac{\overline{Q_0 Q}}{\lambda_\nu - |Q_0|}$$

nei punti di FA non esterni a Σ_ν e prolungando con continuità, in un modo qualsiasi, la definizione di $\vartheta(Q)$ nei rimanenti punti dei FB_ν situati

sul contorno di Σ_v in modo però che, in essi, risulti sempre $\vartheta(Q) \cong \varphi(Q)$ ciò che è possibile perchè, se \bar{Q} è un punto di FA posto sul contorno di Σ_v , si ha, per la [15],

$$\vartheta(\bar{Q}) = h(\bar{Q}) + \varphi(\bar{Q}) \frac{\overline{Q_0 \bar{Q}}}{\lambda_v - |Q_0|} \cong \varphi(\bar{Q}).$$

Sia poi $v(P)$ la soluzione del problema di DIRICHLET relativo alla [1] nell'insieme B_v , con la condizione, su FB_v , $v(Q) = \vartheta(Q)$.

Dimostriamo che, per $n \cong v$, supposto P in B_v , risulta

$$[16] \quad v(P) \cong u_n(P).$$

Infatti questa disuguaglianza vale nei punti di FB_v interni alla sfera Σ_v ; vale inoltre nei rimanenti punti di FB_v perchè, in questi, si ha

$$v(Q) = \vartheta(Q) \cong \varphi(Q) \cong u_n(Q).$$

Siccome, per $n \cong v$, P in B_v , si ha $E(v - u_n) = 0$, del Teorema I segue la [16].

Ne segue anche $v(P) \cong u(P)$ e siccome è, per la [15],

$$\lim_{P \rightarrow Q_0} v(P) = h(Q_0)$$

dalle [14] si deduce la [13].

Per la [11], il teorema è così completamente dimostrato.

IV. *Se sono soddisfatte le condizioni del Teorema III con $\varphi(R) > 0$ e se, inoltre, risulta*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi(R) = \infty,$$

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h(Q)}{\varphi(Q)} = 0,$$

la funzione $u(R)$ di cui si è dimostrata l'esistenza nel Teorema III soddisfa alla condizione

$$\lim_{|R| \rightarrow \infty} \frac{u(R)}{\varphi(R)} = 0$$

e quindi è l'unica soluzione del problema di Dirichlet nell'insieme A per l'equazione [1], nel senso indicato dal Teorema II.

DIMOSTRAZIONE. — Supponiamo, come è lecito, $h(Q) \geq 0$, $f(P) \leq 0$. Prefissato ad arbitrio ε , con $0 < \varepsilon < 1$, si determini un indice v in modo che, per $|Q| \geq \lambda_v$, risulti

$$[17] \quad h(Q) < \frac{\varepsilon}{2} \varphi(Q).$$

Definiamo poi in FA due funzioni continue $h'(Q)$, $h''(Q)$, ponendo $h'(Q) = \frac{\varepsilon}{2} \varphi(Q)$ nei punti Q in cui è $h(Q) \geq \frac{\varepsilon}{2} \varphi(Q)$, e $h'(Q) = h(Q)$ nei rimanenti punti di FA . Poniamo inoltre $h''(Q) = h(Q) - h'(Q)$.

Si avrà, per $|Q| \geq \lambda_v$, $h'(Q) = h(Q)$, $h''(Q) = 0$.

Consideriamo le equazioni

$$[18] \quad \begin{cases} E(u') = f \\ E(u'') = 0 \end{cases}$$

e risolviamo per esse il problema di DIRICHLET, come si è fatto nel Teorema III, con le condizioni

$$[19] \quad \begin{cases} u'(Q) = h'(Q), \\ u''(Q) = h''(Q). \end{cases}$$

Ora, introdotte le funzioni $k_n(Q)$, $u_n(P)$, e le corrispondenti $k'_n(Q)$, $k''_n(Q)$, $u'_n(P)$, $u''_n(P)$ si ha $k'_n(Q) + k''_n(Q) = k_n(Q)$ e quindi, per le [18], $u'_n(P) + u''_n(P) = u_n(P)$.

Proseguendo come si è fatto per il Teorema III, si ricava

$$0 \leq u'_n(P) \leq u'_{n+1}(P) \leq \frac{\varepsilon}{2} \varphi(P)$$

e quindi si ottiene una funzione limite $u'(P)$, soddisfacente alle prime delle [18], [19] e tale che riesca in $A + FA$

$$[20] \quad 0 \leq u'(R) \leq \frac{\varepsilon}{2} \varphi(R).$$

Sia poi M il massimo di $h(Q)$ nei punti di FA appartenenti all'ipersfera Σ_v . Si avrà in FB_{n+1} $0 \leq k''_n(Q) \leq M$ e, siccome è $E(M - u''_n) \leq 0$, per il Teorema I si ricava, in ogni punto R di $B_{n+1} + FB_{n+1}$, la disuguaglianza $0 \leq u''_n(R) \leq M$.

D'altra parte si ha $u''_{n+1}(P) \geq u''_n(P)$ e quindi la funzione $u''(P)$, cui converge la successione $\{u''_n\}$, soddisfa alle seconde delle [18], [19] e, in $A + FA$, alla disuguaglianza

$$[21] \quad 0 \leq u''(R) \leq M.$$

Siccome è $u(R) = u'(R) + u''(R)$, si ricava in ogni punto di $A + FA$, per le [20], [21], $0 \leq u(R) \leq M + \frac{\varepsilon}{2} \varphi(R)$.

D'altra parte si ha $\lim_{|R| \rightarrow \infty} \varphi(R) = \infty$, e quindi si può determinare $t > 0$ in modo che per $|R| \geq t$ risulti $\frac{M}{\varphi(R)} < \frac{\varepsilon}{2}$ da cui

$$0 \leq \frac{u(R)}{\varphi(R)} < \varepsilon$$

che dimostra il teorema.

4. Applichiamo le considerazioni precedentemente svolte allo studio dell'equazione

$$\Delta_2 u - \lambda u = 0$$

per $\lambda > 0$, in due e in tre variabili. Ed osserviamo che la medesima funzione $\varphi(R)$, una volta determinata per dei domini di forma particolare, vale per tutti gli insiemi A in essi contenuti e consente perciò l'applicazione in questi dei Teoremi III e IV. Nei domini che considereremo la $\varphi(R)$ si otterrà col notissimo metodo delle soluzioni elementari.

I) Si consideri l'equazione

$$[22] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda u = 0 \quad (\lambda > 0)$$

nei seguenti domini.

a) *Striscia limitata dalle rette* $y = \pm l$. — Posto $\varphi(x, y) = M \cos ky \operatorname{Ch} hx$, con $M > 0$, h e k costanti da determinarsi, e sostituendo nella [22] si ricava

$$\varphi(x, y) = M \cos ky \operatorname{Ch} \sqrt{k^2 + \lambda} x$$

e tale funzione risulta positiva se k soddisfa alla disuguaglianza

$$0 \leq k < \frac{\pi}{2l}.$$

I Teoremi III, IV possono essere applicati se risulta, rispettivamente,

$$|u(x, \pm l)| \leq N e^{|x| \sqrt{k^2 + \lambda}}, \quad (N > 0)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x, \pm l)}{e^{|x| \sqrt{k^2 + \lambda}}} = 0.$$

Si noti poi (e questa osservazione vale anche per i casi che considereremo in seguito) che l'unicità della soluzione viene sicuramente a mancare se si impone la condizione meno restrittiva $|u(x, \pm l)| \leq N e^{|x| \sqrt{k^2 + \lambda}}$, con $k = \frac{\pi}{2l}$, perchè la [22] ammette la soluzione $\cos \frac{\pi y}{2l} \operatorname{Ch} \sqrt{\frac{\pi^2}{4l^2} + \lambda} x$, nulla per $y = \pm l$.

b) *Angolo limitato dalle semirette* $\vartheta = \pm \alpha$ (in coordinate polari ρ, ϑ). — Cerchiamo una soluzione della [22] del tipo $\bar{\varphi}(\rho, \vartheta) = \cos k\vartheta \psi(\rho)$. Sostituendo nella [22] si ricava che si può assumere come $\psi(\rho)$ la funzione di BESSEL $I_k(\rho\sqrt{\lambda})$ ⁽⁶⁾. Ora si ha $I_k(\rho\sqrt{\lambda}) \geq 0$ e, se M è una costante positiva, $E(M) = -\lambda M < 0$. Supposto allora

$$0 \leq k < \frac{\pi}{2\alpha}$$

possiamo porre

$$\varphi(\rho, \vartheta) = M(1 + \cos k\vartheta I_k(\rho\sqrt{\lambda})).$$

Siccome poi è ⁽⁷⁾

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{I_k(\rho\sqrt{\lambda})}{e^{\rho\sqrt{\lambda}}} \frac{\sqrt{\rho\sqrt{\lambda}}}{2\pi} = 1$$

i Teoremi III, IV possono essere applicati se risulta, rispettivamente

$$|u(\rho, \pm \alpha)| \leq N \frac{e^{\rho\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\rho}},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{u(\rho, \pm \alpha) \sqrt{\rho}}{e^{\rho\sqrt{\lambda}}} = 0.$$

c) *Campo esterno alla circonferenza* $\rho = r$. — Procedendo come nel caso precedente e ponendo $k = 0$, si ottengono, per la applicabilità dei Teoremi III, IV, le condizioni

$$|u(\rho, \vartheta)| \leq N \frac{e^{\rho\sqrt{\lambda}}}{\sqrt{\rho}},$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{u(\rho, \vartheta) \sqrt{\rho}}{e^{\rho\sqrt{\lambda}}} = 0$$

uniformemente per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

II) Si consideri l'equazione

$$[23] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda u = 0 \quad (\lambda > 0)$$

nei seguenti domini.

d) *Cilindro circolare* $\rho \leq r$ (in coordinate cilindriche ρ, ϑ, z). — Cerchiamo una soluzione della [23] del tipo $\varphi(\rho, \vartheta, z) = M Ch k z \psi(\rho)$.

⁽⁶⁾ G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1922, pag. 77.

⁽⁷⁾ V. ⁽⁶⁾ pag. 203.,

Sostituendo nelle [23] si ricava ⁽⁸⁾ che possiamo porre $\psi(\rho) = J_0(\rho\sqrt{k^2 - \lambda})$. Se vogliamo che sia $\psi(\rho) > 0$ per $0 \leq \rho \leq r$, indicata con $\mu > 0$ la più piccola radice dell'equazione $J_0(t) = 0$, per $t \geq 0$, ricaviamo per k la limitazione

$$[24] \quad 0 \leq k < \sqrt{\lambda + \left(\frac{\mu}{r}\right)^2}$$

e quindi i Teoremi III, IV sono applicabili se risulta, uniformemente per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$,

$$|u(r, \vartheta, z)| \leq Ne^{k|z|}$$

con k soddisfacente alla [24], oppure, supposto $0 < k < \sqrt{\lambda + \left(\frac{\mu}{r}\right)^2}$,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{u(r, \vartheta, z)}{e^{k|z|}} = 0.$$

e) *Strato limitato dai piani* $z = \pm l$. - Se cerchiamo una soluzione della [23] del tipo $\varphi = M \cos kz \psi(\rho)$, otteniamo $\psi(\rho) = I_0(\rho\sqrt{k^2 + \lambda})$ e la φ sarà positiva se è soddisfatta la limitazione

$$0 \leq k < \frac{\pi}{2l}.$$

Ne seguono le condizioni

$$|u(\rho, \vartheta, \pm l)| \leq N \frac{e^{\varrho\sqrt{k^2 + \lambda}}}{\sqrt{\rho}},$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{u(\rho, \vartheta, \pm l)\sqrt{\rho}}{e^{\varrho\sqrt{k^2 + \lambda}}} = 0$$

uniformemente per $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

f) *Diedro* ($-\infty < z < \infty$, $0 \leq \rho < \infty$, $-\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$). - Posto $\varphi(\rho, \vartheta, z) = M \cos n\vartheta \operatorname{Ch} kz \psi(\rho)$ si ricava $\psi(\rho) = I_n(\rho\sqrt{\lambda - k^2})$ e quindi risulta $\varphi(\rho, \vartheta, z) > 0$ se si prende

$$0 \leq n < \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0 \leq k < \sqrt{\lambda}.$$

Ne seguono le condizioni all'infinito

$$|u(\rho, \pm \alpha, z)| \leq Ne^{k|z|} \frac{e^{\varrho\sqrt{\lambda - k^2}}}{\sqrt{\rho}},$$

⁽⁸⁾ V. ⁽⁶⁾ pag. 38.

oppure, supposto $0 < k < \sqrt{\lambda}$,

$$\lim_{(\varrho, z) \rightarrow \infty} \frac{u(\varrho, \pm \alpha, z) \sqrt{\varrho}}{e^{e\sqrt{\lambda - k^2} + k|z|}} = 0$$

uniformemente rispetto a $\sqrt{z^2 + \varrho^2}$.

g) *Campo esterno alla sfera di equazione $\varrho = r$ (in coordinate polari).* Cercata una soluzione $\varphi(\varrho)$ delle [23] dipendente solo da ϱ si ottiene

$$\varphi(\varrho) = N \frac{e^{e\sqrt{\lambda}}}{\varrho}.$$

Ne seguono, per $\varrho \geq r$, le condizioni

$$|u| \leq N \frac{e^{e\sqrt{\lambda}}}{\varrho},$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varrho u e^{-e\sqrt{\lambda}} = 0.$$

Matematica. — *Il calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito.* Nota II di SANDRO FAEDO, presentata ⁽¹⁾ da LEONIDA TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

3. Se una curva ordinaria $C(y_1(x), \dots, y_n(x), a \leq x < +\infty)$ è tale che siano continue su ogni intervallo finito le derivate $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) fino all'ordine s , si dice che C è di classe s .

Ogni curva di classe $m-1$ $C(y_1(x), \dots, y_n(x), a \leq x < +\infty)$ tale che tutte le derivate parziali

$$f_{y_i^{(j)}}(x, y_1(x), \dots, y_n^{(m)}(x)) \quad (i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, \dots, m)$$

risultino integrabili su ogni intervallo $(a, a+X)$ e che soddisfi al sistema di equazioni

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_{y_i^{(m)}} dx - \int_a^x f_{y_i^{(m-1)}} d\xi_1 + \dots + (-1)^n \int_a^x d\xi_1 \dots \int_a^{\xi_{m-1}} f_{y_i} d\xi_m = P_i^{(m-1)}(x)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

(dove P_i è un polinomio di grado $m-1$) dicesi una estremaloide relativa alla $f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$.

Ogni curva di classe m che soddisfa al sistema di equazioni di EULERO

$$f_{y_i} - \frac{d}{dx} \left[f_{y_i'} - \frac{d}{dx} \left\{ f_{y_i''} - \dots - \frac{d}{dx} \left(f_{y_i^{(m-1)}} - \frac{d}{dx} f_{y_i^{(m)}} \right) \dots \right\} \right] = 0,$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

dicesi una estremale relativa alla $f(x, y_1, \dots, y_n^{(m-1)})$.

Come per l'integrale I sussistono le proposizioni:

« Ogni curva $C(y_1(x), \dots, y_n(x), a \leq x < +\infty)$ che minimizza I_∞ in K_∞ e tale che su quasi tutto ogni intervallo finito $(a, a+X)$ le

(1) Nell'Adunanza del 18 dicembre 1942-XXI.

(2) La classe K_∞ è definitivo nel n. 1 [Nota I].

$y_1^{(n-1)}(x), \dots, y_n^{(m-1)}(x)$ siano a rapporto incrementale limitato è una estremaloide; se è inoltre di classe m essa è una estrema.

Non è più vero per l'integrale I_∞ che una estrema sia sempre una curva ordinaria, come invece accadeva per l'integrale I .

Data la curva ordinaria per I_∞ $C(y_1(x), \dots, y_n(x), a \leq +\infty)$ diremo *variazione prima della sua ordinata* $y_i(x)$ una qualunque funzione δy_i definita per ogni $x \geq a$ e tale che la curva $C_1(y_i = y_j(x), j \neq i; y = y_i + \delta y_i, j = i)$ sia ancora una curva ordinaria.

Se esistono finiti gli integrali

$$\int_a^{+\infty} f_{y_i} \delta y_i dx, \int_a^{+\infty} f_{y_i'} \delta y_i' dx, \dots, \int_a^{+\infty} f_{y_i^{(m)}} \delta y_i^{(m)} dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

diremo *variazione prima dell'integrale I_∞ sulla curva ordinaria C* l'espressione

$$\delta I_\infty = \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(f_{y_i} \delta y_i + \dots + f_{y_i^{(m)}} \delta y_i^{(m)} \right) \right\} dx.$$

Se le variazioni δy_i sono tali che per $x = a$ sia

$$\delta y_i = \delta y_i' = \dots = \delta y_i^{(m-1)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si diranno *variazioni smorzate nel primo estremo* e la relativa variazione di I_∞ si dirà *variazione prima smorzata nel primo estremo* e si indicherà con δI_∞ .

Se le variazioni δy_i si annullano per $x = a$ e per $x \rightarrow +\infty$ insieme alle $\delta y_i^{(r)}$ ($r = 0, 1, \dots, m-1$; $i = 1, 2, \dots, n$) si diranno *variazioni smorzate* e la relativa variazione di I_∞ si indicherà con $\bar{\delta} I_\infty$.

Se qualunque sia la $\bar{\delta} C$ è sempre $\bar{\delta} I_\infty(C) = 0$, si dirà che è identicamente nulla la variazione prima smorzata e si scriverà $\bar{\delta} I_\infty(C) \equiv 0$.

Analogamente all'integrale I sussiste il teorema:

« Se sopra la curva C ordinaria per I_∞ esiste la variazione prima smorzata $\bar{\delta} I_\infty$ ed è

$$\bar{\delta} I_\infty(C) \equiv 0,$$

tale curva è una estremaloide; se la C è di classe m allora essa è un estrema.

Per l'integrale I tale teorema si può invertire; ciò non è invece possibile per l'integrale I_∞ .

Si danno però delle condizioni sotto le quali si può ancora affermare che su una data estremaloide o estrema è nulla identicamente la variazione prima smorzata.

Si stabiliscono infine dei teoremi che permettono di assicurare che le estremanti di I_∞ sono estremaloidi o estremali.

4. Si danno dei teoremi di unicità per le estremali soddisfacenti a determinate condizioni, di cui alcune al finito e altre all'infinito. Enunciamone uno come esempio: « Se per ogni punto del campo A e per ogni valore finito di $y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ la forma quadratica nelle variabili w_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{i,j}^{1 \dots n} w_i w_j f_{y_i^{(m)}, y_j^{(m)}}(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$$

è sempre definita positiva; se la forma quadratica in $v_{i,r}$ ($i = 1, \dots, n$; $r = 0, 1, \dots, m$)

$$\sum_{r,s}^{0 \dots m} \sum_{i,j}^{1 \dots n} v_{i,r} v_{j,s} f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}}(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$$

è sempre semidefinita positiva, allora esiste al più una sola estremale relativa alla $f(x, y, \dots, y_n^{(m)})$ che è una curva ordinaria, verifica le condizioni

$$y_i^{(t)}(a) = C_{i,t} \quad (i = 1, 2, \dots, n; t = 0, 1, \dots, m-1)$$

(dove $C_{i,t}$ sono costanti assegnate) e su cui è nulla la variazione prima di I_∞ smorzata nel primo estremo ».

5. Per evitare l'inconveniente segnalato da S. CINQUINI e che abbiamo già rammentato, noi consideriamo classi di curve K_∞ , entro cui ricercare l'estremo, per le quali si assegnino alcune condizioni al finito e all'infinito l'unico vincolo di rendere convergente l'integrale I_∞ .

Se ad esempio l'estremante è una estremale \bar{C} essa soddisfa al sistema delle equazioni di EULERO di ordine $2mn$; per determinarla, fra tutte le estremali, si hanno mn condizioni al finito. Si dimostra che tali condizioni insieme a quella di rendere convergente I_∞ non sono in generale sufficienti alla determinazione di \bar{C} .

Bisogna quindi ricercare quelle proprietà asintotiche che caratterizzano la \bar{C} fra tutte le estremali che verificano le dette condizioni al finito.

Tale problema non si presentava per l'integrale I .

Quando il sistema delle equazioni di EULERO è lineare, allora l'estremale \bar{C} che rende minimo (o massimo) I_∞ in K_∞ è tale che su essa è identicamente nulla la variazione prima δI_∞ di I_∞ per ogni $\delta \bar{C}$ tale che la curva $\bar{C} + \delta \bar{C}$ sia ancora una curva di K_∞ . Tale condizione è inoltre sufficiente, insieme alle sole condizioni per $x = a$, a determinare la \bar{C} .

Il problema della ricerca dell'estremo di I_∞ in K_∞ corrisponde a quello per l'integrale

$$I = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

nella classe K_1 delle curve $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$, $a \leq x \leq b$ ordinarie per I e per le quali sia $y_i^{(r)}(a) = c_{i,r}$ ($i = 1, \dots, n$; $r = 0, 1, \dots, m-1$). Per determinare l'estremale che rende minimo (o massimo) I in K_1 , si hanno, oltre a quelle per $x = a$, le mn condizioni di trasversalità per $x = b$.

Si danno delle condizioni sotto le quali l'estremante \bar{C} di I_∞ verifica le condizioni di trasversalità all'infinito. Ciò non è però sempre vero: si dà infatti un esempio in cui \bar{C} non verifica le condizioni di trasversalità all'infinito, pur essendo su \bar{C} $\delta I_\infty \equiv 0$.

È questa una essenziale differenza fra gli integrali I e I_∞ . La ragione sta in questo fatto nuovo: in taluni casi può accadere che per rendere convergente I_∞ tutte le curve $C(y_1(x), \dots, y_n(x))$, $a \leq x < +\infty$ di K_∞ di conseguenza verifichino relazioni del tipo di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_i^{(r)}(x) = d_{i,r} \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1).$$

Tale caso si presenta quindi non come l'analogo della ricerca dell'estremo di I in K_1 bensì nella classe K_2 delle curve per cui è

$$y_i^{(r)}(a) = c_{i,r}, \quad y_i^{(r)}(b) = d_{i,r} \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1).$$

Si comprende perciò come venga a svanire all'infinito la condizione di trasversalità.

Passiamo ora al caso in cui il sistema delle equazioni di EULERO non sia lineare.

Allora non è più vero in generale che su una estremante \bar{C} (che sia una estremale) sia $\delta I_\infty \equiv 0$ per tutte le variazioni $\delta \bar{C}$ tali che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ sia una curva di K_∞ .

Il fatto di rendere convergente I_∞ porta ora per le curve di K_∞ vincoli molto più complessi. Può ad esempio accadere che le curve di K_∞ si distribuiscano in un numero finito (> 1) o in una infinità numerabile di sotto-classi per ognuna delle quali valgono relazioni del tipo di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_i^{(r)}(x) = d_{i,r} \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 1, \dots, m-1).$$

Occorre quindi premettere, caso per caso, uno studio per accertare il tipo di vincolo che vengono ad avere all'infinito le curve di K_∞ . Si mostra

come si possa condurre tale studio e come con esso si possa arrivare a individuare in modo concreto il comportamento asintotico delle estremanti.

Si vede così *una sostanziale differenza fra gli integrali I ed I_∞* ; mentre nell'integrale I la linearità o meno delle equazioni di EULERO non influiva sull'aspetto qualitativo delle proprietà delle estremanti per $x = b$, per l'integrale I_∞ il caso lineare si distingue nettamente dagli altri. Ciò dipende dalla diversità del comportamento asintotico degli integrali del sistema di equazione di EULERO a seconda che esse siano o no lineari.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere.* Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Nel decorso anno 1942 ho iniziato nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario) una serie regolare di osservazioni meridiane dell'ascensione retta dei due pianeti interni Mercurio e Venere, eseguite nei giorni prossimi alle loro rispettive elongazioni, mediante lo strumento invertibile Bamberg (apertura mm. 89, focale m. 0.95). Detto strumento è situato in ottima posizione nel giardino della Specola, su un pilastro razionalmente fondato negli strati profondi del suolo. Inoltre l'uniforme ombreggiatura del terreno lo rende molto adatto a questo genere di osservazioni, che naturalmente debbono essere fatte in piena luce del giorno, e che quindi sono suscettibili di venire infirmate da piccole variazioni dell'azimut strumentale, dovute a ragioni termiche. In ogni modo, per maggior sicurezza, ho avuto cura di sceglier le stelle di riferimento, per quanto possibile, sempre nelle vicinanze del pianeta, e in modo che avessero in media la medesima declinazione di questo, onde una variazione azimutale, anche se vi fosse stata, avrebbe prodotto solo un'influenza trascurabile. Ho sempre invertito lo strumento, sia durante l'osservazione dei pianeti che durante quella delle stelle, e ne ho determinato ogni volta l'inclinazione dell'asse orizzontale mediante la grande livella sospesa a detto asse di rotazione, e di cui il valore di una divisione è di 0^s,085. Ho adoperato un cronografo a punte di Cavignato collegato con un eccellente pendolo siderale di DENT ad asta *invar* di RIEFLER; nelle riduzioni, eseguite colla formula di MAYER, ho tenuto conto anche dell'andamento dell'orologio durante le osservazioni stesse.

In complesso le presenti osservazioni sono da ritenersi di considerevole precisione, tenuto specialmente conto delle notevoli e ben conosciute difficoltà che esse presentano. In particolar modo difficili sono state le osservazioni di Mercurio durante l'elongazione estiva del giugno-luglio,

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

a causa della breve distanza del pianeta dal Sole, e anche della grande luminosità del cielo.

2. La tabella I contiene l'elenco delle stelle di riferimento, con le rispettive posizioni medie, desunte dal *Berliner Jahrbuch 1942*.

Nella tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari e i Δt conclusi in ogni giornata, e cioè i valori della correzione dell'orologio corrispondente all'istante del passaggio in meridiano del pianeta: t_{oss} è il tempo di osservazione desunto dallo spoglio delle strisce cronografiche, già corretto per l'andamento dell'orologio, i e a i coefficienti d'inclinazione e di azimut, z la distanza zenitale.

TABELLA I.
Stelle di riferimento.

N.	*	Mag.	$\alpha_{1942,0}$	$\delta_{1942,0}$
1	α Ursae minoris	2m.12	1h 43m 46s.21	+ 88° 59' 20".3
2	α Arietis	2 .23	2 03 53 .86	+ 23 11 20 .2
3	α Persei	1 .90	3 20 10 .18	+ 49 39 23 .4
4	α Tauri	1 .06	4 32 35 .36	+ 16 23 39 .5
5	α Aurigae	0 .21	5 12 24 .01	+ 45 56 28 .6
6	β Tauri	1 .78	5 22 37 .37	+ 28 33 37 .2
7	α Geminorum	1 .58	7 30 54 .03	+ 32 01 02 .3
8	α Canis minoris	0 .48	7 36 15 .99	+ 5 22 30 .4
9	β Geminorum	1 .21	7 41 46 .15	+ 28 10 04 .5
10	α Ursae maioris	1 .95	11 00 09 .91	+ 62 03 52 .3
11	δ Leonis	2 .58	11 11 01 .56	+ 20 50 30 .4
12	σ Leonis	4 .13	11 18 08 .74	+ 6 20 51 .0

3. La tabella III contiene i risultati delle osservazioni dei pianeti, e i confronti fatti coll' Effemeride del *Berliner Jahrbuch*, interpolando con la formula di BESSEL e tenendo conto delle differenze seconde. L'ascensione retta osservata è stata ridotta all'ascensione del centro del pianeta col valore del semidiametro, ricavato dall'*Almanaque Nautico* di San Fernando. Notiamo che di Mercurio, nell'elongazione del marzo, è stato osservato il 1° bordo, in quella di luglio il 2°; di Venere sempre il 2° bordo.

TABELLA II.
Osservazioni stellari.

Data 1942	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	Medie Δt
Maggio 12	4	WE	32m 34s.84	32m 03s.25	+ 0s.14	- 0s.34	+ 31s.79	+ 31s.79
	5	WE	12 23 .38	11 51 .46	+ 0 .08	+ 0 .08	+ 31 .76	
	9	EW	41 46 .09	41 14 .37	+ 0 .12	- 0 .20	+ 31 .80	
15	5	EW	12 23 .37	11 49 .46	- 0 .03	+ 0 .08	+ 33 .86	+ 33 .86
	9	WE	41 46 .05	41 12 .47	0 .00	- 0 .21	+ 33 .79	
17	7	WE	30 53 .88	30 18 .56	+ 0 .06	- 0 .11	+ 35 .37	+ 35 .38
	8	EW	36 15 .93	35 40 .79	+ 0 .10	- 0 .33	+ 35 .37	
	9	WE	41 46 .03	41 10 .76	+ 0 .01	- 0 .15	+ 35 .31	
	10	WE	60 10 .49	59 34 .54	+ 0 .18	+ 0 .40	+ 35 .37	
	11	EW	11 02 .55	10 27 .30	+ 0 .09	- 0 .21	+ 35 .37	
19	4*	EW	32 34 .86	31 57 .38	+ 0 .01	+ 0 .53	+ 36 .94*	+ 37 .09
	7	EW	30 53 .84	30 16 .64	- 0 .08	+ 0 .23	+ 37 .05	
	9	WE	41 46 .00	41 08 .70	- 0 .09	+ 0 .31	+ 37 .08	
	10	EW	60 10 .42	59 34 .34	- 0 .08	- 0 .85	+ 37 .01	
	11	WE	11 02 .52	10 24 .85	+ 0 .03	+ 0 .44	+ 37 .02	
22	5	WE	12 23 .37	11 44 .00	- 0 .09	- 0 .04	+ 39 .50	+ 39 .51
	7	WE	30 53 .82	30 14 .20	+ 0 .01	+ 0 .07	+ 39 .54	
	9	EW	41 45 .97	41 06 .32	+ 0 .03	+ 0 .09	+ 39 .53	
	10	WE	60 10 .32	59 31 .02	+ 0 .02	- 0 .25	+ 39 .53	
	11	EW	11 02 .49	10 22 .75	+ 0 .07	+ 0 .13	+ 39 .54	
24	5	EW	12 23 .38	11 42 .21	- 0 .07	- 0 .03	+ 41 .27	+ 41 .28
	10	WE	60 10 .25	59 29 .21	+ 0 .06	- 0 .22	+ 41 .20	
	11	EW	11 02 .46	10 21 .08	+ 0 .07	+ 0 .11	+ 41 .20	
	12	WE	18 09 .79	17 28 .36	+ 0 .07	+ 0 .17	+ 41 .19	

Segue: TABELLA II.

Data 1942	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	Medie Δt
Giugno 9	2	WE	03 ^m 54 ^s .10	02 ^m 57 ^s .49	0 ^s .00 + 0 ^s .01	+ 56 ^s .60	+ 56 ^s .60	
10	1	EW	43 42 .54	42 53 .47	+ 0 .39 + 1 .07	+ 57 .61	+ 57 .60	
	2	WE	03 54 .13	02 56 .57	- 0 .01 - 0 .01	+ 57 .58		
16	1	WE	43 49 .45	43 00 .77	+ 0 .23 - 13 .22	—	+ 63 .90	
	2	EW	03 54 .30	02 50 .32	- 0 .02 + 0 .11	+ 63 .89		
	3	WE	20 10 .30	19 06 .54	- 0 .09 - 0 .07	+ 63 .92		
Luglio 1 ^o	4	WE	32 35 .47	31 15 .94	+ 0 .10 + 0 .20	+ 79 .23	+ 79 .23	
2	1	WE	44 07 .98	42 50 .95	+ 3 .92 - 7 .42	+ 80 .53	+ 80 .50	
	2	EW	03 54 .79	02 34 .18	+ 0 .05 + 0 .06	+ 80 .50		
	3	WE	20 10 .85	18 50 .34	+ 0 .02 - 0 .03	+ 80 .52		
	4	EW	32 35 .49	31 14 .93	+ 0 .01 + 0 .08	+ 80 .47		
3	3	WE	20 10 .54	18 49 .30	- 0 .07 - 0 .03	+ 81 .34	+ 81 .34	
4	3	EW	20 10 .93	18 48 .35	- 0 .10 - 0 .03	+ 82 .71	+ 82 .71	
	4	EW	32 35 .54	31 12 .78	0 .00 + 0 .05	+ 82 .71		
9	1	WE	44 16 .53	42 54 .98	- 0 .39 - 6 .48	+ 88 .42	+ 88 .45	
	2	EW	03 55 .01	02 26 .52	- 0 .01 + 0 .05	+ 88 .45		
	3	WE	20 11 .12	18 42 .76	- 0 .10 - 0 .03	+ 88 .49		
	4	WE	32 35 .65	31 07 .13	+ 0 .01 + 0 .07	+ 88 .44		
10	1	WE	44 17 .85	42 50 .20	- 0 .65 - 1 .32	+ 89 .62	+ 89 .64	
	2	EW	03 55 .04	02 25 .38	+ 0 .01 + 0 .01	+ 89 .64		
	4	EW	32 35 .68	31 06 .02	+ 0 .01 + 0 .01	+ 89 .64		
11	1	WE	44 19 .65	42 50 .65	+ 1 .17 - 2 .97	+ 90 .80	+ 90 .83	
	2	WE	03 55 .07	02 24 .20	+ 0 .01 + 0 .02	+ 90 .84		
	3	WE	20 11 .20	18 40 .47	- 0 .11 - 0 .01	+ 90 .85		
	4	WE	32 35 .71	31 04 .87	- 0 .01 + 0 .03	+ 90 .82		

Maggio 19, la c *Tauri* non entra nella media (troppo vicina al Sole, immagine debolissima; perduto qualche filo nell'inversione del canocchiale). - Maggio 24, osservazioni ostacolate dalle nuvole, che hanno impedito l'osservazione completa in tutti e due i passaggi delle stelle n. 7 e 9 particolarmente importanti. Il pianeta Mercurio rimasto così collegato soltanto alla 5, passata prima, e alle stelle osservate un po' più tardi per il controllo dell'azimut. - Giugno 9, osservazioni molto difficili per il cielo luminosissimo. - Luglio 1^o, il controllo dell'azimut stato fatto solo più tardi, a causa del cielo nuvoloso.

TABELLA III.
Ascensione retta di Mercurio e Venere.

Data 1942 T. U.	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos z$ sec δ	$a \sin z$ sec δ	Δt	$\alpha_{\text{oss.}}$	semid.	α_{centro}	$\alpha_{\text{calc.}}$	$O - C$
MERCURIO									
Maggio 12,521804	4h 39m 15s.82	+ 0s.16	- 0s.25	+ 31s.78	4h 39m 47s.51	0s.25	47s.76	47s.86	- 0s.10
15,525389	4 56 13.87	+ 0.03	- 0.25	+ 33.82	4 56 47.47	0.26	47.73	47.80	- 0.07
17,526825	5 06 10.07	- 0.04	- 0.17	+ 35.38	5 06 45.24	0.28	45.52	45.59	- 0.07
19,527452	5 14 55.47	- 0.09	+ 0.36	+ 37.04	5 15 32.78	0.29	33.07	33.15	- 0.08
22,526784	5 25 45.01	- 0.06	+ 0.11	+ 39.53	5 26 24.56	0.32	24.91	25.08	- 0.17
24,525217	5 31 20.53	- 0.01	+ 0.10	+ 41.21	5 32 01.83	0.34	02.17	02.23	- 0.06
Luglio 4,405591	5 19 34.13	- 0.02	+ 0.05	+ 82.71	5 20 56.87	0.28	56.59	56.53	+ 0.06
9,406020	5 39 46.66	- 0.01	+ 0.06	+ 88.45	5 41 15.16	0.24	14.92	14.82	+ 0.10
10,406771	5 44 48.86	- 0.07	+ 0.01	+ 89.64	5 46 18.44	0.23	18.21	18.05	+ 0.16
11,407768	5 50 10.46	- 0.02	+ 0.02	+ 90.83	5 51 41.29	0.23	41.06	40.87	+ 0.19
VENERE									
Giugno 9,353376	2 26 03.04	0.00	- 0.01	+ 56.60	2 26 59.63	0.51	59.12	58.99	+ 0.13
10,353750	2 30 30.11	+ 0.06	- 0.01	+ 57.60	2 31 27.76	0.50	27.26	27.20	+ 0.06
16,356188	2 57 34.88	- 0.01	- 0.15	+ 63.90	2 58 38.94	0.48	38.46	38.42	+ 0.04
Luglio 1,364336	4 08 13.85	+ 0.05	+ 0.19	+ 79.23	4 09 33.32	0.45	32.87	32.81	+ 0.06
2,364872	4 13 05.65	- 0.06	+ 0.07	+ 80.50	4 14 26.16	0.44	25.72	25.64	+ 0.08
3,365647	4 17 58.74	+ 0.02	+ 0.06	+ 81.34	4 19 20.16	0.44	19.72	19.67	+ 0.05
4,366326	4 22 52.61	- 0.01	+ 0.05	+ 82.71	4 24 15.38	0.44	14.94	14.78	+ 0.16
9,369889	4 47 38.37	- 0.01	+ 0.06	+ 88.45	4 49 06.87	0.43	06.44	06.39	+ 0.05
10,370641	4 52 38.69	- 0.05	+ 0.01	+ 89.64	4 54 08.29	0.43	07.86	07.76	+ 0.10
11,371399	4 57 39.89	- 0.08	+ 0.02	+ 90.83	4 59 10.66	0.42	10.24	10.07	+ 0.17

(1) Cielo con nubi vaganti e veli sparsi; immagine oltremodo debole; osservazione assai difficile.

(2) Immagine debolissima; perduto ritorno; tenuto conto della collimazione.

(3) Osservazioni ostacolate da nubi; una sola stella nella zona.

(4) Tra le nuvole; osservazione incerta.

Fisica. — *Unità naturale di radiazione.* Nota di LETTERIO LABOCCETTA, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico GIAN ARTURO CROCCO.

Alla teoria dei quanti si può assegnare una precisa data di nascita: quella (14 dicembre 1900) della comunicazione di PLANCK alla « Deutsche Physikalische Gesellschaft » sulla distribuzione dell'energia nella radiazione del corpo nero. È da allora che è penetrata nella fisica l'idea nuova che, corrispondentemente ad ogni frequenza, l'energia della radiazione viene emessa in modo discontinuo, *per quanti*,

$$[1] \quad \varepsilon = h\nu$$

proporzionali ad un fattore costante h al quale bisogna attribuire le dimensioni di un'azione (prodotto di una energia per un tempo) o, ciò che dimensionalmente è lo stesso, di un momento di quantità di moto (prodotto di una massa per una velocità per una lunghezza):

$$[2] \quad [h] = [M] [L^2 T^{-2}] [T] = [M] [LT^{-1}] [L] = [ML^2 T^{-1}].$$

Occorre però osservare che mentre universalmente per esprimere l'energia si scrive $\varepsilon = h\nu$ come sopra ricordato, facendo intervenire la frequenza a fattore del quanto, quando poi effettivamente si deve addivenire alle misure, siccome direttamente le frequenze della radiazione non sono misurabili, quel che si misura è invece la lunghezza di onda λ ⁽²⁾ giovandosi per la determinazione della corrispondente frequenza della relazione fondamentale

$$[3] \quad \lambda\nu = c$$

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

⁽²⁾ In pratica anzi invece della lunghezza d'onda λ si usa ordinariamente il numero di onde (per cm.) $\tilde{\nu} = \nu/c = 1/\lambda$; ma spesso la distinzione non è fatta e si scrive semplicemente ν anche per il numero d'onde (ν , ad esempio, Nota I a pagine 38-39 di E. PERSICO: *Fondamenti di meccanica atomica*. N. Zanichelli, Bologna.

che fornisce

$$[4] \quad v = c/\lambda,$$

cosicchè nelle misure l'espressione sulla quale effettivamente si opera è

$$[5] \quad \varepsilon = hc/\lambda.$$

Ora il prodotto hc che così si presenta nella [5] oltre ad essere implicitamente contenuto nel prodotto $h\nu$, apparisce anche esplicitamente in molte espressioni di relazioni e costanti fondamentali, e così ad esempio:

a) nella espressione originale della legge di PLANCK, che dà la distribuzione dell'energia in corrispondenza della lunghezza d'onda

$$[6] \quad E_\lambda = (hc) c \{ \lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1) \}^{-1};$$

b) nella relazione di BOHR

$$[7] \quad \varepsilon_{np} = E_n - E_p = h\nu_{np} = \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

la quale per la massa μ_{np} del fotone corrispondente al passaggio dell'elettrone dall'orbita p^{ma} e quella n^{ma} fornisce:

$$[8] \quad \mu_{np} = \frac{h\nu_{np}}{c^2} = \frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{(hc)^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right);$$

c) nella espressione della legge dello spostamento di WIEN

$$[9] \quad T\lambda_{\max} = (hc) / 4,965 k;$$

d) in entrambe le espressioni della costante della legge di STEFAN-BOLTZMANN relative alla totalità dell'energia radiata da 1 cm^2 in tutte le direzioni di una semisfera, ed alla densità dell'energia in un fascetto normale alla superficie radiante

$$[10] \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h (ch)^2}, \quad \delta = \frac{2\pi^5 k^4}{15 (ch)^3};$$

e) e nella espressione della costante di SOMMERFELD, della struttura fina,

$$[11] \quad \alpha = 2\pi e^2 / (hc).$$

1936). La trascuranza della chiara e costante distinzione fra \tilde{v} e ν era stata già deplorata da A. SOMMERFELD (v. a pag. 76 di *Atombau und Spektrallinien*, 1, Bd. 5, Aufl. 1931).

Inoltre il prodotto hc si presenta pure continuamente da solo in molte questioni concernenti l'energia radiante, cosicchè si è forzati a pensare che esso debba riferirsi a qualche grandezza di fondamentale importanza per l'intelligenza di detti fenomeni.

A meglio comprendere quale possa essere la natura di una tale grandezza e quale posto ad essa spetti accanto alle grandezze fondamentali gravitazionali ed elettriche nell'ordinamento organico delle costanti universali gioverà il confronto con gli analoghi prodotti ai quali danno luogo il quanto gravitazionale ⁽¹⁾ e quello elettrico ⁽²⁾ e che già si sono presentati nel sistema naturale di unità atomiche gravitazionali ed elettriche.

Il sistema naturale di unità ⁽³⁾ al quale mi riferisco è formato assumendo come grandezze fondamentali: per le unità della gravitazione la velocità della luce, la massa m_1 e la quantità di materia q_1 del neutrone; per le unità elettriche la velocità della luce la massa m_2 e la carica e dell'elettrone; corrispondentemente per le unità della radiazione la velocità della luce, la massa m_3 del primo fotone ⁽⁴⁾ e il quanto h di PLANCK.

Mediante le dette tre terne di unità fondamentali è possibile in ognuna delle tre serie di grandezze definire una lunghezza che ha anch'essa carattere di costante universale:

$$[12] \quad \lambda_1 = q_1^2 / m_1 c^2, \quad \lambda_2 = e^2 / m_2 c^2, \quad \lambda_3 = h / 2 \pi m_3 c.$$

Tenendo presente la relazione che, a mezzo della costante gravitazionale χ_1^2 lega la quantità di materia del neutrone alla sua massa ⁽⁵⁾

$$[13] \quad (q_1 / m_1)^2 = \chi_1^2,$$

⁽¹⁾ L. LABOCCETTA, *Il quanto gravitazionale e significato fisico della costante di Keplero*. « Ric. Scient. », VI-1, n. 6, 31 marzo 1935.

⁽²⁾ L. LABOCCETTA, *Il quanto elettromagnetico e la quantificazione delle orbite*. « Ric. Scient. », VII-1, n. 5-6, marzo 1936.

⁽³⁾ Ideato originariamente nella ricerca di *Una definizione assoluta della densità*. S. I. P. S. « Atti della XXII Riunione », Bari 1933, vol. II, pagg. 9-17, fu poi esposto, con metodo dimensionale, in due mie Note successive:

a) *Le costanti numeriche caratteristiche dello spazio fisico*. « Act. Pont. Acad. Scient. Nov. Lync. », Anno LXXXVIII. Sessio V, maggio 1935.

b) *Unità di misura per i fenomeni della radiazione*. « Ric. Scient. », X, n. 12, dicembre 1939.

⁽⁴⁾ L. LABOCCETTA, *La massa del primo fotone*. « Ric. Scient. », VII-2, n. 3-4, agosto 1936.

⁽⁵⁾ Per questa relazione e le prime due [12] v. la mia precedente Nota *Riduzione a forma simmetrica delle espressioni per grandezze caratteristiche dei campi gravitazionali ed elettrici*. « Pontif. Ac. Scientiarum, Acta », vol. VI, n. 13, pagg. 103-110, 20 gennaio 1942.

cosicchè risulta

$$[14] \quad \lambda_1 = \chi_1^2 m_1 / c^2,$$

si scorge subito che λ_1 non è altro che il *raggio gravitazionale* ⁽¹⁾ corrispondente alla quantità di materia del neutrone; λ_2 è il *raggio classico* dell'elettrone e λ_3 è la lunghezza *dell'onda di de Broglie* associata alla massa del primo fotone, il quale si muove appunto con la velocità c , della luce.

Ora è da osservare che il raggio gravitazionale del neutrone e il raggio classico dell'elettrone coincidono con i raggi delle *sfere normali* ⁽²⁾ formate con la quantità di materia del neutrone e con la carica dell'elettrone, e nel cercare i momenti delle quantità di moto elementari corrispondenti a queste due sfere si trova:

$$[15] \quad \hbar_1 = m_1 c \lambda_1 = m_1 c (q_1^2 / m_1 c^2) = q_1^2 / c$$

$$[16] \quad \hbar_2 = m_2 c \lambda_2 = m_2 c (e^2 / m_2 c^2) = e^2 / c.$$

Sono queste le due semplici relazioni che legano le quantità (elementari) di materia e di elettricità ai rispettivi quanti gravitazionale ed elettrico

$$[17] \quad q_1^2 = \hbar_1 c, \quad e^2 = \hbar_2 c.$$

Esse indicano in pari tempo che nel caso dei fenomeni gravitazionali ed elettrici il *prodotto hc del quanto di azione per la velocità della luce è dimensionalmente identico al quadrato della corrispondente quantità elementare di agente* della quale unità dà il valore numerico.

D'altra parte una più attenta considerazione della costante di SOMMERFELD mostra che raggruppando opportunamente gli elementi che la definiscono essa si può scrivere mettendola sotto due forme diverse:

$$[17] \quad \alpha = \frac{e^2 / c}{\hbar / 2 \pi} = \frac{e^2}{\hbar c / 2 \pi}.$$

⁽¹⁾ Il nome di raggio gravitazionale per indicare la lunghezza $r = km/c^2$ corrispondente alla massa m è stato proposto da EDDINGTON; v. nota a pag. 87: *The mathematical theory of Relativity*, 2nd Ed. University Press, Cambridge, 1924.

⁽²⁾ La sfera normale è stata la prima volta definita e le sue principali proprietà sono state indicate in una mia Nota: *Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero*. « Rendiconti Acc. Naz. Lincei », vol. XX, Serie 6^a, pagg. 327-333, novembre 1934.

Queste due forme, dovendo entrambe dare come risultato un numero puro, mostrano la prima che il quanto h di PLANCK è dimensionalmente omogeneo con e^2/c che è appunto il quanto elettrico, e la seconda che hc è dimensionalmente omogeneo con e^2 e quindi anche con q_1^2 cioè col quadrato di una quantità di agente. Si è perciò condotti a porre anche corrispondentemente

$$[18] \quad hc/2\pi = \hbar c = q_3^2$$

chiamando q_3 la *quantità di radiazione* del primo fotone.

Alla stessa conclusione si sarebbe pure condotti osservando che, come mostrano le [12] il quadrato di una quantità di agente, è dato dal prodotto di una energia per una distanza. Si potrà quindi nei tre casi, delle grandezze gravitazionali, elettriche e radiazionali, se mi si consente questa espressione, giungere a costruire in modo uniforme il quadrato della quantità elementare di agente, neutrone, elettrone, primo fotone, partendo dalle quantità elementari di energia corrispondente e si ottiene così:

$$[19] \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \lambda_1 = m_1 c^2 \lambda_1 = m_1 c \lambda_1 \cdot c = h_1 c = q_1^2 \\ \varepsilon_2 \lambda_2 = m_2 c^2 \lambda_2 = m_2 c \lambda_2 \cdot c = h_2 c = e^2 \\ \varepsilon_3 \lambda_3 = m_3 c^2 \lambda_3 = m_3 c \lambda_3 \cdot c = h_3 c = q_3^2 \end{cases}$$

giungendo ad una uniforme definizione delle tre quantità elementari di agente.

Incidentalmente si può osservare che siamo così giunti ad una terza definizione dimensionale del quanto da aggiungere alle altre due già date e si ha quella che potrebbe dirsi una tripla *isomeria dimensionale*:

$$[20] \quad [ML^2 T^{-1}] = \{ [M] [L^2 T^{-2}] [T] = [M] [LT^{-1}] [L] = \\ = [ML^3 T^{-2}] [L^{-1} T] \}.$$

L'esistenza di una quantità elementare di radiazione q_3 che così in vari modi si è condotti a introdurre permette di formare per le grandezze della radiazione, invece di quella c, h, m_3 innanzi ricordata, una terna di unità fondamentali costituita anch'essa da una velocità c una quantità di agente q_3 e una massa m_3 analoga alle due terne di unità assunte come fondamentali per le grandezze gravitazionali ed elettriche.

Si dispone quindi di sette costanti universali da considerare come fondamentali:

$$c = 2,9977 \times 10^{10}$$

$$m_1 = 1,676 \times 10^{-24} \quad , \quad m_2 = 9,116 \times 10^{-28} \quad , \quad m_3 = 4,935 \times 10^{-32} \\ q_1 = 4,327 \times 10^{-28} \quad , \quad e = 4,803 \times 10^{-10} \quad , \quad q_3 = 1,581 \times 10^{-8}$$

con le quali si può formare un sistema completo di unità naturali comprendente in tre serie perfettamente simmetriche le unità gravitazionali, elettriche e della radiazione. Il detto sistema costituisce in pari tempo un ordinamento organico delle costanti universali, nella forma data dal quadro che segue.

1.	$[C]$	c	c	c
2.	$[Q]$	q_1	e	q_3
3.	$[M]$	m_1	m_2	m_3
4.	$[MC]$	$p_1 = m_1 c$	$p_2 = m_2 c$	$p_3 = m_3 c$
5.	$[MC^2]$	$\epsilon_1 = m_1 c^2$	$\epsilon_2 = m_2 c^2$	$\epsilon_3 = m_3 c^2$
6.	$[Q^2 M^{-2}]$	$\chi_1^2 = \left(\frac{q_1}{m_1}\right)^2$	$\chi_2^2 = \left(\frac{e}{m_2}\right)^2$	$\chi_3^2 = \left(\frac{q_3}{m_3}\right)^2$
7.	$[Q^2 C^{-1}]$	$h_1 = \frac{q_1^2}{c}$	$h_2 = \frac{e^2}{c}$	$h_3 = \frac{q_3^2}{c}$
8.	$[Q^2 M^{-1} C^{-2}]$	$\lambda_1 = \frac{q_1^2}{m_1 c^2}$	$\lambda_2 = \frac{e^2}{m_2 c^2}$	$\lambda_3 = \frac{q_3^2}{m_3 c^2}$
9.	$[Q^2 M^{-1} C^{-3}]$	$\tau_1 = \frac{q_1^2}{m_1 c^3}$	$\tau_2 = \frac{e^2}{m_2 c^3}$	$\tau_3 = \frac{q_3^2}{m_3 c^3}$
10.	$[M^2 C^4 Q^{-2}]$	$\varphi_1 = \frac{m_1^2 c^4}{q_1^2}$	$\varphi_2 = \frac{m_2^2 c^4}{e^2}$	$\varphi_3 = \frac{m_3^2 c^4}{q_3^2}$
11.	$[MC^3 Q^{-1}]$	$i_1 = \frac{m_1 c^3}{q_1}$	$i_2 = \frac{m_2 c^3}{e}$	$i_3 = \frac{m_3 c^3}{q_3}$

In questo quadro sono disposte in linee orizzontali e indicate con una stessa lettera provvista dell'indice 1, 2, 3, le unità dimensionalmente omogenee delle tre serie di grandezze gravitazionali, elettriche e della radiazione aventi le dimensioni indicate nella prima colonna a mezzo delle tre unità fondamentali C , velocità, Q quantità di agente cioè di materia, elettricità o radiazione, e M massa corrispondente. Si è conservata, per la carica dell'elettrone la lettera e .

Le unità di una stessa riga orizzontale si ottengono con una identica operazione da eseguire sulle costanti fondamentali, operazione che è quella indicata dalla formola di dimensioni nella prima colonna verticale a sinistra. Basta in detta formola inserire al posto delle diverse lettere indicanti le dimensioni le costanti universali corrispondenti e si hanno le unità della riga considerata espresse tutte uniformemente me-

dianche costanti universali, e non occorrono in nessun caso coefficienti numerici.

Sono in particolare da notare, alle righe 6, 10, 11, le espressioni delle tre costanti gravitazionale, dielettrica del vuoto e della radiazione, l'espressione delle tre forze elementari $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e delle tre unità di intensità di corrente i_1, i_2, i_3 .

Molte conseguenze potrebbero trarsi dalle molteplici relazioni che ovviamente risultano da questo quadro; mi limiterò qui ad accennarne una sola.

Discende dalla considerazione delle uniformi espressioni dei tre quanti e delle tre lunghezze, righe 7 e 8, una doppia uniforme espressione per la velocità della luce

$$[21] \quad c^2 = q_1^2 / m_1 \lambda_1 \quad , \quad c^2 = e^2 / m_2 \lambda_2 \quad , \quad c^2 = q_3^2 / m_3 \lambda_3$$

$$[22] \quad c = q_1^2 / h_1 \quad , \quad c = e^2 / h_2 \quad , \quad c = q_3^2 / h_3 .$$

In realtà però essendo

$$[23] \quad h_1 = m_1 c \lambda_1 \quad , \quad h_2 = m_2 c \lambda_2 \quad , \quad h_3 = m_3 c \lambda_3$$

la seconda serie di espressioni è equivalente alla prima alla quale si riduce sostituendo ad h il suo valore.

Comunque si ha così la velocità della luce espressa in modo identico mediante le costanti fondamentali gravitazionali, elettriche, e della radiazione.

Se si confrontano queste espressioni con quella data da MAXWELL fra l'indice di rifrazione n di una sostanza, la costante dielettrica ε di essa e la sua permeabilità magnetica μ si osserverà che in esse, valevoli identicamente per le tre serie di fenomeni, la velocità della luce è data mediante grandezze corpuscolari (quantità elementari di agente e di azione) mentre la relazione di MAXWELL è stata derivata da rapporti fra grandezze continue, e vale esclusivamente per i fenomeni elettromagnetici.

Aggiungerò in conclusione che le espressioni delle grandezze contenute nel quadro sistematico sopra riportato permettono di scrivere la relazione fondamentale di PLANCK [1], [5], e la legge di distribuzione della radiazione del corpo nero [6] da cui essa è derivata, nonchè la relazione di BOHR [8], la legge di WIEN [9] e le espressioni della costante di STEFAN-BOLTZMANN [10] e della costante di SOMMERFELD [11] senza fare intervenire il quanto della radiazione.

Si ha infatti:

$$[25] \quad \varepsilon = q_3^2 / \lambda$$

$$[26] \quad E_\lambda = c q_3^2 \{ \lambda^5 (e^{q_3^2 / \kappa T \lambda} - 1) \}^{-1}$$

$$[27] \quad \mu_{np} = \frac{1}{2} m_2 m_3 Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

$$[28] \quad T\lambda_{\max} = q_3^2 / 4,965 k$$

$$[29] \quad \sigma = \frac{2 \pi^5 c k^4}{15 q_3^6}, \quad \delta = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 q_3^6}$$

$$[30] \quad \alpha = e^2 / q_3^2.$$

Queste potrebbero essere chiamate le forme corpuscolari delle corrispondenti espressioni usuali, perchè in esse invece del quanto di PLANCK appaiono la quantità elementare, e cioè l'*unità naturale* di radiazione q_3 e la massa $m_3 = \left(\frac{2 \pi e^2}{hc} \right)^2$ del primo fotone.

Paleontologia. — *Osservazioni su alcuni Pseudodiadema* (¹). Nota (²) di GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella ricca collezione degli Echinidi cretacei della Migiurtina raccolti dalla Missione geologica dell'Azienda Generale Italiana Petroli (1936-39), se ne trovano alcuni del Cenomaniano, i quali, per l'interesse che presentano, meritano una particolare menzione. Questi esemplari appartengono ad una medesima specie e per quanto non perfettamente conservati si completano a vicenda, cosicchè è stato possibile riconoscere tutti i caratteri specifici. L'esemplare più completo misura un diametro di mm. 32 ed un'altezza di mm. 13; un altro, nello stato di frammento, raggiunge un diametro di circa mm. 40. Tutti sono contraddistinti dai seguenti caratteri: Forma subrotulare, a faccia superiore un po' più gonfia della inferiore. Placche ambulacrali polipore per tutta l'estensione dell'ambulacro, ad eccezione delle ultime tre presso il peristoma, che sono oligopore; una maggiore abactinale risulta di sette elementi. Zone porifere largamente bigeminate sin quasi all'ambito, nel resto unigeminate ed ondulate; nelle tre ultime placche le zone sono pseudotrigeminate. Il passaggio tra la parte bigeminata e quella unigeminata è graduale e tra le maggiori oligopore presso il peristoma e quelle a pori sdoppiati della faccia superiore vi sono delle maggiori a sei elementi prima, poi a cinque ed a quattro.

I tubercoli sono crenulati e perforati. Quelli delle serie secondarie interradiali (due esterne e due interne) sono molto più piccoli di quelli delle due serie principali, cioè contrastanti. Le quattro serie secondarie sono incomplete.

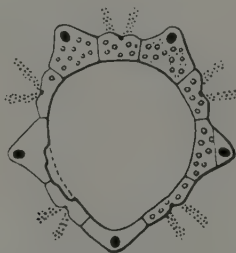
Peristoma piccolo, un po' depresso, circolare, bene intagliato.

Uno dei migliori esemplari presenta l'apparato apicale perfettamente conservato. Questo è di forma pentagonale regolare e poco esteso: infatti misura un diametro di mm. 6,5, cioè la quinta parte circa del diametro del guscio, che è di mm. 32. L'apparecchio è di tipo monociclico. Le genitali

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo paleontologico della R. Università di Roma.

(²) Presentata nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

sono alte, pentagonali, penetranti più o meno profondamente negli interambulacri: la 2^a e la 3^a sono le più alte, la 5^a è la più larga e s'insinua profondamente nell'interambulacro posteriore, che presenta una accentuata depressione mediana presso l'apice. I pori genitali, un pò ovali, sono situati presso l'estremità dell'angolo esterno delle placche. La madreporite è finamente spugnosa. Le ocellari, di forma esagonale, sono larghe e basse ed hanno il foro aperto sul bordo esterno, che è rientrante. Tanto le prime che le seconde sono ornate di granuli mammellonati. L'anello del periprotto è molto ampio, un po' ovale nel senso dell'asse antero-posteriore: esso misura mm. 5.5 per l'asse maggiore e mm. 5.1 per quello minore.



Apparecchio apicale di *Diplopodia inexpectata* sp. nov.
(Ingr. c. 5 volte).

La descrizione più dettagliata di questa specie sarà fatta, insieme con le altre cretacee, in un lavoro in corso di pubblicazione. Qui ho riportato i caratteri più importanti, che servono a stabilire i rapporti con i generi vicini. I più stretti sono in modo evidente con *Diplopodia* e *Tetragramma*, che, seguendo il Mortensen nella sua grande Monografia, noi teniamo genericamente separati (¹). Gli autori più recenti distinguono *Diplopodia* e *Tetragramma*, perchè negli interambulacri i tubercoli delle serie secondarie mancano o sono contrastanti nel primo genere, mentre nel secondo sono eguali a quelli delle serie principali, cioè non contrastanti (²). Ora per la presenza di tubercoli secondari contrastanti, gli individui mihiurini devono essere considerati dei *Diplopodia*, da cui non differiscono che per la ristrettezza dell'apparecchio apicale, che in *Diplopodia* può raggiungere il terzo del diametro del guscio ed anche di più.

Distinguo gli esemplari in questione col nome di *Diplopodia inexpectata-mihi*.

(¹) MORTENSEN TH., *A Monograph of the Echinoidea*. P. II, 1935.

(²) LAMBERT et THIÉRY, *Essai de nomenclature raisonnée des Échinides*.

* * *

È questa la prima volta che viene ritrovato l'apparato apicale nel genere *Diplopodia*, alla distanza di circa un secolo dalla sua istituzione. Il genere, stabilito da L. AGASSIZ nel 1848, comprende oltre una cinquantina di specie, distribuite dal Retico al Cenomaniano di tutti i paesi; di nessuno di queste però si conosceva ancora l'apparecchio apicale, il quale durante la fossilizzazione si è distaccato dal resto della corona, lasciando un'impronta, che permette tuttavia di apprezzarne la estensione e la forma pentagonale più o meno allungata. Il distacco dell'apice è un fenomeno frequente negli Echinidi regolari; nella diagnosi generica si dice allora che l'apice è *caduco*. Per la grande rarità del caso, il fatto meritava di essere segnalato. Basti tener presente infatti, limitandomi alla tribù dei *Pseudodiademinae*, che di tutte le numerose specie distribuite in ben 24 generi, secondo il LAMBERT ed il THIÉRY, o in 12, secondo il MORTENSEN, l'apice è sinora conosciuto in soli pochissimi esemplari: quello però del tipo monociclico sopra descritto per *Diplopodia* non era ancora noto; era per altro conosciuto quello diciclico dei generi *Pseudodiadema*, *Hessotiar*a, *Glyptodiadema*, *Acrocidar*is e *Microdiadema*, e quello emioliciclico di *Allomma* Pomel; ma questo genere o sottogenere, compreso dal LAMBERT e dal THIÉRY fra i *Pseudodiademinae*, è stato recentemente ritenuto dal MORTENSEN *incertae sedis* e posto in appendice agli *Hemicidaridae*.

* * *

Gli Autori dell'*Essai*, alcuni anni or sono, hanno istituito, nella medesima tribù dei *Pseudodiademinae*, il sottogenere *Strictotiar*a, che, secondo la diagnosi, differisce da *Tetragramma*, da *Diplopodia* e da *Tiaromma* per la ristrettezza del suo apice (1). Il tipo è *Strictotiar*a *argonne*nsis LAMBERT dell'Aptiano dell'Argonne, che in un primo tempo è stato riferito dallo stesso autore a *Tetragramma*. L'impronta lasciata dall'apparecchio apicale di questa specie misura appena mm. 5 in un guscio di 21 mm. di diametro (2).

A *Strictotiar*a i due autori francesi riportano varie specie dell'Aptiano e del Cenomaniano dell'Egitto, cioè: *Diplopodia Drayi* FOURTAU, *D. Osi-*

(1) LAMBERT et THIÉRY, *Essai de nomenclature raisonnée des Échinides*, pag. 564 (1925).

(2) LAMBERT, *Revision des Échinides fossiles de la Catalogne*, pag. 28, tav. II, figg. 14-16 (1927).

ridis FOURTAU, *D. macropyga* FOURTAU, *D. Halperti* FOURTAU e *D. sinaica* DESOR.

Recentemente il MORTENSEN non trovando giustificata tale separazione mette *Strictotiara* nella sinonimia di *Tetragramma*. Però non tutte le specie ora citate possono rientrare, per quanto riguarda la ornamentazione, nel genere *Tetragramma*. Come ho detto, i tubercoli secondari interambulacrali o mancano o sono contrastanti in *Diplopodia*, mentre sono di eguali dimensioni in *Tetragramma*.

Ora esaminando le specie riferite dal LAMBERT e dal THIÉRY a *Strictotiara* si può constatare che alcune di esse, secondo le figure e le descrizioni del FOURTAU, hanno gli interambulacri ornati, oltre che delle due serie principali, anche di serie di tubercoli secondari molto più piccoli dei primi, come si può osservare almeno in *D. Halperti* FOURTAU, in *D. osiridis* ed in *D. sinaica*.⁽¹⁾ Bisogna allora distaccare queste specie da *Tetragramma* e riportarle in *Diplopodia*. Lo stesso si osserva in una specie cenomaniana della Migiurtina, che fa parte della medesima collezione. Questa specie, che distinguo col nome di *Diplopodia Lorioli*, ha il guscio rotulare, depresso sopra e sotto, di medie dimensioni (diametro mm. 31, altezza mm. 10). Apparecchio apicale caduco, un po' depresso e molto ristretto a giudicare dall'impronta lasciata. Zone porifere largamente bigeminate su quasi tutta la faccia superiore; unigeminate ed un po' ondulate verso l'ambito e sulla faccia inferiore. Le maggiori polipore risultano al di sopra del guscio di otto elementi; al di sotto gli elementi diminuiscono gradatamente e presso il peristoma le placche diventano pseudotrigeminate. Tubercoli crenulati e perforati. Quelli delle serie secondarie interambulacrali (due esterne e due interne) sono più piccoli di quelli delle serie principali, cioè contrastanti. Le serie secondarie, specialmente le interne, sono incomplete. Peristoma piccolo, circolare, con forti intagli.

Diplopodia Lorioli appartiene quindi allo stesso gruppo di *D. Drayi*, *D. osiridis* ecc., e, come queste, non differisce da *Diplopodia* che per la ristrettezza dell'apparecchio apicale.

Si ripete per *Diplopodia* lo stesso fatto che si constata per *Tetragramma*: accanto cioè a specie a largo apparecchio apicale, ve ne sono altre ad apice ristretto. Il MORTENSEN non pensa che il carattere della ristrettezza dell'apice possa servire a giustificare una separazione sottogenerica; tuttavia egli conserva il termine *Strictotiara* per la specie di *Tetragramma* ad apice ristretto. Si potrebbe fare altrettanto per le specie di *Diplopodia* in questione, dando al termine che le distingue (*Strictodiplopo-*

⁽¹⁾ FOURTAU, *Catalogue des invertébrés fossiles de l'Égypte, Terr. Crét.*, 3^a p., *Échinodermes* (Supplément) 1921.

dia) tutt'al più il valore di sezione. Un giorno questo termine potrebbe anche scomparire, quando si troveranno delle forme intermedie tra le *Diplopodia* ad apparecchio apicale molto esteso e quelle ad apparecchio molto ristretto. *Diplopodia inexpectata* potrebbe rappresentare uno di questi termini, che però è ancora molto vicino a *Diplopodia* s. str., per le dimensioni e per la forma dell'apice, che non sia effettivamente quello circolare e molto più ristretto di *Diplopodia Osiridis*, *D. Drayi* ecc.

Per quanto riguarda la località, in cui sono stati raccolti gli esemplari descritti nella presente Nota, l'ing. Carlo Migliorini, che ha diretto la Missione, mi fornisce le seguenti indicazioni:

«Mgt. 12506. — Pendici meridionali del Monte Hardàg ad E di Bender Cassim, circa 1500 m. a N della sorgente di Bio Culul, sulla destra dell'Uadi omonimo. Lat. N 11°13'25"; Long. E Grw. 49°16' (circa). Dalla sommità dei calcari grossolanamente nodulosi immediatamente sottostanti alle arenarie cretacee inferiori. 29-12-1938».

Antropologia. — *Un indice sintetico di transvariazione* ⁽¹⁾.
Nota di ALFREDO SACCHETTI, presentata ⁽²⁾ da SERGIO SERGI,
Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

PREMESSA. — È noto il concetto di *transvariazione* o *variabilità transgressiva* fra i biologi e gli statistici. Fra i primi per il suo significato teorico, fra i secondi soprattutto per la tecnica di misurazione del fenomeno. Premetto che mi riferirò al caso di serie statistiche le quali seguono la curva di distribuzione binomiale o di GAUSS, traendo inoltre gli esempi concreti dal campo dell'antropometria.

Si parla di transvariazione quando uno o più individui di un gruppo, ad esempio, possono differire da uno o più individui di un altro gruppo, rispetto ad un particolare carattere, in senso opposto a quello che differenzia, in entrambi, i rispettivi valori tipici o medi del carattere in esame. Per misurare il fenomeno si ricorre normalmente alle costanti del GINI, formulate nel 1916 ⁽³⁾, le quali permettono di calcolare la probabilità e la intensità di transvariazione. Applicazioni notevoli, specialmente da parte del BOLDRINI, riguardano lo studio dei caratteri sessuali secondari ⁽⁴⁾. Ignorata o quasi è invece una brevissima nota di F. DE HELGUERO che risale al 1907 e che reca come titolo proprio: *Il valore delle differenze sessuali dal punto di vista biometrico* ⁽⁵⁾.

In questo scritto, che non è citato neppure nelle Memorie del GINI e del BOLDRINI, vi è impostato il problema nel caso di seriazioni che seguono la legge di distribuzione normale; così che l'autore aveva già tenuto conto dei tre fattori determinanti la transvariazione: la differenza fra i valori medi, la variabilità e la funzione analitica della curva di distribuzione. Il DE HELGUERO si era proposto di risolvere questo problema: « Dato il valore di un carattere in una serie di maschi e

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 22 gennaio 1943-XXI.

⁽³⁾ C. GINI, *Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni*. « Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica », vol. LII, n. 1, gennaio 1916. Apparso anche nel volume *Variabilità e Concentrazione*, Ed. Giuffrè, Milano 1939.

⁽⁴⁾ Cfr. ad esempio, M. BOLDRINI, *Su alcune differenze sessuali secondarie nelle dimensioni del corpo umano alla nascita e nelle età superiori*. « Archivio per l'Antropologia e la Etnologia », vol. LXIX, Firenze 1919.

⁽⁵⁾ F. DE HELGUERO, *Il valore delle differenze sessuali dal punto di vista biometrico*. « Atti della Società Romana di Antropologia », vol. XIII, Roma 1907.

di femmine cercare il *valore critico*. L'errore che si commette considerando come maschi o femmine tutti gli individui che superano o no questo valore ci darà un ottimo elemento per giudicare della bontà di un carattere come indice sessuale». Infatti, supposti noti i valori medi b_1 e b_2 di due curve di distribuzione e rispettivamente le deviazioni normali σ_1 e σ_2 , l'autore arrivava a determinare questo valore critico e così anche il suo « errore » per via analitica, il che rappresenta una vera e propria misura della transvariazione fra due curve A e B con grande vantaggio anche di fronte alle costanti del GINI determinabili solo sulla base delle singole distribuzioni, le quali troppo spesso mancano nella letteratura biometrica.

È facile comprendere come nella statistica interessi inoltre la possibilità di estendere la misura della transvariazione a più casi, determinare cioè un *indice sintetico di transvariazione* il quale eviti l'assurdo ed enorme lavoro di calcolo qualora si volesse, sulla base di molte curve di distribuzione, stabilire una eventuale media di tutte le possibili costanti di transvariazione.

Cito in proposito un esempio concreto di cui mi sono già occupato altrove: il *problema della valutazione della attitudine di ciascun carattere alla differenziazione dei gruppi umani*, problema estremamente complesso, la cui impostazione, come ho già mostrato (¹), si basa innanzi tutto su ricerche biometriche. Occorreva determinare, tra l'altro, tutte le variabilità intrarazziali ed interrazziali, e *sempre sullo stesso materiale*, in maniera da poter procedere facilmente ai confronti reciproci dei singoli caratteri antropometrici.

Ho adottato allo scopo un semplice rapporto tra i due tipi di variabilità, rapporto che denomino coefficiente relativo di variabilità interrazziale ($CRVI$), secondo la formula

$$[1] \quad CRVI = \frac{\Delta'}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

dove Δ' è la differenza media interrazziale e l'espressione posta al denominatore rappresenta la media aritmetica dello scostamento quadratico medio di tutti i gruppi presi in esame. Rimando agli scritti precedenti per la discussione sul procedimento adottato e ricordo solo come a questo punto sorga spontaneo il concetto di transvariazione se, come è oggi generalmente ammesso, si accetta la legge della distribuzione gaussiana dei caratteri antropometrici in seno ai singoli gruppi

(¹) Cfr. A. SACCHETTI, *Variabilità e correlazione intra ed interrazziale*. « Rend. della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali della R. Accademia d'Italia », vol. III, 1942, e inoltre i lavori: *Sul valore dell'indice facciale come mezzo di differenziazione dei gruppi umani*, dagli « Atti della IV Riunione della Società Italiana di Statistica », Roma, 1942, *Le variazioni intra ed interrazziali dell'indice cefalico*, dal vol. XXXIV della « Rivista di Antropologia », in riassunto, dalle « Relazioni al XLI Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », *Sulle relazioni fra cranio cerebrale e cranio facciale*, dal volume delle Relazioni al medesimo Congresso, *Correlazione tra statura indice cefalico, lunghezza e larghezza della testa*, dall'Archivio per l'Antropologia e la Etnologia », Anno 1942 (in corso di stampa).

relativamente omogenei dal punto di vista razziale. Ma qui appunto mi sono chiesto se è possibile invece tentare per altra via, *direttamente*, una misura sintetica della transvariazione per poi mettere in relazione questi risultati con quelli ottenuti dal *C R V I*.

* * *

Si abbia la seguente funzione di una curva binomiale

$$y = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

in cui b_1 è la media aritmetica, e si stabilisca $x_0 > b_1$ dove x_0 è il punto di ascissa corrispondente alla intersezione delle due curve della figura seguente.

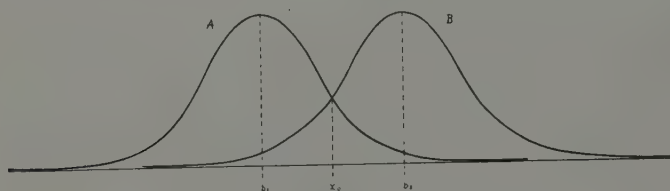


Fig. 1.

L'integrale definito

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx$$

rappresenta l'area delimitata dalla curva A dopo x_0 . Se si pone, come fa il DE HELGUERO,

$$\frac{x-b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}} = z, \quad \text{da cui} \quad dz = \frac{dx}{\sigma_1 \sqrt{2}}$$

lo stesso integrale diventa

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_0-b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

e si può scrivere così

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz - \int_0^{\frac{x_0-b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}} e^{-z^2} dz \right\}.$$

Cioè, ricordando che $\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}} e^{-z^2} dz.$$

Se si pone poi

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{1}{2} t^2} dt,$$

per far uso di una tavola dei valori dell'integrale di probabilità normale, l'espressione si può scrivere sotto la forma

$$[2] \quad \frac{1}{2} - \Theta\left(\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1}\right).$$

Infatti, posto $z = \frac{t}{\sqrt{2}}$ e $dz = \frac{dt}{\sqrt{2}}$ l'integrale $\int_0^{\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}} e^{-z^2} dz$ diventa

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

e così

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1 \sqrt{2}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Theta\left(\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1}\right).$$

Il DE HELGUERO chiama « errore E_1 » l'espressione [2] moltiplicata per un fattore costante, che io preferisco tralasciare, ma essa ci dà una vera e propria misura della *transvariazione* fra le curve A e B quando lo stesso calcolo si ripeta per la curva B , nel qual caso si avrà analogamente

$$[3] \quad \frac{1}{2} - \Theta\left(\frac{b_2 - x_0}{\sigma_2}\right)$$

sempre se $b_2 > x_0$.

Una misura complessiva della transvariazione, o, se si vuole, della probabilità di transvariazione, si avrà però sommando fra loro le espressioni [2] e [3]. E cioè

$$[4] \quad T = 1 - \left\{ \Theta\left(\frac{x_0 - b_1}{\sigma_1}\right) + \Theta\left(\frac{b_2 - x_0}{\sigma_2}\right) \right\}$$

dove con T indico appunto questo indice di transvariazione che evidentemente può oscillare da un minimo di 0 a un massimo di 1 (se l'area complessiva delle due curve è supposta appunto uguale a 1).

Ma se in particolare $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ si potrà scrivere

$$[5] \quad T = 1 - 2 \Theta \left(\frac{b_2 - b_1}{2\sigma} \right)$$

poichè in questo caso $x_0 - b_1$ diviene uguale a $b_2 - x_0$. Il fatto è forse evidente se si pensa che le due curve A e B assumono così la stessa forma pur potendo essere $b_1 \neq b_2$. Ma è anche facilmente dimostrabile se si tiene conto che per la ricerca di x_0 occorre rendere minima l'espressione seguente

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx + \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx.$$

Posta sotto la forma

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ - \int_{\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-b_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx + \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-b_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx \right\}$$

e rendendo uguale a zero la derivata

$$\frac{dy}{dx_0} = -\frac{1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x_0-b_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(x_0-b_2)^2}{2\sigma_2^2}} = 0$$

si ha, passando ai logaritmi

$$\log \sigma_1 + \frac{(x_0 - b_1)^2}{2\sigma_1^2} - \log \sigma_2 - \frac{(x_0 - b_2)^2}{2\sigma_2^2} = 0.$$

Se poi $\sigma_1 = \sigma_2$ otteniamo

$$(x_0 - b_1)^2 - (x_0 - b_2)^2 = 0$$

e poichè $x_0 - b_1 = x_0 - b_2$ è impossibile per $b_1 \neq b_2$, sarà $x_0 - b_1 = b_2 - x_0$ o in altri termini

$$x_0 = \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

* * *

Ho posto il problema sotto questa forma per renderne più evidente la estensione al caso di più curve che potremo indicare con A, B, \dots, N . L'opportunità di tale estensione è dimostrata dalla pratica esperienza statistica e l'esempio che ho citato può confermarlo, mentre potrebbe discutersi sul suo significato nel campo teorico del calcolo delle probabilità. Non approfondisco quest'ultimo aspetto della questione, che potrebbe es-

sere ripreso, ma è evidente che quando noi tentiamo una misura sintetica di un certo fenomeno statistico dobbiamo inoltre tener conto della qualità dei dati su cui operiamo perchè poi il confronto con altre costanti simili, determinate su diverso materiale, sia significativo. Così cadremmo però in osservazioni generali già note per molti altri casi del genere. Interessante poi sarebbe ritornare al concetto di T , o degli elementi che lo determinano, per studiarne la sua distribuzione quando si abbiano più casi di confronto come per i gruppi A, B, \dots, N , dove si faccia la solita ipotesi che essi rappresentino numerosi campioni provenienti da uno stesso universo: un problema simile a quello risolto da STUDENT nel caso del suo parametro t .

Partendo dalla [5] che ci dà la probabilità di transvariazione, da me dedotta, nel caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2$, ho tentato di determinare un indice sintetico di transvariazione sostituendo alle costanti statistiche calcolate nel singolo caso di confronto fra due distribuzioni o due curve i corrispondenti valori medi delle stesse costanti per tutti i casi previsti. Questo procedimento, come è evidente, si basa sull'ipotesi che sia significativa e giustificata la adozione di una media dei valori di σ corrispondenti a ciascun gruppo. Quando i singoli gruppi o campioni provengono da uno stesso universo ciò è per di più ovvio, poichè tutte le varianze tendono ad essere uguali fra loro.

Ne risulta pertanto la seguente espressione

$$[6] \quad T_n = 1 - 2 \Theta \left(\frac{\Delta}{2 \bar{M}(\sigma)} \right)$$

dove con T_n indico appunto la probabilità di transvariazione basata sulle suddette costanti medie; Δ è la media di tutte le possibili differenze fra b_1, b_2, \dots, b_n , corrispondenti rispettivamente ai gruppi A, B, \dots, N , e $\bar{M}(\sigma)$, similmente, la media di σ per gli stessi gruppi.

Da ciò è facile stabilire un parallelo fra T_n e $CRVI$ se si isola nella espressione [6] il rapporto $\frac{\Delta}{\bar{M}(\sigma)}$. Si ha così

$$[7] \quad T_n = 1 - 2 \Theta \left(\frac{CRVI}{2} \right).$$

La relazione fra T_n e $CRVI$ diviene pertanto elementare mentre si viene a dimostrare come quest'ultimo coefficiente ci conduce direttamente al concetto di transvariazione, ed ecco una ragione ulteriore per cui esso è stato formulato come nella [1] pur avendo preveduto e sperimentato tutte le altre possibilità (ad esempio in *Variabilità e Correlazione, intra e interrazziale*). La [7] inoltre si può interpretare come *probabilità*

di transvariazione nel caso di due curve uguali corrispondenti alle costanti medie determinate sui gruppi presi in esame.

Nella figura 2 riporto la curva della probabilità di transvariazione (T_n) in funzione del doppio scarto relativo medio fra x_0 e la media aritmetica del carattere o del gruppo, e cioè il $CRVI$. Da essa risulta ancora più evidente come col crescere di $CRVI$ diminuisca T_n . Non occorre descrivere la curva poichè essa è nota. Interessante solo è ricordare che in corrispondenza di $CRVI = 0$, T_n diviene massimo (-1) mentre

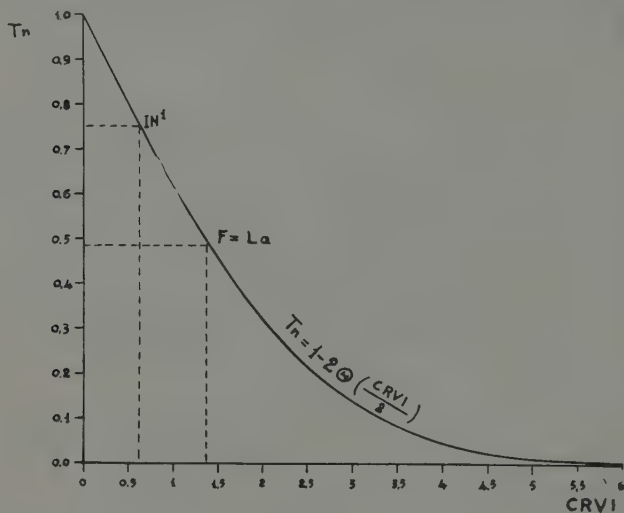


Fig. 2.

tende a zero col tendere all'infinito di $CRVI$. Inoltre, nella stessa figura, ho indicato due punti della curva corrispondenti ai valori in ascissa e in ordinata, massimi e minimi osservati fra i caratteri antropometrici presi in esame per le ricerche alle quali ho accennato. IN^1 rappresenta l'indice nasale in circa 40 gruppi di individui appartenenti a razze diverse, ma esclusi i gruppi sicuramente camerrini (come gli australiani); F invece la larghezza massima della testa (o La) in 43 gruppi diversi. Tali dati delimitano *nel caso specifico* quella parte di curva che interessa per la determinazione di T_n sulla base di $CRVI$, e che si avvicina sensibilmente all'andamento di una retta per cui le variazioni di $CRVI$ che si osservano in casi concreti restano praticamente proporzionali a quelle corrispondenti di T_n .

Nella figura 3 riproduco su scala maggiore lo stesso tratto di curva e su di essa indico la posizione occupata dai seguenti vari caratteri antro-

pometrici; A. larghezza del naso; B. altezza del naso; C. diametro frontale minimo; D. altezza totale della faccia; E. larghezza bizigomatica; F. larghezza della testa; G. lunghezza della testa; H. statura seduta; I. statura; IC. indice cefalico; IF. indice facciale; IN. indice nasale; IFs. indice facciale superiore; IN¹. indice nasale (esclusi i gruppi camerrini) ⁽¹⁾.

Tenendo presente che il calcolo delle costanti è basato per tutti i caratteri *sullo stesso materiale*, è molto interessante il confronto dei risultati, mentre già i valori di T_n , minimi e massimi, di circa 0,50 e 0,75, ci

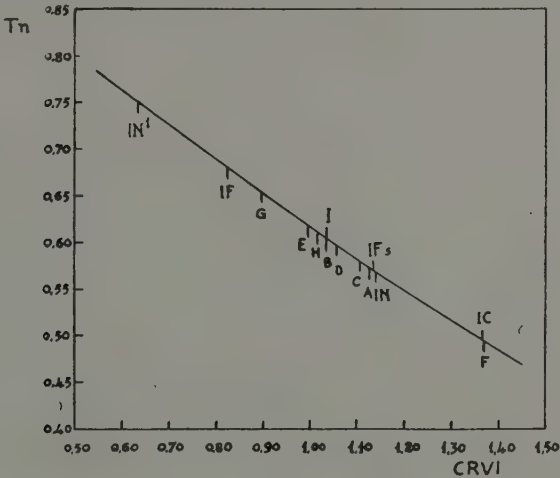


Fig. 3.

indicano che in generale i gruppi studiati non appartengono allo stesso universo, poichè si allontanano di molto dai *limiti fiduciari* comunemente considerati. Cito in particolare due indici antropometrici che si comportano in maniera molto diversa: l'IC e l'IF. Ma sul profondo significato biologico di queste divergenze rimando ancora ai miei precedenti lavori.

Infine la quasi linearità della relazione esistente tra T_n e $CRVI$ nei limiti che interessano il caso specifico non diminuisce l'utilità del calcolo di T_n che in termini di probabilità ci conduce ad una misura sintetica della cosiddetta variabilità transgressiva.

⁽¹⁾ Dato il carattere esemplificativo della citazione non mi dilungo a spiegare perchè per l'indice nasale ho proceduto a due calcoli, prima includendo, poi escludendo i camerrini come ho scritto già altrove.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA

- ANASTASI, Nino. — *Italia! Italia!* Catania, Giovanni Reina, 1941-XIX. Pp. 303, in-8°.
- BACCHELLI, Riccardo. — *Il brigante di Tassa del Lupo*. Milano, Garzanti, 1942, anno XX, Pp. 256, in-16°.
- *L'elmo di Tancredi*. Milano, Garzanti, 1942-XX. Pp. 270, in-16°.
- *La fine dell'Atlantide*. Milano, Garzanti, 1942-XX, Pp. 247, in-16°.
- BARBARO, Etmolao. — *Epistolae, orationes et carmina*. Ed. critica a cura di Vittore Branca. Firenze, « Bibliopolis », 1943-XXI. Voll. 2, in-8°. (Nuova Collezione di testi umanistici inediti o rari. R. Scuola normale superiore di Pisa, V).
- BERTOLIATTI, Francesco. — *Profilo storico di Sessa* con illustrazioni di Benigno Bertoliatti. Chiasso-Como, F. Bertoliatti — E. Cavalleri, 1942. Pp. 165, in-8°, con ill. e tavv.
- Bibliografia dell'Italia d'oltremare*, anno 1940. Roma, I. R. C. E., 1942-XX, Pp. 158, in-16°. (Istituto Nazionale per le relazioni culturali con l'estero, « Bibliografie », ser. II, n. 2).
- BOLLATI, Ambrogio. — Vedi: CLAUSEWITZ, Carlo von. *Della guerra...*
- BRANCA, Vittore. — Vedi: BARBARO, Ermolao. *Epistolae...*
- CALÒ, Giovanni. — Estratti:
Pestalozzi (« La cultura Magistrale », Enciclopedia dei maestri. Milano, Viola [s. d.]).
Psicologia e Pedagogia (id.).
Il positivismo pedagogico (id.).
- CANDIDO, Giacomo. — *Sulla mancata pubblicazione, nel 1826, della celebre Memoria di Abel*. Galatina, Tip. ed. « Marra », 1942-XX. Pp. 78, in-4°.
- CANEVARI, Emilio. — Vedi: CLAUSEWITZ, Carlo von. *Della guerra...*
- CASSINIS, Gino. — *Per una carta d'Italia a grande scala*. Estr. dal Bollettino della Soc. It. di Fotogrammetria « Ignazio Porro ». Milano, 1942-XX, a. I, n. 1.
- CLAUSEWITZ, Carlo von. — *Della guerra*. Traduzione dal tedesco del generale di C. d'A. Ambrogio Bollati e del Ten. Colonnello Emilio Canevari. Roma, 1942-XX. (Stato Maggiore R. Esercito. Ufficio storico).
- COMITATO PROMOTORE PER LE ONORANZE. — *Padre Domenico Bassi Barnabita*. Firenze, Felice Le Monnier, 1942-XX. Pp. 178, in-8°.
- DALLEGGIO D'ALESSIO, Eugenio. — *Le pietre sepolcrali di Arab Giamì* (antica chiesa di S. Paolo a Galata). Genova, 1942-XX. Pp. 168, in-4°. (« Atti

- della R. Deputazione di Storia Patria per la Liguria ». Nuova Serie, vol. V o LXIX della Raccolta).
- FRAUENDORFER, Sigmund von. — *Agrarwirtschaftliche Forschung und Agrarpolitik in Italien*. Entwicklung vom 18. Jahrhundert bis zur Gegenwart. Berlin, Paul Paroy, 1942, in-8°.
- GARIN, Eugenio. — *Filosofi italiani del Quattrocento*. Pagine scelte, tradotte e illustrate con 8 tavole fuori testo. Firenze, Le Monnier, 1942-XX. Pp. 552, in-8°, con tavv. (Istituto Nazionale di Studi sul Rinascimento).
- GHIGI, Alessandro. — Estratti:
La distribuzione della fauna nel teatro della guerra Nippo-Indomalese (Società italiana per il Progresso delle Scienze, Roma, 1942-XX).
Nuove esperienze di genetica sulle Numide. (Memoria letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Sessione 25 maggio 1941-XIX).
Osservazioni ed esperienze sulla ecologia e sul comportamento del granchio d'acqua dolce (Potamon edule). (« Memorie dell'Istituto Italiano di Idrobiologia Dott. Marco De Marchi », vol. I, aprile 1942-XX).
Rapporti faunistici fra l'Africa e l'Asia. (« Scientia », settembre-ottobre 1942-XX).
Ricerche sulla eredità della mutazione « tenebrosus » nel « Phosianus colchicus » e nel « Phosianus versicolor ». (Memoria letta alla R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Sessione 31 maggio 1942-XX).
- GHIZZETTI, Aldo. — Vedi: PICONE, Mauro. *Teoria dell'integrazione...*
- GOETHE, Johann Wolfgang. — *Elegie ed epigrammi*. Traduzione metrica di Emilio Weidlich. Bergamo, Edizioni Orobiche, 1942-XX. Pp. 70, in-16°.
- GRILLO, Alfredo. — *Astronomia nautica*. Livorno, Tip. R. Accademia Navale, 1942-XX. Pp. VIII-435, in-8°, con figg.
- LONGO, Biagio. — *Comportamento di un individuo della seconda generazione del Melo « Senza fiori » (Pyrus apetala Münch.)*. Estr. dal « Boll. della Società dei Naturalisti di Napoli », v. 52, a. 1942-XX.
- MANCINI, Augusto. — *L'Università di Pisa* (Lineamenti storici). Firenze, Vallecchi, 1942-XX. Pp. 21, in-8°. (« Rivista Romana », anno VI, n. 6, giugno 1942-XX).
- MATTIROLO, Oreste. — Vedi: OLIVERO, Eugenio. *La Villa della Regina in Torino*.
 OLIVERO, Eugenio. — *La villa della Regina in Torino*. Segue: MATTIROLO, Oreste. — *Il Giardino*. Torino, « La Palatina », 1942-XX. Pp. 91, tavole LXXXVII, in-4°.
- P. N. F. GIOVENTÙ ITALIANA DEL LITTORIO. — *La gioventù nella legislazione fascista*. Roma, anno XX, in-8°.
- PATRONI, Giovanni. — Estratti:
Tetracordon. (« Rendiconti della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti della Società Reale di Napoli », vol. XXII, 1942-XX).
La voce « Porticus » e la latinità dei Villanoviani. (« Rendiconti della Reale Accademia di Architettura, Letteratura e Belle Arti della Soc. R. di Napoli », vol. XXII, 1942-XX).
Appunti di filosofia e di diritto omerici. IV. — *La guerra*. (R. Istituto Lombardo di Sc. e Lett., « Rendiconti Cl. di Lett. », vol. LXXXV, fasc. II, 1941-42. Adunanze del 21 e 28 maggio 1942-XX).
- PERGOLESÌ, Giovan Battista. — *Opera omnia*. Roma, « Gli Amici della Musica da Camera », 1939-42, fasc. 28, in-8°.
- PICONE, Mauro. — *Teoria dell'integrazione Lebesguiana*. Lezioni del corso di analisi superiore raccolte dal prof. Aldo Ghizzetti (R. Università di Roma).

- Facoltà di Scienze Matematiche, fisiche e naturali). Roma, Città universitaria, D. U. S. A., 1941-42-XX).
- PONTI, Ermanno. — *Il banco di Santo Spirito fondato da Paolo V con Breve del 12 dicembre 1605*. Roma 1941-XX. Pp. 318, in-8°, con tavv.
- PRIORI, Domenico. — *La Frentania*. Lanciano, G. Carabba, 1942-XX. Pp. 383, in-8°.
- SILVESTRI, Filippo. — Estratti:
Recenti progressi degli studi sugli insetti dell'olivo (« Convegno di Studi olivicoli », 15-17 maggio 1942-XX).
- Contributo alla conoscenza dei Lepismidae e Machilidae (Thysanura) della Bulgaria* (« Mitteilungen aus den Koniglichen Naturwissenschaftlichen Instituten in Sofia », Band XV, 1942, pp. 27-32).
- WEIDLICH, Emilio. — Vedi: GOETHE, Johann Wolfgang. *Elegie ed epigrammi* . . .
- ZAM, Carlo. — *Quattordici novelle bizzarre*. Roma, ed. Massimiste [s. d.]. Pp. 145, in-16°.

COLLEZIONI

- « *Arte Moderna* », Milano, Hoepli, 1942-XX e XXI, in-16°, nn. 40-42.
- « *Itinerari dei musei e monumenti d'Italia* ». Roma, Libreria dello Stato, a. XX E. F., in-16°, voll. 18 e 77. (Ministero della Educazione Nazionale. Direzione Generale delle Arti).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

- « *Rassegna Volterrana* ». Rivista di arte e di cultura. Anni XIV-XVI. Pisa, Nistri-Lischi, 1942-XX.
-

Nuove ricerche magneto-ottiche

Relazione ⁽¹⁾ di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia

La constatazione di tre dei quattro fenomeni magneto-ottici conosciuti (FARADAY, KERR, e birifrangenza magnetica) si compie, di solito, mediante l'uso di nicol incrociati o quasi; si giudica ad occhio la formazione di oscurità, l'egualianza di penombre, ecc. Metodi di tal genere hanno consentito di portare la precisione delle singole determinazioni, per l'angolo di cui il piano di polarizzazione della luce ruota, da $0,1^\circ$ (FARADAY), persino a $0,005^\circ$ (polarimetro a penombra, Provostaye e Deseins, ecc.).

Può essere interessante spingere la precisione di misure del genere, ancora di più; e ciò al fine di osservare gli effetti in parola, sotto l'azione di campi magnetici di intensità assai ridotta; o provocati in corpi che sinora si dimostrarono, da tale aspetto, inattivi. Quest'ultimo, è per esempio il caso delle sostanze non ferromagnetiche, per quanto concerne il citato effetto KERR, o quello FARADAY, ricercato per trasparenza in sottilissimi strati metallici. Come è noto, in tal caso, KUNDT trovò l'effetto FARADAY, soltanto per Fe, Co, Ni.

Mosso da tali considerazioni, ho ripreso il metodo già da altri sperimentato, dell'osservazione di simili effetti, mediante l'uso di cellule fotoelettriche e valvole termoioniche. Per vero, in una simile realizzazione, si adotta l'artificio di connettere *in serie*, gli spazi catodici di quei due congegni, come fu per la prima volta da me indicato, nella realizzazione di sistemi radiotelefonici per luce ultravioletta ⁽²⁾. Sono così riuscito recentemente a perfezionare il dispositivo ora citato; esso è rappresentato schematicamente dalla figura 1. Il catodo di una cellula fotoelettrica, C, è connesso con la griglia di comando di un pentodo P, a riscaldamento indiretto, Philips WE 23, o l'equivalente Telefunken. La griglia schermo di questo è portata a 50 v; la placca a 100 v; catodo e soppressore del

⁽¹⁾ Letta nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

⁽²⁾ « Rend. R. Acc. Lincei », V, 1927, pag. 726.

pentodo, uniti al suo involucro metallico esterno, sono posti a terra. Il riscaldatore del pentodo, posto anch'esso a terra, è traversato da c. c., data da una batteria, B_1 da 4 v. Le tensioni della griglia schermo e della placca sono notevolmente ridotte, rispetto a quelle indicate dalla casa costruttrice. Ciò si comprende, data la diversa finalità, a cui ora il pentodo è destinato. Il catodo del pentodo, attraverso un galvanometro, G , fornito di shunt, S , regolabile fra 0,1 e 1000 Ω), fa capo al polo negativo della batteria B_2 di 120 v. Il galvanometro è connesso, in derivazione, colla resistenza R_1 , che ha valore regolabile, ed in serie con altra resistenza

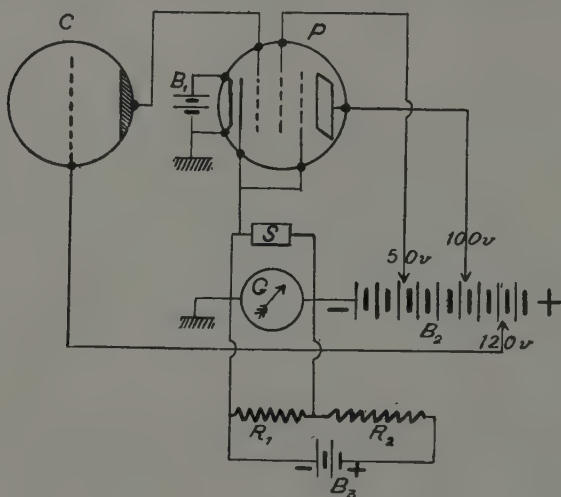


Fig. 1.

costante R_2 , anch'essa regolabile e con la batteria B_3 , da 4 v. La cellula può essere al Na, K, Cs, in vuoto od in gas nobile. Più conveniente è apparsa, per le esperienze che ora si descrivono, una cellula PRESSLER, al Na in gas nobile. Il galvanometro è un KIPP e ZONEN, da 25 Ω di resistenza, della sensibilità di $5 \cdot 10^{-10}$ amp/mm, su scala a m. 3 di distanza. La prontezza di un simile strumento, lo rende particolarmente adatto per queste ricerche.

Quando la luce che cade sulla cellula è di intensità costante, la corrente che traverserebbe il galvanometro G , viene annullata mediante la regolazione di R_2 . Ciò va fatto con grande cautela, manovrando contemporaneamente lo shunt S .

Così realizzato, il dispositivo è sensibile a variazioni della luce cadente sulla cellula dell'ordine di 1/100.000. Esso è utilizzato da me,

per l'osservazione di piccolissime rotazioni del p. di p. della luce, quali quelle che si hanno nell'effetto FARADAY od in quello KERR. Ma speciali accorgimenti occorrono, nel procedere ad esperienze del genere, qualora vengano adoperati potenti elettromagneti. Infatti, il campo da questi generato, per la imperfetta chiusura del loro circuito magnetico, può perturbare più o meno notevolmente il funzionamento del pendolo od anche della cellula fotoelettrica. Ho eliminato completamente tale inconveniente, rinchiudendo tali due congegni nei due involucri di ferro (cilindrico e sferico, l'un dentro l'altro), di un galvanometro corazzato Siemens, dal quale sono state rimosse le bobine e l'equipaggio.

Un'altra perturbazione è dovuta all'azione dei campi magnetici su i sistemi ottici usati (nicol, lenti ecc;), se questi sono abbastanza prossimi all'elettromagnete. Infatti, per l'azione del campo, le parti di tali sistemi possono divenire sedi di effetto FARADAY, risultandone, così, falsate le misure. Occorre allontanare sino a due metri le lenti o le lastre di vetro di piccolo spessore, e fino a sei i pezzi diottrici più grossi come nicol

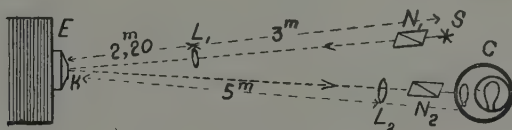


Fig. 2.

o simili. Ciò è indicato nello schema della figura 2, che si riferisce ad un complesso, per l'osservazione dell'effetto KERR. In esso l'elettromagnete E ha nucleo di 9 cm di diametro, con la polarità anteriore libera, tronco-conica e terminante in un piano circolare di 3 cm di diametro. Esso, con corrente di 20 amp, data da batteria da 120 v, genera in quel piano un campo di circa 3000 oersted. Su tale polarità, si possono fissare specchi di varia natura: di acciaio per l'effetto KERR, propriamente detto; di altro metallo, come sarà detto. La luce di una lampada intensiva, S , di circa 30 watt, polarizzata da N_1 , traversa la lente L_1 , è riflessa dallo specchio K , traversa poi L_2 e N_2 e giunge infine dentro l'involucro corazzato C , che circonda cellula e pendolo. I due nicol N_1 e N_2 durante le osservazioni, non sono posti all'estinzione; i loro piani principali fanno infatti tra loro un angolo da 15° a 30° . Si può, a mano, far ruotare l'analizzatore N_2 anche di piccolissimi angoli dell'ordine $0,1'$; questo valore corrisponde allo spostamento di una divisione di un cerchio graduato, diviso in cento parti, portato da una vite micrometrica. In condizioni di normale illuminazione, della cellula, alla rotazione di $1'$, corrisponde sulla scala del galvanometro, una deviazione di circa 60 cm. Qualora la stabilità del dispositivo fosse perfetta, si dovrebbe così raggiungere una sensibilità

di lettura di $0,1''$ per mm. Ma per ora, tale stabilità manca, in causa di perturbazioni, che sono in corso di accertamento ed eliminazione. Mi sono perciò accontentato della precisione dieci volte minore, e cioè di circa $1''$, corrispondente ad 1 cm di deviazione sulla scala. Rotazioni opposte del piano di polarizzazione della luce cadente sulla cellula, in conseguenza della reciproca posizione dei nicol predetta, danno così luogo a deviazioni opposte sulla scala, che indicano, oltre al valore della rotazione in ogni caso, il suo senso.

L'effetto KERR sui metalli ferromagnetici corrisponde, come è noto, ad una rotazione di saturazione di circa $22'$, e ad una costante di KERR, per il tratto sensibilmente rettilineo della caratteristica, di circa $0,012'$, per oersted. Si comprende perciò, come nel dispositivo descritto, possa bastare usare debolissime correnti magnetizzanti l'elettromagnete, per osservare tracce sensibilissime dell'effetto in parola; invece dei 20 ampere massimi predetti. Si può anzi, abolire l'elettromagnete *E*; usare uno specchio di acciaio di 3 cm di diametro e 4 mm di spessore, sul cui contorno siano avvolte 50 spire di filo di rame da 0,5 mm. Mandando in questo una corrente di circa 4 ampere, si ha così una deviazione di circa 20 cm, corrispondente ad una rotazione di circa $0,3'$. Per vero, in questo caso, le deviazioni ottenibili invertendo la corrente intorno allo specchio, non sono, di solito, eguali, in causa di accidentale magnetismo residuo di questo, acquistato in precedenti cicli subiti. Ma esse cambiano di segno, invertendo l'angolo relativo fra i due p. di p. dei nicol; ed in ogni modo, ciò dimostra che si tratta di effetto *negativo*, cioè inverso al senso delle correnti amperiane, che generano il campo; come deve essere, per i metalli ferromagnetici.

A proposito di sensibilità di questo dispositivo, accenno ancora al fatto, per cui esso si presta alla dimostrazione di debolissimi effetti FARADAY, quali mai sarebbero stati rilevabili, con altri metodi. Così, un disco di vetro pesante al piombo, di 4 cm di diametro, ed 8 mm di spessore, argentato da una parte, circondato da 30 spire di filo di rame di 0,5 mm, sostituito a tutto l'elettromagnete *E*, lascia manifestare l'effetto FARADAY, già per il passaggio di 30 milliampere, in tale filo. Non deve essere difficile anche ammettere, che possa bastare il c. m. terrestre, per ottenere un sensibilissimo effetto.

Di fronte a tali vantaggi di sensibilità, stanno alcuni inconvenienti. Occorre lavorare con sorgenti di luce rigorosamente costanti; il che non può ottenersi che con lampade ad incandescenza, accese da c. e. generata da grosse batterie di accumulatori. In conseguenza, non è possibile sperimentare con luce esattamente monocromatica; al più occorre accontentarsi di luce filtrata da tali lampade. Inoltre, mentre occorrerebbe, nell'esame dell'effetto KERR sul ferro, rendersi conto dell'ellitticità della vibrazione, ciò non appare per ora, possibile col descritto dispositivo. Questo ci dà

soltanto indicazioni sulla variazione complessiva, dell'intensità della luce riflessa.

Ma altri sviluppi può avere l'uso di tale congegno. Sempre in causa dell'enorme sua sensibilità, si può pensare a studiare l'eventuale esistenza dell'effetto KERR su metalli, all'infuori di quelli ferromagnetici. Una ricerca del genere mi è subito apparsa assai facile; basta infatti all'uopo, sostituire allo specchio di acciaio K della figura 2, altro di metallo non ferromagnetico. L'esperienza così condotta, dà senz'altro, esito apparentemente positivo. Ho usato specchi di Ag (deposito chimico), di Al (distillazione nel vuoto), di Au e Pt (deposito catodico) di Bi (pulimento meccanico). Per il campo di 3000 oersted, si hanno deviazioni dell'ordine di 15 a 40 cm, a seconda delle condizioni di illuminazione e del potere riflettente di ciascun metallo. In ogni caso, apparisce trattarsi però di effetto *positivo*, cioè secondo le correnti amperiane del campo, e perciò di senso inverso a quello di Fe, Ni, Co. Tale effetto si manifesta, se espresso in angolo di rotazione del p. di p., all'incirca nella stessa misura cioè dell'ordine di $0.5'$, per tutti i metalli ora elencati. Forse però, l'alluminio darebbe un effetto alquanto minore.

Ora, contro l'accettazione di tal risultato, si erge una difficoltà teorica. KUNDT aveva, nel 1884, scoperto che le lamine ferromagnetiche trasparenti, magnetizzate, ruotano il p. di p. della luce, per angoli che sono più migliaia di volte maggiori, di quelli constatati per effetto FARADAY nel vetro, se riportate allo stesso spessore. Ma secondo una interpretazione di DU BOIS, tale enorme rotazione sarebbe legata alla grande intensità di magnetizzazione, del mezzo ferromagnetico, sotto l'azione del campo esterno. Riportando la rotazione V (per unità di campo e di spessore) alla costante di KUNDT, $K = V\chi$, dove χ è la suscettività magnetica del mezzo, si trova, che tale costante è dello stesso ordine per tutti i corpi, a parte il suo segno.

Si può ora presumere che l'effetto KERR abbia la stessa origine di quello FARADAY, nel senso che la luce, penetrando per lievissimo spessore superficiale nel metallo, subisca quello effetto, corrispondentemente al valore della intensità esterna del campo e della suscettività magnetica del mezzo. Per cui, qualora, plausibilmente, si supponga che lo spessore di metallo che è interessato nel fenomeno della riflessione, sia dello stesso ordine di grandezza, per tutti i corpi, ferromagnetici o no, si comprende che, alla entità dell'effetto KERR in quelli ($22'$, massimi), non possa corrispondere un effetto ancora dell'ordine di una buona frazione di $1'$, nei metalli para o diamagnetici, quale quello da me apparentemente rilevato. Verosimilmente dunque, una causa perturbatrice deve aver falsato i risultati.

Di essa son andato in cerca per vario tempo, ed infine essa è stata rintracciata. L'apparente effetto constatato, è dovuto, almeno nel suo

maggiore ammontare, non al metallo riflettente la luce, ma all'aria ambiente (che in un primo tempo ritenevo erroneamente che non dovesse dare perturbazione sensibile). Essa subisce, specialmente nelle vicinanze dell'elettromagnete, l'effetto FARADAY. La prova sicura di ciò, è stata ottenuta da me, nel modo seguente.

Lo specchio *K* di vetro argentato di 3 cm di diametro, costituisce il fondo di un tubo di vetro *T*, lungo 28 cm, posto come indica la figura 3, davanti all'elettromagnete solito. *T* è chiuso anteriormente da una lastra di vetro, di 5 mm di spessore, *V*. Nel tubo si può fare il vuoto mediante l'innesto *I*. Il dispositivo ottico restante è quello già indicato nella figura 2. L'effetto osservato dovrebbe risultare stavolta, e prima di fare il vuoto in *T*, dalla somma di tre effetti distinti: quello *a* (di tipo KERR) che sarebbe proprio dello specchio di argento *K*; quello *b* (di tipo FARADAY), dovuto all'aria del tubo di 28 cm di lunghezza; quello *c* (ancora di tipo FARADAY), della lastra di vetro *V*. Vi sarebbe stata l'opportunità di

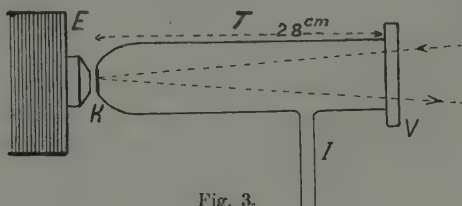


Fig. 3.

considerare anche un effetto del rimanente tratto di aria, compreso nei sei metri circa, fra elettromagnete e sorgente o cellula; ma si può ritenere tale azione del tutto trascurabile. In una esperienza da me eseguita, ho ottenuto per tale effetto complesso, espresso in cm. di deviazione sulla scala, il valore $a + b + c = 53$ cm. Facendo successivamente il vuoto l'effetto si riduce ad $a + c = 38$ cm. Lasciando rientrare l'aria, e togliendo la lamina di vetro *V*, trovo $a + b = 15$ cm. Da ciò si deduce $a = 0$. Ciò ci indica che il preteso effetto KERR nell'argento è nullo. L'aria immediatamente prossima all'elettromagnete, dà luogo ad un effetto FARADAY, di 15 cm; il vetro, di 38 cm. Questi ultimi valori dipendono oltre che dalla natura ed estensione di tali mezzi, dalla distribuzione del campo magnetico sino a 28 cm davanti all'elettromagnete. Presumibilmente l'aria risente tale effetto, subito nelle vicinanze dell'elettromagnete, e non oltre; mentre il vetro *V*, che non esiste nella condotta solita delle esperienze, lo risentirebbe ancora notevolmente a distanza, essendo la sua costante di VERDET ben superiore a quella dell'aria.

Si deve dunque concludere, che, dentro i limiti di precisione delle misure sinora eseguite, i metalli non ferromagnetici usati e presumibilmente tutti gli altri, non presentano l'effetto tipo KERR.

Questo ragionamento non esclude però che un effetto del genere possa realmente verificarsi ed in qualche modo venir rilevato, anche per tali metalli. Probabilmente esso esiste; ma ha un ordine di grandezza ben inferiore a quello che l'esperienza bruta, cioè non corretta dall'influenza dell'aria atmosferica, mi ha rivelato. Quando il dispositivo descritto sarà stato reso, nel suo funzionamento, più stabile ed ancora più sensibile, si potrà verificare una presunzione del genere. Si potrà cioè dimostrare con tutta probabilità, che l'effetto tipo KERR, di entità sia pure ridottissima, costituisce una proprietà generale della materia.

Meccanica. — *Sopra l'equazione differenziale del moto centrale newtoniano.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Immaginiamo di avere un punto P attratto da un centro fisso Q di massa $M(t)$ funzione del tempo t , con forza proporzionale alla distanza; supponiamo $M(t)$ definita per $t \geq 0$ ed ovviamente sempre positiva. Come è notissimo, detta r la distanza PQ , l'equazione differenziale del moto è

$$[1] \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - rM(t)$$

essendo c la costante delle aree che supporremo generalmente diversa da zero. Proiettando sopra l'asse delle ascisse, si ha immediatamente:

$$[2] \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + xM(t) = 0$$

ed analoga equazione si ottiene proiettando sull'asse delle ordinate.

Ora io ho dimostrato in una mia Nota ai Lincei ⁽²⁾, che se $M(t)$ è sempre crescente, od almeno mai decrescente, e se $\log M(t)$ tende regolarmente all'infinito (nel senso ivi specificato), l'integrale generale della [2] tende a zero quando t tende all'infinito. In tal caso si ha dunque certamente:

$$[3] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r = 0.$$

Ciò posto ci domandiamo: questa proprietà, valida per forze proporzionali alla distanza (forze di richiamo, della Dinamica) varrà ancora nel caso di una forza d'attrazione newtoniana? In altre parole, il teorema potrà estendersi all'equazione differenziale

$$[4] \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{M(t)}{r^2}$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

⁽²⁾ Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra un'equazione differenziale della Dinamica* in « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1935, sem. I.

che regge il moto di un punto P attratto da un centro fisso Q di massa $M(t)$ con la legge di NEWTON?

Scopo di questa Nota è appunto di rispondere a tale domanda, e vedremo tra breve che la risposta sarà *affermativa*.

2. Al tal fine, cominciamo col ricordare alcune proprietà da me dimostrate sopra l'equazione [4], in varie Note sul *Problema dei due corpi di masse variabili* pubblicate nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei »: ovviamente, studio sempre l'equazione nel campo reale, supponendo $M(t)$ definita per $t \geq 0$, sempre positiva e crescente, od almeno mai decrescente. Esse sono le seguenti:

I) Se tendendo t all'infinito, $M(t)$ tende all'infinito di ordine *non inferiore al primo* rispetto a t , allora qualunque siano le condizioni iniziali (e cioè, analiticamente, i valori a e b di r e di $\frac{dr}{dt}$ per $t = 0$, purché ambedue reali, finiti, ed inoltre $a > 0$), la r si mantiene sempre inferiore ad un limite fisso.

II) Nell'ipotesi ora fatta, la r non può essere funzione sempre crescente del tempo. In conseguenza: o essa, da un certo istante in poi, sarà decrescente ed allora si dimostra che ha per limite zero, oppure oscillerà perennemente tra una successione d'infiniti massimi $R_1 R_2 R_3 \dots R_n \dots$ ed una successione d'infiniti minimi $r_1, r_2, r_3 \dots r_n \dots$.

III) Queste due successioni sono ambedue decrescenti (od almeno mai crescenti) ed il limite l della successione dei minimi è eguale a zero.

3. Quanto alla successione dei massimi essa tenderà certamente ad un limite L (essendo composta di termini positivi decrescenti), ma non è detto che tale limite sia zero. Per vederlo, supponiamo per esempio, che M aumenti bruscamente tutte le volte e soltanto quando P si trova ad un massimo (afelio) della propria orbita. Si vede allora immediatamente che la traiettoria di P intorno all'origine fissa Q sarà composta di una successione infinita di ellissi, di cui la distanza perielica (minimi) tende a zero, mentre quella afelica resta costante. Il problema di ricercare se r tende a zero, si riduce dunque ad esaminare i casi in cui il limite L della successione dei massimi è zero.

4. Premesso tutto ciò cominciamo a ricercare le condizioni a cui deve soddisfare $M(t)$ (supposta sempre positiva, crescente, od almeno mai decrescente e tendente all'infinito di ordine non inferiore al primo) affinché L sia maggiore di zero.

A tale scopo, poichè la successione delle R è decrescente e tende ad L , potremo trovare un massimo R_k tale che si abbia

$$[5] \quad R_k - L = \epsilon_k$$

essendo ε_k positiva e minore di una quantità piccola a piacere. Per il massimo successivo, sarà

$$[6] \quad R_{k+1} - L = \varepsilon_{k+1}$$

essendo $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k$, giacchè la successione è decrescente o non crescente. Ovviamente ε_k tenderà a zero col crescere dell'indice k .

Ciò posto, indichiamo con t_k e t_{k+1} i tempi in cui si verificano questi due massimi, moltiplichiamo la [4] per $\frac{dr}{dt}$ ed integriamo tra t_k e t_{k+1} .

Avremo, ricordando che le derivate sono nulle nei massimi

$$[7] \quad c^2 \left[\frac{1}{R_{k+1}^2} - \frac{1}{R_k^2} \right] + 2J = 0$$

dove, per brevità abbiamo chiamato con J l'integrale:

$$[8] \quad J = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{M(t)}{r^2} \frac{dr}{dt} dt = \int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{M(t)}{r^2} dr.$$

Ora supponiamo che, nell'intervallo di tempo ora considerato, la M aumenti bruscamente della quantità a_k nell'istante τ_k in cui r è eguale a ρ_k ($0 < \rho_k < R_k$). Si ha subito, integrando:

$$[9] \quad J = M(t_k) \int_{R_k}^{\rho_k} \frac{dr}{r^2} + \{M(t_k) + a_k\} \int_{\rho_k}^{R_{k+1}} \frac{dr}{r^2} = \\ = M(t_k) \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_{k+1}} \right) + a_k \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{R_{k+1}} \right).$$

Chiamando con m_k l'incremento relativo e cioè ponendo:

$$[10] \quad m_k = \frac{a_k}{M(t_k)}$$

la [7] ci dà con semplici riduzioni:

$$[11] \quad \left(\frac{1}{R_{k+1}} - \frac{1}{R_k} \right) \left(1 - \frac{c^2}{2M(t_k)} \left\{ \frac{1}{R_k} + \frac{1}{R_{k+1}} \right\} \right) = m_k \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{R_{k+1}} \right).$$

Ora, poichè L si suppone maggiore di zero, in virtù della [5] e della [6] il primo membro di questa equazione tende certamente a zero col crescere dell'indice k . Dunque dovrà aversi:

$$[12] \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \left(\frac{1}{\rho_k} - \frac{1}{R_{k+1}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_k \left(\frac{L - \rho_k}{L \rho_k} \right) = 0.$$

E cioè sarà necessario che, crescendo k , o $L - \varphi_k$ tenda a zero (vale a dire che l'incremento tenda ad avvenire quando P si trova in posizione sempre più prossima ai massimi od afeli), oppure che m_k tenda a zero.

Notiamo che, poiché tra t_k e t_{k+1} avviene un solo incremento di massa nell'istante τ_k , la traiettoria sarà composta di due archi di ellissi che si toccano nella posizione occupata da P in quell'istante: in conseguenza, poiché il raggio vettore QP appartiene tanto alla prima quanto alla seconda ellisse, avremo $\varphi_k \leq R_{k+1} \leq R_k$. Ne segue che il secondo membro della [11] è sempre positivo e quindi la quantità tra parentesi che moltiplica $\frac{1}{R_{k+1}} - \frac{1}{R_k}$ al primo membro sarà pure positiva e minore di 1. In particolare, se le masse fossero costanti, avendosi dalla teoria delle orbite $c^2 = Mp = Ma(1 - e^2)$, tale quantità sarebbe eguale all'eccentricità.

5. Ciò posto, presa una quantità positiva σ piccola a piacere ma fissa, divideremo gli aumenti che subisce M in due classi, ponendo nella prima quelli che avvengono quando P dista dai massimi meno di σ , e nella seconda gli altri. Per brevità, chiameremo questi aumenti rispettivamente col nome di *afeliaci* e di *non afeliaci*.

Se tra R_k ed R_{k+1} avviene un aumento non afeliaco, avremo dalla [11]:

$$[13] \quad \frac{1}{R_{k+1}} - \frac{1}{R_k} > m_k \left(\frac{1}{\varphi_k} - \frac{1}{R_{k+1}} \right) > \frac{m_k \sigma}{\varphi_k R_{k+1}} > \frac{m_k \sigma}{R_1^2}.$$

Supponiamo ora che tra i due massimi successivi R_k ed R_{k+1} , abbiano luogo n incrementi $m_{k_1}, m_{k_2}, \dots, m_{k_n}$. Dopo il primo incremento, P descriverà una nuova ellisse E' avente distanza afeliaca A_{k_1} ; ma, prima ancora di essere giunto a questo afelio, un nuovo incremento di massa obbligherà P a descrivere un'altra ellisse E'' avente distanza afeliaca A_{k_2} , e così di seguito. Per quanto si è detto, ed in conformità ad un teorema generale già da me dimostrato ⁽¹⁾, si ha poi

$$[14] \quad R_k \geq A_{k_1} \geq A_{k_2} \dots A_{k_n-1} \geq R_{k+1}$$

e quindi, se l'incremento è non afeliaco e se k è sufficientemente grande, avendosi $R_k - \varphi_k > \sigma$ e $R_{k+1} - \varphi_k < \sigma$, risulterà pure qualunque sia l'indice i l'ineguaglianza $A_{k_i} - \varphi_k > \sigma$.

⁽¹⁾ Cfr. G. ARMELLINI, *Un teorema sul problema dei due corpi di masse crescenti* in « Rend. Lincei », 1925, sem. I.

Ciò posto, possiamo ripetere per ognuna di queste ellissi il ragionamento già fatto ed avremo:

$$[15] \quad \frac{1}{A_{k,i+1}} - \frac{1}{A_{k,i}} > \frac{m_{ki} \sigma}{R_1^2}$$

e quindi sommando:

$$[16] \quad \frac{1}{R_{k+1}} - \frac{1}{R_k} > \frac{\sigma}{R_1^2} \sum_i m_{ki}.$$

Analogamente avremo qualunque sia l'indice positivo s :

$$[17] \quad \frac{1}{R_{k-s}} - \frac{1}{R_k} > \frac{\sigma}{R_1^2} S$$

dove S indica la somma di tutti gli incrementi relativi non afeliaci, subiti da $M(t)$ tra il massimo R_k ed il massimo R_{k+s} . Ricordando ora che la differenza $R_k - R_{k+s}$, qualunque sia l'indice s , tende a zero quando k cresce all'infinito, troviamo che:

Condizione necessaria affinché il limite L della successione dei massimi sia maggiore di zero, è che la somma degli incrementi relativi non afeliaci S che M subisce dall'istante t_k in poi, tenda a zero col crescere di t_k .

In senso più preciso, date due quantità σ ed η positive e piccole a piacere, affinché L sia maggiore di zero è necessario che si possa trovare un istante t_k tale che tutti gli aumenti relativi che M subisce da t_k in poi, quando P dista dall'afelio più di σ , abbiano una somma minore di η .

6. Come è facile vedere, se invece di considerare la $M(t)$ consideriamo il suo logaritmo $\mu(t)$ — come facemmo nella citata Nota ai Lincei — invece di considerare gli aumenti relativi basta considerare gli aumenti assoluti. Si ha infatti facilmente

$$[18] \quad \Delta\mu_i = \log \frac{M(t_i) + a_i}{M(t_i)} = \log [1 + m_i]$$

e quindi se $\sum m_i$ estesa a tutti gli incrementi relativi non afeliaci, subiti da M dall'istante t_k in poi, diviene piccola quanto si vuole purchè si scelga t_k sufficientemente elevato, la medesima proprietà vale anche per $\sum \Delta\mu_i$ e viceversa. Ovviamente in tal caso, se si considerano soltanto questi aumenti non afeliaci, $\mu(t)$ tende ad un limite finito.

Il ragionamento si potrebbe estendere facilmente, col metodo dei limiti, al caso in cui M , invece di crescere discontinuamente, è funzione continua di t e si ottiene l'identico risultato.

7. Ciò posto, a partire da un istante t_k grande a piacere, prendiamo un intervallo di tempo T , dividiamolo in due intervalli T_1 e T_2 , assegnando al primo tutti gli istanti in cui P dista dai massimi meno di σ ed al secondo gli istanti rimanenti. Poichè σ può prendersi piccola a piacere, mentre L è fissa e diversa da zero, e poichè $\frac{d^2 r}{dt^2}$ tende a $-\infty$ nei massimi si vede facilmente che comunque grande sia T il rapporto $T_1 : T_2$ tende a zero con σ . Analoga proprietà, che nella Nota sopra indicata assumemmo come un Lemma nello studio dell'equazione differenziale lineare [2], venne poi rigorosamente dimostrata⁽¹⁾ da TONELLI e SANSONE. Ma qui basta ricordare che P si muove intorno all'origine fissa Q con la legge delle aree e che le orbite osculatrici — ossia quelle che descriverebbe P se da t in poi M si mantenesse sempre costante — sono ellissi aventi per fuoco Q e con asse maggiore più grande di L , per trovare subito che il rapporto $T_1 : T_2$ è piccolo dell'ordine di $\sqrt{\sigma}$.

Ricordiamo pure che, nella nostra Nota ai Lincei, abbiamo introdotto per brevità il concetto di tendenza « regolare » delle funzioni all'infinito. E precisamente, abbiamo detto che una funzione $F(t)$ tende *regolarmente* all'infinito quando, crescendo t all'infinito, essa diviene ancora infinita anche se si fa astrazione degli incrementi che la funzione stessa subisce nei punti di un insieme di densità relativa inferiore ad ε , essendo ε piccola a piacere. Premesso tutto ciò, risulta immediatamente il seguente

8. TEOREMA. — *Sia data l'equazione differenziale:*

$$[19] \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{M(t)}{r^2}$$

dove $M(t)$ si suppone definita per $t \geq 0$, positiva e sempre crescente (od almeno mai decrescente) e sia $r(t)$ un integrale della [19] definito dalle condizioni:

$$[20] \quad r_{t=0} = a \quad ; \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)_{t=0} = b$$

essendo a e b reali e inoltre $a > 0$. Se, crescendo t all'infinito, M tende a divenire infinita di ordine non inferiore al primo e se inoltre $\log M(t)$ tende regolarmente all'infinito, allora, qualunque siano a e b , si ha sempre

$$[21] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0.$$

Dimostrazione. — La dimostrazione del teorema è immediata, dopo quanto abbiamo già detto. Infatti, o la $r(t)$, da un certo istante in poi,

⁽¹⁾ Cfr. *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari* (Pavia, 1936).

sarà funzione decrescente di t ed allora, come vedemmo, tende a zero. Oppure $r(t)$ sarà funzione sempre oscillante tra infiniti massimi e minimi ed in questo caso, poichè il limite l della successione dei minimi è zero, basta mostrare che anche quello L della successione dei massimi è eguale a zero. Infatti L potrebbe essere diverso da zero, soltanto nel caso in cui fosse possibile di trovare un istante t tale che la somma degli incrementi *non* afeliaci, subiti da $\log M(t)$ da t in poi, fosse minore di ogni quantità assegnata. In tal caso però $\log M(t)$ non diverrebbe infinita quando si facesse astrazione degli incrementi afeliaci (e cioè degli incrementi subiti in un insieme di densità relativa inferiore ad ϵ) e quindi non tenderebbe regolarmente all'infinito, il che è contro l'ipotesi. Dunque si ha $L = 0$.

9. In tal modo, il teorema già dato nella nostra citata Nota per l'equazione [1] e [2] – e cioè per forze attrattive proporzionali alla distanza – viene esteso all'equazione [19] e cioè al caso dell'attrazione newtoniana; estensione importante nella Meccanica Celeste, specialmente per lo studio del « Problema dei due corpi di masse variabili ».

Osserviamo che la condizione aggiunta – e cioè che M non solo divenga infinita, ma lo divenga di ordine *non inferiore* al primo – non figura nel caso di forze proporzionali alla distanza, mentre è invece necessaria nel caso dell'attrazione newtoniana, giacchè altrimenti – come io dimostrai nei citati lavori sul problema delle masse variabili – $r(t)$ potrebbe anche tendere all'infinito. Ma tale condizione può omettersi, nel caso in cui l'orbita osculatrice *iniziale* di P è *ellittica* (e cioè quando il valore iniziale dell'energia dato da $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2M(t)}{r} \right]_{t=0}$ è negativo; vale a dire quando si ha $b^2 + \frac{c^2}{a^2} < \frac{2M(0)}{a}$), giacchè allora – come pure dimostrammo in altre Note Lincee – P rimane sempre nell'interno o sulla periferia di questa ellisse e quindi $r(t)$ è necessariamente limitato. In tal caso quindi basta semplicemente che $\log(M(t))$ tenda regolarmente all'infinito.

Vedremo come il teorema possa estendersi anche ad altre leggi e, con l'occasione, torneremo sul lemma generale secondo cui il rapporto $T_1 : T_2$ tra intervalli afeliaci e non afeliaci tende a zero con σ .

Astronomia. — *Sopra un gruppo di problemi astronomici connessi con quello della rotazione galattica.* — *La soluzione rigorosa in base ad un nuovo postulato.* Nota ⁽¹⁾ di VITTORIO NOBILE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — In una Nota recentissima ⁽²⁾ sul medesimo argomento della presente ho fatto rilevare come quattro fra i più approfonditi problemi della moderna astronomia e cioè quelli:

- a) della rotazione del triedro a cui si riferiscono le posizioni stellari delle varie epoche (triedro intermediario),
- b) della determinazione dei moti propri stellari,
- c) del cosiddetto moto proprio solare,
- d) della rotazione galattica,

costituiscono in realtà un problema *unico* il quale è indeterminato.

È da questa constatazione che bisogna oramai partire prima di accingersi ad affrontare con nuovi tentativi qualcuno dei problemi parziali anzidetti ed è sulla medesima premessa che si fonda la conclusione con cui termina la mia Nota precedente: che sia vano attendere risultati definitivi da ulteriori studi sui detti problemi finchè non si introduca un dato nuovo sotto forma di postulato.

Notiamo intanto che i due problemi a) e b) sono quelli che hanno importanza veramente decisiva ai fini della conoscenza della deformazione del sistema galattico: conoscenza alla quale non può pervenirsi attraverso un processo semi-teorico basato su analogie fisiche, come si è finora creduto da parte di taluni autori. Notiamo pure che, supposte conosciute le componenti p, q, r della rotazione assoluta Ω del triedro intermediario T_t per un'epoca assegnata t_0 , i moti propri nell'ammasso delle varie stelle sarebbero senz'altro rigorosamente determinati. Infatti

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 febbraio 1943—XXI.

⁽²⁾ Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica. « Rendiconti della R. Accademia d'Italia », serie 7^a, vol. IV, fasc. 7.

detti v_i e v_0 i vettori delle velocità assolute di S_i e di O , le proiezioni, sugli assi di T'_i , del vettore $v_i - v_0$, ossia

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{ix} - v_{0x} = \dot{x}_i + qz_i - ry_i \\ v_{iy} - v_{0y} = \dot{y}_i + rx_i - pz_i \\ v_{iz} - v_{0z} = \dot{z}_i + py_i - qx_i \end{array} \right.$$

coincidono con le componenti della velocità relativa di S_i rispetto ad un triedro \mathcal{E}_i di origine O e di orientamento invariabile, che è quello con cui viene a coincidere T'_i al tempo t_0 .

Le equazioni [1], nelle quali si possono considerare le $x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ come note dalle osservazioni ⁽¹⁾, formano, quando si considerino n stelle, un sistema che è anch'esso indeterminato finchè Ω sia ignota, *ma ci danno subito i moti propri quando p, q, r siano conoscibili per altra via.*

Quest'altra via non può essere quella battuta dagli astronomi in passato, la quale ci riporterebbe ad urtare contro l'indeterminato o a cadere nell'empirismo. Essa è invece segnata dal postulato cui innanzi accennavo, il quale nella sua forma più semplice, afferma l'evanescenza del gradiente del potenziale galattico e in forma più completa identifica quel potenziale con quello di un ellissoide di rotazione stratificato omogeneamente (ipotesi da intendersi valida per intervalli di tempo che includono quelli lungo i quali si dispone di osservazioni astronomiche di precisione — ciò che assicura la conoscenza rigorosa dell'atto di moto del sistema galattico per l'epoca media — ma non per intervalli dell'ordine di grandezza dei periodi delle rivoluzioni orbitali delle stelle).

2. — È facile rendersi conto come quel postulato possa bastare ad assicurare la conoscenza della rotazione assoluta Ω del triedro intermedio ⁽²⁾.

(¹) Naturalmente ai fini della attuazione pratica si sceglieranno coordinate polari; si presenta così il problema della determinazione delle distanze che qui però consideriamo come risoluto, perchè esso rientra (come ho accennato nella Nota precedente e come qui sarà rilevato di nuovo più innanzi) nel problema della determinazione di Ω . Le componenti radiali delle velocità relative si suppongono misurate direttamente.

(²) Come è noto, la dinamica newtoniana, la quale nel suo assetto definitivo esclude la possibilità di definire moti traslatori assoluti, implica l'esistenza di un assoluto per le rotazioni. Un qualunque triedro i cui assi rimangano paralleli a quelli di un triedro inerziale ha, per definizione, una rotazione nulla ed ogni rotazione relativa ad un siffatto triedro è assoluta. Questa concezione ristretta e convenzionale dell'assoluto basta, come è noto, per una costruzione logica della dina-

Detti S''_{ai} , O''_a i vettori delle accelerazioni assolute della stella S_i e dell'origine O (innanzi definita) e, rispettivamente, S'_{ri} , S''_{ri} quelli della velocità e dell'accelerazione relative di S_i rispetto a T_i , si ha dalla cinematica

$$[2] \quad S''_{ai} - O''_a = \beta (S_i - O) + 2 \Omega \wedge S'_{ri} + S''_{ri}$$

dove β sta a rappresentare l'operatore lineare (omografia)

$$\beta = H(\Omega, \Omega) - \Omega^2 + \Omega' \wedge$$

e H la diade $H(\Omega, \Omega)x = \Omega \times x \cdot \Omega$.

L'espressione che figura nel secondo membro della [2] lascia già intuire la possibilità di far dipendere la conoscenza di Ω e Ω' dai soli dati di osservazione inerenti alla posizione e al moto *relativi* di S_i rispetto a T_i , qualora riesca possibile costruire una teoria approssimata che permetta di definire il vettore del primo membro in funzione di $S_i - O$ e che involga un numero ristretto di costanti.

Tale teoria è niente altro che quella del potenziale galattico per un punto interno all'ellissoide che supporremo limitare l'ammasso: teoria semplificata, naturalmente, data la quasi evanescenza del gradiente di quel potenziale. Potremo infatti, in base alle conoscenze che abbiamo sulla distribuzione della materia stellare nell'ammasso, identificare, con sufficiente approssimazione, il campo gravitazionale galattico con quello di un'ellissoide, nell'interno del quale la materia stellare, estremamente rarefatta, sia distribuita in strati omogenei infinitamente sottili compresi fra ellissoidi omotetici a quello dato, con densità decrescente da strato a

mica, la quale tuttavia non ha bisogno di *operare* sopra i triedri inerziali ma solo di postularne l'esistenza, dopo di che non considera più altro che rotazioni *relative*. Ciò vale pure per l'astronomia dinamica, la quale però deve, dopo costruite le sue teorie, determinare numericamente mediante le osservazioni le costanti di integrazione. Occorre dunque che essa *indichi* i riferimenti assoluti dei quali si avvale e faccia pertanto un passo di più verso il concreto, senza che l'astronomo abbia con questo la pretesa (né la necessità) di assurgere ad una concezione più alta e forse irraggiungibile dell'assoluto.

Questo breve richiamo è opportuno affinché risulti ben chiaro, anche fuori della cerchia dei cultori dell'astronomia, che è appunto alla necessità di assicurare questo ulteriore passo dell'astronomo che risponde il nuovo postulato e perchè si noti inoltre *come* la soluzione, quasi del tutto rigorosa, del problema del riferimento che viene così ad ottenersi non si fondi nè sulla ideologia delle « stelle fisse » (nelle quali crede tuttora qualche teorico della meccanica) nè sui procedimenti ideati e praticati dagli astronomi dopo la constatazione della inesistenza di quelle stelle.

strato col crescere della distanza dal centro. In dipendenza da questa ipotesi e in base a note teorie la funzione potenziale V potrà esprimersi con una serie nella quale, quando si attribuisca all'equazione dell'ellissoide la forma canonica, figureranno solo le potenze pari delle tre coordinate e si potrà allora arrestare lo sviluppo ai termini quadratici, quando le coordinate del punto considerato rispetto alla terna degli assi dell'ellissoide siano relativamente piccole rispetto ai semi-assi.

Avremo allora, detto V_i il potenziale in S_i del sistema ottenuto togliendo da quello totale la massa di S_i e con W_0 l'analogha funzione ottenuta per il punto O e calcolata in esso:

$$S''_{ai} = \text{grad } V_i \quad , \quad O''_a = \text{grad } W_0.$$

Data la piccolezza delle masse di S_i e di O (sistema solare) rispetto a quella totale dell'ammasso, si potrà confondere V con W e porre (poichè il polinomio V è quadratico ed omogeneo):

$$S''_{ai} = \alpha (S_i - C) \quad , \quad O''_a = \alpha (O - C)$$

essendo C il centro dell'ellissoide galattico ed α una particolare omografia vettoriale (dilatazione). Segue allora:

$$S''_{ai} - O''_a = \alpha (S_i - O).$$

Le componenti di $S''_{ai} - O''_a$ rispetto al triedro T_i saranno dunque date in funzione di quelle di $S_i - O$ da una sostituzione lineare a determinante simmetrico, per cui si introdurranno sei parametri i quali dovranno esser considerati come costanti se il triedro T_i si suppone, come intendiamo fatto, collegato direttamente a determinate stelle (cfr. Nota citata pag. 229). Si deduce allora dalla equazione [2], attraverso] una opportuna disposizione del calcolo, una terna di equazioni scalari per ciascuna stella S_i : equazioni (qui non trascritte) ⁽¹⁾ le quali contengono, oltre alle componenti p, q, r di \mathfrak{L} , alle derivate di queste rispetto al tempo e ai sei parametri che definiscono l'omografia α , il raggio vettore ρ_i della S_i e le sue derivate prime e seconde $\dot{\rho}_i$ e $\ddot{\rho}_i$ rispetto al tempo. Essendo quelle equazioni lineari ed omogenee rispetto a queste ultime incognite, la condizione perchè esse siano verificate da valori non tutti nulli delle medesime si scrive:

$$[3] \quad [(\beta - \alpha)s + 2\mathfrak{L} \wedge s' + s''] \wedge (\mathfrak{L} \wedge s + s') \times s = 0$$

e fa dipendere la determinazione delle sei costanti che caratterizzano l'omografia e delle componenti di \mathfrak{L} e \mathfrak{L}' da soli dati di osservazione

⁽¹⁾ Cfr. *Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico*. (« Memorie della Società astronomica italiana »: Nuova Serie, Vol. IV).

corrispondenti a direzione e movimento delle stelle *rispetto al triedro intermedio* T_i e cioè dal versore (direzione) di S_i , ossia $s(\alpha, \beta, \gamma)$, e dalle derivate prime e seconde di esso cioè $s'(\alpha', \beta', \gamma')$ e $s''(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ⁽¹⁾.

La forma delle equazioni si semplifica notevolmente in seguito a considerazioni svolte nella mia Memoria fondamentale citata (*Postulati*, ecc.), considerazioni che qui è superfluo ripetere. Essa assume la forma definitiva:

$$[4] \quad (3 s'^2 \cdot s + s'') \times \Omega - \Omega' \times s' - \Delta = H,$$

dove è

$$\Delta = s'' \wedge s' \times s = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

e dove λ, μ, ν sono le componenti di αs , le quali debbono intendersi dipendenti dai sei parametri caratteristici dell'omografia.

Le equazioni di questa forma semplificata (una per ciascuna stella) sono lineari nelle componenti di Ω e Ω' e nei sei parametri predetti. Le incognite sono dunque *dodici*, se si vuole tener conto del potenziale galattico. Se invece, come può sembrare opportuno in un primo saggio, si trascurano le gravitazioni stellari, il problema si semplifica, perchè allora svaniscono λ, μ, ν e quindi le sei ultime incognite. Si ha dunque $H = 0$ e basteranno, teoricamente, *sei* stelle per la risoluzione rigorosa del problema (naturalmente converrà considerarne un numero maggiore e costruire le sei equazioni normali).

Conosciuti Ω e Ω' , un ritorno alle tre equazioni omogenee in $\rho_i, \dot{\rho}_i, \ddot{\rho}_i$ conduce alla determinazione numerica, per ciascuna stella, dei rapporti $\rho_i/\dot{\rho}_i$ e $\ddot{\rho}_i/\dot{\rho}_i$, cosicchè, quando alle osservazioni di posizione siano associate le determinazioni spettroscopiche delle velocità radiali $\dot{\rho}$, *si perverrà alla conoscenza delle distanze stellari ρ_i e delle variabili accessorie $\ddot{\rho}_i$, con metodo rigoroso*. I laboriosi e insufficienti metodi trigonometrici per per la determinazione delle parallassi stellari e gli incerti metodi fisici potranno così essere abbandonati e sostituiti da un procedimento uniforme, il quale si inserisce nel modo più naturale e più armonico in quello generale pel riferimento e per la determinazione dei moti propri stellari e garantisce, d'altra parte, i più sicuri risultati, dato l'alto grado di precisione attualmente raggiungibile nella misura delle velocità radiali.

3. — I problemi così risolti completamente in seguito alla determinazione di Ω sono quelli dei quali l'importanza è veramente essenziale

⁽¹⁾ In pratica converrà esprimere i coseni di direzione α, β e γ in funzione di due sole coordinate angolari.

per la conoscenza del moto delle stelle nell'interno dell'ammasso galattico. Per giungere a tale conoscenza non abbiamo bisogno, infatti, col procedimento adoperato, di altro che dei concetti di posizione e di moto delle stelle rispetto ad un triedro di orientamento invariabile avente origine nel Sole (o nel centro di massa del sistema solare) e tale scopo è pienamente raggiunto. Il tentativo, nel quale molti astronomi tuttora persistono, di distinguere e di scindere in questo moto relativo la parte «dovuta al Sole» da quella «dovuta alle stelle» è intrinsecamente privo di senso. La questione può bensì, come abbiamo visto, acquistare un senso per effetto di una convenzione, ma *tale convenzione è del tutto inutile*.

Il problema del moto proprio solare può dunque essere senza inconvenienti abbandonato.

In quanto al problema *d*), ossia quello della rotazione della Galassia o di parte di questa, esso si scinde del tutto dai problemi *a*) e *b*) appena questi siano risolti per via diretta in base al nuovo postulato. Una volta accettato l'insieme delle convenzioni che permettono di enunciare il problema in questione — cioè quelle convenzioni che occorrono per definire la rotazione galattica e che sono state discusse nella Nota già citata in principio — e accettato inoltre il concetto di moto proprio solare, la rotazione predetta viene a dipendere dalle equazioni (già indicate) del tipo

$$[5] \quad u_i = \tau + S'_{ri} - (\bar{\Omega} - \Omega) \wedge (S_i - O),$$

nelle quali bisognerà ora considerare Ω come nota. La $\bar{\Omega}$ risulta pertanto *isolata*, ma non conosciuta, perchè permane la indeterminatezza già rilevata del problema e l'ostacolo non può superarsi se non col ricorrere a procedimenti già esaminati nella Nota I qui citata e che implicano ipotesi inammissibili nelle ricerche in questione.

Il nuovo postulato che assicura la risoluzione dei problemi *a*) e *b*) non può dunque, come era prevedibile, portare, nel caso del problema *a*) (rotazione galattica), a superare difficoltà che derivano da insufficiente definizione del problema. Se a questa considerazione si aggiunge quella, già formulata, della non riconoscibile utilità del problema stesso, in quanto che rotazioni d'insieme anche parziali sembrano dal punto di vista dinamico estremamente improbabili e che una rappresentazione approssimata su tale schema non avrebbe — comunque ottenuta — carattere di univocità nè significato dinamico, sembra lecito concludere che sia opportuno, al fine di pervenire ad una conoscenza precisa sulla coordinazione dei moti propri, attendere che si possa disporre di nuovi e più precisi dati di osservazione quali sicuramente dovranno ottenersi e in base alla radicale riforma di metodo di cui ho dimostrato la possibilità e l'assoluta necessità.

Geofisica (Sismologia). — *Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette.* Nota di PIETRO CALOI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

In tutti i metodi di calcolo per la determinazione delle coordinate spaziali di un ipocentro di terremoto ad origine vicina, la velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette è ritenuta costante. Questa ipotesi si può considerare valevole per la quasi totalità degli scopi che si possono perseguire nello studio di terremoti vicini.

Però nella determinazione della profondità ipocentrale, il fatto di ritenere costante la velocità di propagazione può condurre spesso a risultati illusori. La velocità di propagazione delle onde *Pg* ed *Sg* non è, in realtà, costante. In una data zona, essa varia con la profondità; varia inoltre in senso orizzontale, da zona a zona.

G. SCHMERWITZ, ha ideato, di recente, un metodo in cui considera incognite, oltre al tempo origine e alle coordinate ipocentrali, pure la velocità delle onde *Pg* (oppure *Sg*, a seconda che ci si vale dei tempi di registrazione dell'uno o dell'altro tipo d'onda).

I risultati ottenuti con i metodi basati sui tempi di registrazione di un solo tipo d'onda risentono sempre degli inevitabili errori derivanti da imperfetta correzione dell'ora. Allo scopo di prescindere da questi errori che possono spesso infirmare i risultati del calcolo, ho ritenuto opportuno escogitare un metodo che sfrutti le *differenze* dei tempi di registrazione delle onde *Sg* e *Pg*, pur conservando incognite, oltre alle coordinate ipocentrali, anche le velocità di propagazione delle onde stesse.

Indichiamo con t_1 , t_2 rispettivamente i tempi di registrazione delle onde *Pg*, *Sg* in una stazione assegnata; la distanza dell'ipocentro da detta stazione può essere espressa da

$$k(t_2 - t_1),$$

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

se k ha il valore

$$k = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 - v_2},$$

v_1, v_2 esprimendo le velocità medie di propagazione delle onde Pg, Sg .

Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate spaziali dell'ipocentro e x_i, y_i, z_i le analoghe coordinate di una generica stazione S_i , riferite alla medesima origine. La coordinata z_i , che esprime l'altezza della stazione sul livello del mare, è trascurabile rispetto alle grandezze in giuoco; pertanto, la riterremo uguale a zero.

È quindi, in generale,

$$k^2 (t_2 - t_1)_i^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Poniamo

$$\Phi_i = \frac{1}{k} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + z_0^2} - (t_2 - t_1)_i.$$

Dovrà essere

$$\Phi_i = \Phi_i(x_0, y_0, z_0, k) = 0.$$

Se il numero delle equazioni supera quello delle incognite, e se indichiamo con $(x_0), (y_0), (z_0), (k)$ un sistema di valori approssimati per le incognite, possiamo porre

$$x_0 = (x_0) + x \quad ; \quad y_0 = (y_0) + y \quad ; \quad z_0 = (z_0) + z \quad ; \quad k = (k) + k_1,$$

dove x, y, z, k_1 rappresentano le correzioni incognite.

Avremo, limitando lo sviluppo di Φ_i in serie di TAYLOR al primo termine,

$$\Phi_i = \Phi_i(0) + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (x_0)} x + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (y_0)} y + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (z_0)} z + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (k)} k_1,$$

dove

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (x_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(x_0) - x_i}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = a_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (y_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(y_0) - y_i}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = b_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (z_0)} = \frac{1}{(k)} \frac{(z_0)}{\sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2}} = c_i$$

$$\frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial (k)} = -\frac{1}{(k^2)} \sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2} = d_i$$

$$\Phi_i(0) = \frac{1}{(k)} \sqrt{(x_i - (x_0))^2 + (y_i - (y_0))^2 + (z_0)^2} - (t_2 - t_1)_i = l_i$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Le equazioni da risolvere divengono quindi:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i k_i + l_i = v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in cui i secondi membri rappresentano i residui dovuti alle osservazioni.

Il verificarsi della condizione di minimo per la somma dei quadrati dei residui - funzione di x, y, z, k_i - conduce al sistema di equazioni normali, sotto la forma loro assegnata da GAUSS:

$$\begin{aligned} [aa] \cdot x + [ab] \cdot y + [ac] \cdot z + [ad] \cdot k_i + [al] &= 0 \\ [ab] \cdot x + [bb] \cdot y + [bc] \cdot z + [bd] \cdot k_i + [bl] &= 0 \\ [ac] \cdot x + [bc] \cdot y + [cc] \cdot z + [cd] \cdot k_i + [cl] &= 0 \\ [ad] \cdot x + [bd] \cdot y + [cd] \cdot z + [dd] \cdot k_i + [dl] &= 0. \end{aligned}$$

La soluzione del sistema di equazioni normali conduce alle equazioni finali:

$$\begin{aligned} [aa] \cdot x + [ab] \cdot y + [ac] \cdot z + [ad] \cdot k_i + [al] &= 0 \\ [bb. 1] \cdot y + [bc. 1] \cdot z + [bd. 1] \cdot k_i + [bl. 1] &= 0 \\ [cc. 2] \cdot z + [cd. 2] \cdot k_i + [cl. 2] &= 0 \\ [dd. 3] \cdot k_i + [dl. 3] &= 0 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} [bb. 1] &= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] & [cc. 2] &= [cc. 1] - \frac{[bc. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bc. 1] \\ [bc. 1] &= [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] & [cd. 2] &= [cd. 1] - \frac{[bc. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bd. 1] \\ [bd. 1] &= [bd] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ad] & [cl. 2] &= [cl. 1] - \frac{[bc. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bl. 1] \\ [bl. 1] &= [bl] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [al] \\ [cc. 1] &= [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [ac] & [dd. 2] &= [dd. 1] - \frac{[bd. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bd. 1] \\ [cd. 1] &= [cd] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [ad] & [dl. 2] &= [dl. 1] - \frac{[bd. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bl. 1] \\ [cl. 1] &= [cl] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [al] \\ [dd. 1] &= [dd] - \frac{[ad]}{[aa]} \cdot [ad] & [dd. 3] &= [dd. 2] - \frac{[cd. 2]}{[cc. 2]} \cdot [cd. 2] \\ [dl. 1] &= [dl] - \frac{[ad]}{[aa]} \cdot [al] & [dl. 3] &= [dl. 2] - \frac{[cd. 2]}{[cc. 2]} \cdot [cl. 2]. \end{aligned}$$

È bene calcolare, come verifica, anche lo schema [ll. 4], in quanto esso, com'è noto dalla teoria degli errori, se i calcoli sono esatti deve uguagliare la somma dei quadrati degli errori [vv]. Si ha:

$$\begin{aligned} [ll. 1] &= [ll] - \frac{[al]}{[aa]} \cdot [al] & [ll. 3] &= [ll. 2] - \frac{[cl. 2]}{[cc. 2]} \cdot [cl. 2] \\ [ll. 2] &= [ll. 1] - \frac{[bl. 1]}{[bb. 1]} \cdot [bl. 1] & [ll. 4] &= [ll. 3] - \frac{[dl. 3]}{[dd. 3]} \cdot [dl. 3]. \end{aligned}$$

Indicando con ε , m_x , m_y , m_z , m_{k_i} rispettivamente l'errore medio dell'unità di peso e gli errori medi dei valori più probabili delle incognite, si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \pm \sqrt{\frac{[ll. 4]}{n-4}} \quad ; \quad m_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[aa. 3]}} \quad ; \quad m_y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[bb. 3]}} \quad ; \\ m_z &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{[cc. 3]}} \quad ; \quad m_{k_i} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{[dd. 3]}}. \end{aligned}$$

Per determinare $[aa. 3]$, $[bb. 3]$, $[cc. 3]$ basta ordinare i sistemi di equazioni normali partendo rispettivamente dalle equazioni.

$$\begin{aligned} d_i k_i + c_i z + b_i y + a_i x &= v_i \quad , \quad d_i k_i + c_i z + a_i x + b_i y = v_i \quad , \\ a_i x + b_i y + d_i k_i + c_i z &= v_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Dalle applicazioni già fatte del metodo sopra esposto sono pervenuto a risultati particolarmente interessanti specie sull'andamento del fattore k - e, quindi, delle velocità di propagazione - al variare della profondità. Detti risultati formeranno l'argomento di una prossima Nota.

È facile vedere che la funzione delle variabili θ_i

$$[5] \quad \varphi(\gamma) = \int \frac{d\gamma}{\sin^{n-1} \gamma}$$

è armonica su H . Si esegua infatti una trasformazione di coordinate dalle x_i alle x'_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$, tale che l'asse x'_{n+1} passi per il punto M_0 . Le nuove coordinate sferiche del punto M saranno $\gamma, \theta_2, \dots, \theta'_n$. Le variabili $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ saranno funzioni uniformi delle variabili $\gamma, \theta'_2, \dots, \theta'_n$, con eccezione per il polo opposto. Poichè il parametro $\Delta_2 u$ di BELTRAMI è invariante, l'equazione [4] si trasforma nella

$$\Delta_2 u = \frac{R^{n-2}}{K'} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin^{n-1} \gamma \sin^{n-2} \theta'_2 \dots \sin \theta'_{n-1} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) + \dots = 0,$$

e si vede subito che la funzione $\varphi(\gamma)$ soddisfa quest'ultima equazione.

Si dimostra facilmente che la misura della sfera $\gamma = \text{cost}$ è uguale a $c_n R^{n-1} \sin^{n-1} \gamma$, dove

$$[6] \quad c_n = 2 \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Sia allora E una varietà chiusa ad $n-1$ dimensioni immersa in H , con ipertangente determinato in ogni suo punto. Sia M_0 un punto arbitrario di H , ma interno ad E . Applicando la formula di GREEN-BELTRAMI alla regione delimitata da E e da una piccola sfera intorno ad M_0 , e facendo quindi tendere a zero il raggio della sfera, si ottiene la formula

$$[7] \quad u(M_0) = \frac{1}{c_n R^{n-2}} \int_E \left[\varphi(\gamma) \frac{\partial u}{\partial n_1} - u \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial n_1} \right] d\omega,$$

dove u è una funzione armonica regolare su H ed n_1 la normale ad E diretta verso l'interno. Se E è l'ipersfera $\gamma = \text{cost}$ si ha la formula

$$[8] \quad u(M_0) = \frac{1}{c_n R^{n-1} \sin^{n-1} \gamma} \int_E u d\omega.$$

Sia $g(M)$ la funzione armonica regolare all'interno di E , che prende su E i valori di $\varphi(\gamma)$, essendo γ l'angolo di OM e OM_0 , ed M_0 situato nell'interno di E . La funzione $G = g - \varphi(\gamma)$ è armonica regolare dentro E , eccezion fatta per il punto M_0 , e si annulla sopra E . È la funzione di GREEN. Allora dalla [7] si ottiene la formula

$$u(M_0) = \frac{1}{c_n R^{n-2}} \int_E u \frac{\partial G}{\partial n_1} d\omega,$$

per ogni funzione armonica u regolare entro E .

Sia $\mu(M)$ una funzione integrabile su E . L'integrale

$$U(M_0) = \int_E \mu(M) \varphi(\gamma) d\omega$$

rappresenta il potenziale di semplice strato. Esso è continuo all'esterno di E , e, se $\mu(M)$ è continua, $U(M_0)$ resta continuo anche quando M_0 traversa l'ipersuperficie E . L'integrale

$$V(M_0) = \int_E \mu(M) \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial n_1} d\omega$$

è il potenziale di doppio strato. I due potenziali soddisfanno, nelle variabili $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0$, l'equazione [4] di BELTRAMI. Servendosi di una piccola ipersfera di centro M_0 si vede che

$$\int_E \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial n_1} d\omega = -c_n R^{n-2},$$

se M_0 è situato all'interno di E . Nello stesso modo, servendosi di una semi-ipersfera il cui raggio tenda a zero, si ottiene

$$\int_E \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial n_1} d\omega = -\frac{c_n}{2} R^{n-2},$$

se il punto M_0 si trova sopra E . Infine l'integrale stesso è evidentemente uguale a zero se M_0 è all'esterno di E .

Sia allora M' un punto di E , nel cui intorno la funzione $\mu(M)$ sia continua. Si dimostra facilmente che la funzione

$$V(M_0) - \mu(M') \int_E \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial n_1} d\omega$$

è continua quando il punto M_0 traversa E in M' . Allora $V(M_0)$ tende verso il limite $V_i(M')$ quando M_0 si avvicina ad M' dall'interno di E e verso il limite $V_e(M')$ quando si avvicina ad M' dall'esterno di E . Indicando con V' il valore di $V(M_0)$ nel punto M' si avranno le relazioni

$$V_i(M') = V' - \frac{1}{2} c_n R^{n-2} \mu(M'), \quad V_e(M') = V' + \frac{1}{2} c_n R^{n-2} \mu(M'),$$

che ci danno il mezzo di risolvere il problema di DIRICHLET.

Si vede facilmente che i risultati ottenuti restano validi per gli spazi ad n dimensioni a curvatura costante R^2 o $-R^2$ (R reale), quando si sostituisca γ con $\frac{d}{R}$ essendo d la distanza geodetica dei due punti M_0 ed M' . Nel caso iperbolico bisogna inoltre sostituire le funzioni trigonometriche con le funzioni iperboliche.

I risultati ottenuti possono anche generalizzarsi ad uno spazio ad n dimensioni qualunque. Sulla base della teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali si può dimostrare che esistono funzioni armoniche regolari in un dominio D , salvo che in un punto M_0 di D esse divergono infinite come $\frac{1}{d^{n-2}}$ per $n > 2$, o come $\log d$ per $n = 2$, essendo d la distanza geodetica da M_0 . Queste funzioni fanno le veci della funzione $\varphi(\gamma)$.

Paleontologia. — *Sull' « Eridanosaurus Brambillae » Bals. Criv.* Nota di ALFREDO BONI, presentata ⁽¹⁾ da PAOLO VINASSA DE REGNY, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella seduta del 5 settembre della prima riunione straordinaria dei Naturalisti italiani, tenutasi in Biella nel 1864 sotto la presidenza di QUINTINO SELLA, BALSAMO CRIVELLI presentava una vertebra rinvenuta dal cav. BRAMBILLA tra Portalbera e Arena Po (Pavia) (1). Di questo fossile faceva cenno anche nelle *Notizie naturali e chimico-agronomiche sulla provincia di Pavia* (2).

Il BALSAMO-CRIVELLI riconobbe che si trattava di una vertebra opistocela e la ritenne appartenente alla regione anteriore del tronco di un cocodrillo, pensando « che realmente essa debba spettare ad essere della famiglia de' cocodrillidi, e probabilmente ad un nuovo genere che io propongo provvisoriamente darci il nome di *Eridanosaurus*, denominando la specie del nome di chi la ritrovò, cioè il sig. Brambilla ».

Tale fossile è citato da V. CARUS coll'osservazione « ob hieher gehörig? » e la citazione è riportata da TOULA e KAIL (3).

LIOY nella sua Nota sui cocodrilli fossili del Veneto (4, pag. 774 [22]) considera anche questo fossile osservando: « Codesta vertebra non poteva essere che discesa nelle ghiaie plioceniche del Po da sedimenti mesozoici delle Alpi, di cocodrilli pliocenici infatti, ch'io sappia, non si conoscono che il *Leptorhynchus Clifti* e il *Cr. Clifti* di DE MEYER, entrambi delle rocce d'Irawada in Birmania ».

Non mi sembrano esistere ulteriori citazioni del fossile se non quella del PATRINI nel suo catalogo de *I mammiferi fossili di Arena-Po* (5, pag. 56).

Il fossile è conservato nelle collezioni del Museo dell'Istituto di Geologia della R. Università di Pavia coll'etichetta (originale del BALSAMO-CRIVELLI!) « (*Eridanosaurus Brambillae* 1863 Balsamo) Originale e modello Portalbera — donò cav. BRAMBILLA — Portalbera ».

(1) Nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

Mi sembra che questa vertebra meriti di essere ridescritta: il BALSAMO-CRIVELLI infatti, più che una descrizione, ne ha dato delle misure, non tutte del resto molto chiare. Il fossile è nel complesso ben conservato. Il BALSAMO-CRIVELLI afferma che fu trovato avvolto da argilla ferruginosa « ed a ciò devesi attribuire forse la sua conservazione ». Il PATRINI dice che è completamente pietrificato. Senza dubbio il grado di pietrificazione è notevole, come del resto è di molti fossili di Arena-Po; esso non è



Fig. 1.

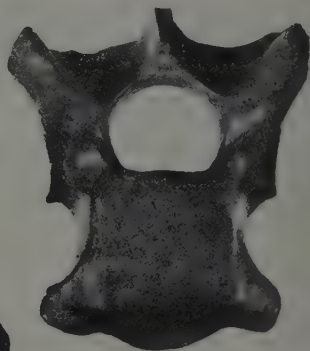


Fig. 2.



Fig. 3.

Fig. 1. - La vertebra di Portalbera (Pavia): visione posteriore ($\frac{1}{2}$ circa della grandezza naturale).

Fig. 2. - La stessa: visione anteriore ($\frac{1}{2}$ circa della grandezza naturale).

Fig. 3. - La stessa: di fianco ($\frac{1}{2}$ circa della grandezza naturale).

però certamente quello che, pur con una certa variabilità, si può riscontrare nelle ossa dei rettili mesozoici. Qui infatti è ben evidente, nelle porzioni corrose, la struttura spugnosa dell'osso. Dove la superficie non è erosa essa appare liscia ed anche un po' lucida. Spezzata alla base è l'apofisi spinosa. Le altre parti sono tutte presenti; solo alcune sono in qualche punto un po' corrose.

La natura *opistocela* della vertebra - che tanta importanza avrà per la determinazione dell'animale cui essa appartenne - si può stabi-

lire con sicurezza dalle caratteristiche delle superfici articolari (che sono piane) delle zigapofisi. Due sono rivolte all'insù e medialmente e pertanto debbono essere le anteriori; le altre due sono rivolte all'ingiù e distalmente: sono le posteriori. Alle prime corrisponde la porzione convessa del corpo, alle seconde la porzione concava.

La massima altezza nel piano mediale della porzione attualmente conservata della vertebra è di mm. 123. Non si può presumere quale essa dovesse essere originariamente perchè non è possibile farsi un'idea della lunghezza dell'apofisi spinosa. La massima larghezza, che corrisponde alle prezigapofisi, è di mm. 98. La vertebra è dunque piuttosto grossa. La sua struttura è relativamente semplice. Il corpo della vertebra ha nel complesso forma parallelepipeda allungata, con superficie superiore leggermente scavata, superfici laterali pure leggermente scavate a doccia,

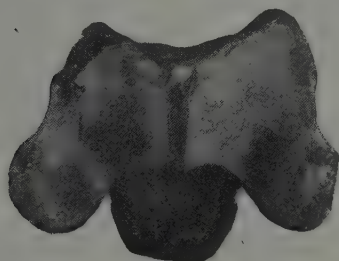


Fig. 4.

Fig. 4. - La vertebra di Portalbera: dall'alto ($\frac{1}{2}$ circa della grandezza naturale).

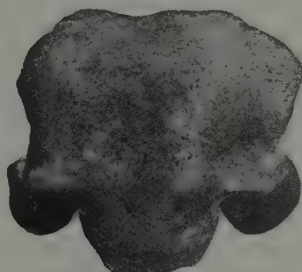


Fig. 5.

Fig. 5. - La stessa: superficie inferiore ($\frac{1}{2}$ circa della grandezza naturale).

superficie inferiore nel complesso piana, soltanto un po' rilevata al centro. La terminazione anteriore è corrosa così che non si può stabilire con sicurezza la forma della porzione articolare; nel complesso sembra tondeggiante, un po' allungata in senso verticale, più prominente superiormente. Molto caratteristica è la superficie posteriore che è profondamente scavata a semisfera con un diametro verticale di mm. 65 ed uno trasverso di mm. 59; la profondità del cavo articolare sembra essere di mm. 23; il margine di questa conca è rilevato e in alto e in basso sorge un po' sul corpo della vertebra che pertanto appare più grosso posteriormente che anteriormente.

Lunghezza del corpo della vertebra (dal margine della protuberanza articolare anteriore al margine della cavità posteriore) mm. 23;

altezza della protuberanza articolare anteriore mm. 50;

larghezza della protuberanza articolare anteriore mm. 43;

altezza del corpo della vertebra nella porzione centrale mm. 42;

larghezza del corpo della vertebra nella porzione centrale mm. 57.

Si può notare come ci sia una forte sproporzione fra la superficie articolare anteriore convessa e quella posteriore concava: quest'ultima è molto più grande: la vertebra seguente doveva avere una superficie articolare molto più sviluppata. Robusto è l'arco vertebrale, la cui superficie superiore degrada all'avanti; le superfici articolari delle preapofisi sono ellittiche allungate verso l'alto (mm. 20 × 32). La radice dell'apofisi spinosa è lunga mm. 32; tale apofisi doveva essere dritta o leggermente inclinata all'indietro. Le superfici articolari delle postapofisi, meno chiaramente definite, sembrano pure ellittiche allungate trasversalmente (mm. 22 × 28). Il foro vertebrale è pressoché rotondo con un diametro di mm. 34; posteriormente è un po' mascherato dal margine prominente della superficie posteriore concava del corpo vertebrale. Sui peduncoli, molto robusti, appena sopra al corpo vertebrale, si denotano due leggere apofisi crestiformi appuntite che mi sembrano rappresentare un rudimento di *diapofisi*.

Per terminare la descrizione della vertebra non mi resta che accennare alle robuste apofisi che si dipartono dal corpo nella sua porzione latero-inferiore, apofisi la cui superficie è piuttosto corrosa per cui non si può giudicare il loro sviluppo laterale: sembra però limitato. Credo che si possa dare a queste apofisi il significato morfologico di *parapofisi*.

Si possono però formulare due ipotesi:

1° le protuberanze alla base dei peduncoli dell'arco vertebrale sono rudimenti di *diapofisi* e le formazioni notate al margine latero-inferiore del corpo sono *parapofisi*;

2° le protuberanze alla base dei peduncoli dell'arco vertebrale sono neoformazioni per l'attacco di muscoli e le formazioni al margine latero-inferiore del corpo sono *pleurapofisi* imperforate spostate sensibilmente all'inghiù.

La condizione della prima ipotesi mi sembra derivabile con relativa facilità da quella tipica di una vertebra cervicale con *pleurapofisi* on ben sviluppati *foramina transversaria*, ove l'esile parete laterale del foro venga meno.

Queste apofisi sembrano semplici e corte e cioè non munite di *lamina inferiore* e di *lamina superiore*.

La superficie inferiore del corpo, pur essendo un po' corrosa sembra conservata nello stato naturale; essa risulta pertanto piana e casiderevolmente ampliata dalle suddette apofisi.

La natura *opistocela* della vertebra è quella che può guidar il tentativo di determinazione. Infatti solo in pochi gruppi di tetrapodi sono presenti vertebre opistocelae.

Dall'*Handbuch der vergleichenden Anatomie* di BOLK, ÖPPERT, KALLIUS e LUBOSCH (6) si può dedurre che:

a) fra i Rettili hanno vertebre opistocele solo i Cheloni (coda delle Cheloniidae, molte vertebre cervicali di numerose specie), i Dinosauri (soprattutto nella regione cervicale) e i Rhyncoosauri (*Hyperodapedon*);

b) fra gli uccelli hanno vertebre opistocele gli Sfenisci, i Laro-limicoli, *Phalatorax*, *Anhinga*, *Alca*, gli Psittaci;

c) nei mammiferi ci sono vertebre opistocele nella regione cervicale dei Perissodattili e dei Ruminanti. « Der Grad der Opisthocoele nimmt vom 3. bis 7. Wirbel zu und lässt sich bei den Perissodactylen bis zur Lendenregion verfolgen ».

BALSAMO-CRIVELLI, che ben riconobbe la natura opistocela della vertebra, escluse che si trattasse di un mammifero, e concluse: « Mi rimaneva quindi il sospetto che potesse spettare ai coccodrilli ».

Agli dice inoltre che « dalla celebre Memoria di OWEN sopra i rettili fossilizzati risulta che, rispetto alle vertebre, possono i coccodrilli venir compresi in tre sezioni, cioè gli *Amficeleliani*, a vertebre concavo-concave, gli *Opistoceli* a vertebre concave posteriormente, convesse anteriormente, e finalmente i *Proceliani* a vertebre in forma di coppa all'innanzi, di palle all'indietro ». Agli opistoceli appartarrebbe il gen. *Steneosaurus* GEOFF. « che comprende generi proprii sino ad ora del terreno giurese che MEYER denominò *Streptospondylus* ».

Dalla Memoria dell'OWEN (7, pag. 11) risulta in verità che « The only known Crocodilian genus of the period antecedent to the Chalk and Greensand deposits with vertebrae articulated together by ball-and-socket joints, have the position of the cup and the ball the reverse of that in the modern Crocodiles, and the genus, thus characterised by vertebrae of the 'opisthocelian' type, has accordingly been termed *Streptospondylus*, signifying 'vertebrae reversed' ». Di opistocelo ci sarebbe dunque un genere solo. *Steneosaurus* è detto posseder vertebre anficele.

ADOW (8) divide la sottoclasse *Crocodylia* in tre ordini: *Pseudosuchia*, *Parasuchia* ed *Eusuchia*. Nel primo, che comprende i generi *Aetosaurs*, *Erpetosuchus*, e *Ornithosuchus*, le vertebre sarebbero sconosciute. I *Parasuchia* (*Belodon*, *Steganocephalus*) hanno vertebre anficele. Negli *Eusuchia* giurassici le vertebre erano anficele, ma « from the Lower Chalk onward the vertebrae are procoelus, with the exception of the first caudal vertebra, which has a knob at either end so that naturally the posterior of the two sacral vertebrae is opisthocoele. This peculiar formation of the first caudal is probably correlated with the flexibility of the tail ».

STEELE-WOODWARD (9, pag. 352 e segg.) divide l'ordine dei *Crocodylia* in *Therodontia* e *Crocodylia*; ai primi appartengono gli *Eosuchia* del Permiano-Trias, i *Pelycosimia* del Trias, i *Parasuchia* del Trias e i *Pseudosuchia* del Trias. ai secondi i *Mesosuchia* con vertebre anficele o platicole del Giurassico-Cretaceo (i Teleosauridae però sopravvivono sino all'Eocene inferiore) che comprendono il genere *Steneosaurus* GEOFF., e gli

Eusuchia con vertebre presacrali procele (Cretaceo-recente). *Streptospondylus* H. VON MEYER, come sinonimo di *Megalosaurus* BUCHLAND, è posto fra i Dinosauri.

KUHN (10, pag. 87 e segg.) divide col MOOK i *Crocodilia* in *Protosuchia*, *Mesosuchia*, *Thalattosuchia* e *Eusuchia*. I primi hanno vertebre anficele; i secondi vertebre anficele o platicele, mai procele; i terzi platicele; gli *Eusuchia* hanno vertebre procele. KUHN ammette che le vertebre anficele rappresentano lo stadio primitivo che evolve progressivamente verso la procelia.

Riassumendo, negli *Eusuchia*, se le vertebre si possono dire in generale *procele*, ne esistono però tre che non lo sono: le due sacrali e la prima caudale. E lo possiamo dedurre dalla Memoria dell'OWEN stesso: « The

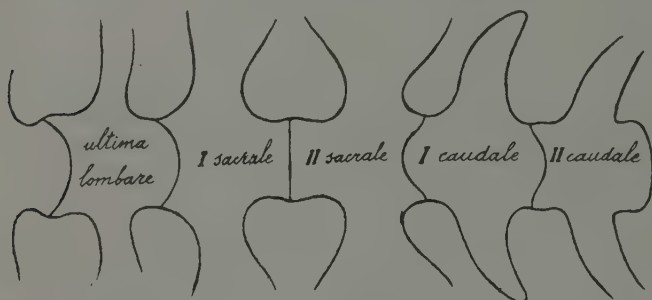


Fig. 6. — Schizzo per mostrare le articolazioni fra i corpi delle vertebre sacrali e di quelle immediatamente precedenti e susseguenti in *Alligator mississippiensis*. (Da una radiografia).

sacral vertebrae are very distinctly marked by the flatness of the coadapated ends of their centruns;... in the first the anterior surface of the centrum is concave, in the second it is the posterior surface... The first caudal vertebra, which presents a ball for articulating with a cup on the back part of the last sacral, retains, nevertheless, the typical position of the ball on the back part of the centrum; it is thus biconvex, and the only vertebra of the series which presents that structure». La prima vertebra sacrale può dirsi dunque *celoplana* (secondo la terminologia usata nell'*Handbuch der vergleichenden Anatomie*); la seconda *platicele*; la prima caudale *biconvessa*: non esistono dunque vertebre *opistocole*.

GADOW (8, pag. 438), come si è visto, usa per le due vertebre sacrali impropriamente i nomi di *procele* e *opistocole*. Queste condizioni sono rese ben evidenti dalla radiografia della regione sacro-caudale di *Alligator mississippiensis* (vedi schizzo della fig. 6).

Dunque vertebre *opistocole* non sono note per i coccodrilli viventi o fossili (*Streptospondylus* è un Dinosaurio). Per ammettere che si tratti

di vertebre di coccodrillo bisognerebbe pensare ad un sacro con condizioni particolari. Ma rispetto alle vertebre sacrali dei coccodrilli esistono anche altre differenze oltre quelle relative alla forma del corpo vertebrale. OWEN (6) nella figura 5 della sua tavola V, figura - vista dal davanti - la prima vertebra sacrale mutilata di *Crocodilus toliapicus* e nella figura 6 della tavola IX - vista dal davanti - la prima vertebra sacrale di *Crocodilus Hastingsiae*: rispetto ad ambedue risulta subito una profonda diversità di conformazione generale, la vertebra di Portalbera essendo molto più stretta ed alta; più importante è poi la differenza costituita dal fatto che nei *Crocodilus* parte dalla porzione superiore del corpo e da quella inferiore dell'arco lateralmente una robusta pleurapofisi che porta poi una ben sviluppata costa sacrale o è addirittura fusa con essa. Da OWEN (7, pag. 14) « The thick and strong tranverse processes form another characteristic of these vertebrae; for a long period the suture near their base remains to show how large a proportion is formed by the pleurapophysis. This element articulates more with the centrum than with the diapophysis developed from the neural arch ».

Nella vertebra di Portalbera invece apofisi si staccano dal corpo vertebrale soltanto verso il basso: l'arco neurale è invece libero e porta soltanto un piccolo processo (rudimento di diapofisi?). È quindi poco probabile che a questa vertebra si attaccassero delle coste sacrali. Verosimilmente non si tratta di vertebra sacrale.

Altre considerazioni poi si oppongono all'assegnazione di questa vertebra ad un coccodrillo: soprattutto quelle stratigrafiche. Portalbera ed Arena Po costituiscono infatti un tipico giacimento pleistocenico. I coccodrilli scompaiono in Europa col Pliocene. Di questa incompatibilità cronologica si era accorto il LROY, il quale però la superava, come s'è visto, ritenendo la vertebra derivata da sedimenti mesozoici delle Alpi. Ben difficile però mi sembra poter ammettere che questa vertebra provenga da un rimaneggiamento di fossili mesozoici: le sue condizioni di fossilizzazione, con limitata pietrificazione, con ben evidente struttura spugnosa, sono le stesse degli altri fossili di Arena-Po tipicamente pleistocenici e sono tali, mi sembra, da escludere senz'altro un'età mesozoica.

Che se poi, per ipotesi assurda, si dovesse ammettere l'età secondaria di tale vertebra, bisognerebbe cercare la sua collocazione non nel limitato campo dei coccodrilli dove non esistono vertebre opistocele ma in quello sterminato dei Dinosauri dove l'opistocelia è frequente.

Fra gli altri rettili viventi hanno vertebre opistocele in singole regioni i Cheloni. Ma le sole dimensioni mi sembrano sufficienti a differenziare la vertebra di Portalbera da quelle dei Cheloni. Anche fra gli uccelli nessuno di quelli con vertebre opistocele raggiunge da noi dimensioni tanto rilevanti.

E veniamo ai mammiferi. Per questi la stratigrafia sarebbe a posto. Nell'impossibilità di esaminare tutti i mammiferi per i quali è ammessa la presenza di vertebre opistocoe (perissodattili e ruminanti) mi riferirò alle specie di perissodattili e ruminanti citate per Arena Po per vedere se a qualcuna di esse può essere attribuita la vertebra in esame.

Rhinoceros (Coelodonta) Mercki JAEGER. — Vertebre attribuite a questa forma sono figurate dal BRANDT (11) (atlante, epistrofeo, IV, e V cervicale, una dorsale); il PORTIS (12) però ritiene che esse appartengano piuttosto al genere *Elasmotherium*; egli stesso poi figura epistrofeo, III, IV, V, VII cervicale di *R. Mercki*; il SIMONELLI (13) figura una VII cervicale.

Nessuna di queste figure corrisponde perfettamente all'esemplare di Portalbera; le maggiori analogie sono colla VII cervicale, la quale però presenta ben sviluppate *pleurapofisi* imperforate nella figura del PORTIS. L'ordine di grandezza delle vertebre è quello dell'esemplare di Portalbera.

Rhinoceros sp. — Nessun'altra forma di rinoceronte sembra presente nel Pleistocene italiano. Per amore di completezza si può confrontare la vertebra di Portalbera con quelle del *Rhin. (Coelodonta) antiquitatis* figurate dal BRANDT (11) [epistrofeo, III, IV, VI, VII cervicale, alcune dorsali; alcune riportandole dal CUVIER (14)]; nessuna le corrisponde perfettamente.

Equus caballus LIN. — Il confronto collo scheletro del cavallo attuale — che non differisce sostanzialmente da quello fossile di Arena Po — permette di stabilire notevoli differenze nelle dimensioni e nella conformazione generale.

Hippopotamus amphibius LIN. — La monografia del REYNOLDS (15) ci dà nella figura 3 a pagina 19 riproduzione della III, IV, V, VI, VII cervicale. A nessuna di esse può essere riferita la vertebra di Portalbera. Tutte presentano ben sviluppate apofisi trasverse con significato di *pleurapofisi*. Anche le vertebre delle altre regioni son diverse.

Megaceros euryceros ALD. — Poichè non mi sembrano esistere scheletri completi di *euryceros*, bisogna riferirsi al *Megaceros hibernicus* — di cui l'*euryceros* è tutt'al più una forma — per il quale esiste la bella monografia del REYNOLDS (16); nella figura 16 a pagina 34 sono illustrate la V, VI, VII cervicale. Le dimensioni sono *grosso modo* le stesse (forse un pochino inferiori) della vertebra di Portalbera; a nessuna però quest'ultima corrisponde perfettamente; l'organizzazione generale sembra nel complesso diversa.

Cervus elaphus LIN. — Di dimensioni molto minori e con vertebre ben differenziate.

Cervus sp. — Di piccole dimensioni.

Bison priscus (BOJANUS) e *Bos primigenius* BOJANUS: per le vertebre dell'uro si può riferirsi alla monografia del REYNOLDS (17); nella figura 7 a pagina 19 sono figurate le vertebre cervicali dalla IV alla VII (la V e

la VII solo di fianco). L'ordine di grandezza sembra ancora su per giù quello della vertebra di Portalbera (un po' inferiore); non c'è però corrispondenza perfetta ed anche il piano strutturale generale sembra diverso.

Bos sp. — Si tratta di resti attribuibili al *Bos primigenius* o di resti di *Bos taurus* provenienti da strati più recenti.

Riassumendo e concludendo si può dire che nessuna delle vertebre figurate come appartenenti ai mammiferi presenti nel giacimento di Arena Po corrisponde perfettamente a questa di Portalbera. Quelle che sembrano presentare le maggiori rassomiglianze sia dal punto di vista dimensionale sia da quello dell'organizzazione generale sono le vertebre di *Rhinoceros (Coelodonta) Mercki* JAEGER. — In particolar modo le figure del PORTIS e del SIMONELLI riferentisi alla VII cervicale mostrano non disprezzabili analogie. Un fatto però è caratteristico della vertebra pavese: la separazione delle diapofisi, che sono rudimentali, dalle parapofisi e la conseguente mancanza di pleurapofisi vere e proprie e di *foramina transversaria*. Sembrano inoltre mancare, ma non lo si può asserire con sicurezza perchè in quel punto la superficie è un po' corrosa, le piccole superfici articolari per la prima costa. Da ciò si sarebbe indotti a pensare ad una VI cervicale piuttosto che ad una VII. Per quest'ultima mancano, mi sembra, figurazioni nella letteratura. Ad ogni modo, io credo, sia che si tratti di una VI, sia che si tratti di una VII cervicale, essa deve essere una vertebra anomala dove diapofisi e parapofisi sono rimaste separate, sostituendosi così al *foramen transversarium* una semplice doccia.

Da quanto sopra sembra potersi affermare che la vertebra di Portalbera attribuita dal BALSAMO-CRIVELLI ad una nuova specie e ad un nuovo genere di coccodrillo da lui denominato *Eridanosaurus Brambillae*, appartiene invece ad un mammifero (il che elimina il contrasto stratigrafico rispetto agli altri fossili di Arena Po che sono Pleistocenici, mentre il coccodrillo dovrebbe essere terziario o addirittura mesozoico); non si può stabilire con sicurezza a quale mammifero: probabilmente si tratta di una vertebra cervicale (VI ?) di *Rhinoceros (Coelodonta) Mercki* con caratteri anomali dovuti alla non saldatura delle diapofisi colle parapofisi. Tale determinazione è suffragata anche dal grado e dall'aspetto di fossilizzazione che corrisponde proprio a quello di un ramo di mandibola della stessa specie esistente in Museo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) BALSAMO-CRIVELLI G., *Di una vertebra fossile trovata nelle ghiaie del Po*. « Atti d. Soc. Ital. d. Sc. Nat. », vol. VII, anno 1864. Riunione straordinaria a Biella nei giorni 3, 4, 5 e 6 settembre 1864, pag. 210. Milano, 1864.
- (2) BALSAMO-CRIVELLI G., *Notizie naturali e chimico-agronomiche sulla provincia di Pavia*. Pavia, Bizzoni, 1864.
- (3) TOULA F. e KAIL J. A., *Ueber einen Krokodil-Schädel aus den Tertiärablagerungen von Eggenburg in Niederösterreich*. « Denkschr. d. k. Akad. d. Wiss. », Math-Naturw. Cl., vol. 50, pag. 299. Wien, 1885.
- (4) LIOY P., *I Coccodrilli fossili del Veneto*. « Atti d. R. Ist. Ven. d. Sc., Lett. ed Arti », tomo VII, Serie VII, 1895-96, pag. 753. Venezia, 1896.
- (5) PATRINI P., *I mammiferi fossili di Arena Po*. « Riv. Ital. d. Paleont. », anno XXXII, 1926, fasc. IV, pag. 54. Pavia, 1926.
- (6) BOLK, GÖPPERT, KALLIUS e LUBOSCH, *Handbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere*. Vierter Band. Berlin u. Wien, Urban e Schwarzenberg, 1936.
- (7) OWEN, *Monograph of the fossil Reptilia of the London Clay*, vol. I, part II: *Crocodylia and Ophidia*. « Palaeontographical Society », vol. III, London, 1850.
- (8) GADOW H., *Amphibia and reptiles*. « The Cambridge Natural History » di Harmer e Shipley. London, 1909.
- (9) ZITTEL WOODWARD, *Text book of Palaeontology*, vol. II: *Vertebrates-Fishes to Birds*. London, Macmillan and Co., 1932.
- (10) KUHN O., *Die fossilen Reptilien*. Gebrüder Bornträger, Berlin, 1937.
- (11) BRANDT J. F., *Versuch einer Monographie der Tichorhinen Nashörner* ecc. « Mem. de l'Academie Imp. des Sciences de St. Petersbourg », 1877.
- (12) PORTIS A., *Ueber die Osteologie von Rhinoceros Merckii Jäg. ecc.* « Palaeontographica », vol. 25, pag. 143. Cassel, 1877.
- (13) SIMONELLI V., *I rinoceronti fossili del Museo di Parma*. « Palaeontographia Italica », vol. III, pag. 89. Pisa, 1898.
- (14) CUVIER G., *Recherches sur les ossements fossiles* ecc. Tome second, part. I. Paris, 1822.
- (15) REYNOLDS S. H., *A Monograph on the British Pleistocene Mammalia*. Vol. III, part. I: *Hippopotamus*. « Palaeontographical Society », 1920, vol. 74. London, 1922.
- (16) REYNOLDS S. H., *A Monograph on the British Pleistocene Mammalia*. Vol. III, part. III: *The giant Deer*. « Palaeontographical Society », 1927, vol. 81. London, 1929.
- (17) REYNOLDS S. H., *A Monograph on the British Pleistocene Mammalia*. Vol. III, part VI. *Bovidae*. « Palaeontographical Society », vol. 92. 1938, London, 1939.

Antropologia. — *Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico rispetto al piano sagittale del cranio* ⁽¹⁾. Nota di ALFREDO SACCHETTI, presentata ⁽²⁾ da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

SERGIO SERGI, nel porre le basi della sua dottrina di antropometria architettuale, ha messo innanzitutto in evidenza l'importanza che assume oggi lo studio della posizione e della forma delle singole ossa — craniche ad esempio — quando ci si riferisca ad un orientamento fisiologico della regione ed in particolare di tutta la testa o di tutto il cranio. Per questa via infatti si giunge ad una concezione dinamica della morfologia cranica che sola può chiarirci gli aspetti meccanici delle forme, mentre con la stessa — così scrive l'autore — si può anche spiegare la variabilità nella trasmissione ereditaria delle medesime, quale risultante del giuoco dei molteplici fattori che vi partecipano.

Nel caso specifico dello zigomatico vi sono già ampie ricerche del SERGI, pubblicate in parte, le quali non soltanto confermano quelle premesse generali, ma conducono inoltre ad una interpretazione meccanica più precisa della diversa morfologia e posizione dell'osso stesso, per cui l'autore afferma: «Le azioni che si esercitano sullo zigomatico possono risolversi in spostamenti determinati da movimenti di rotazione intorno ad assi che corrispondono ad una qualsiasi delle congiungenti di due qualunque dei punti dello zigomatico presi in considerazione. Ma le stesse azioni insieme possono anche determinare cambiamenti di forma per ripiegamenti (flessioni), distensioni e torsioni del medesimo, quali risultanti delle forze che si contrastano. Le variazioni di situazione e le variazioni morfologiche trovano così una adeguata interpretazione unitaria».

Partendo da questi chiari concetti del SERGI ho voluto, ancora per lo zigomatico e con ricerche originali, approfondire gli aspetti biometrici di alcuni problemi architeturali. In un lavoro precedente, sulle relazioni tra cranio cerebrale e cranio facciale, ho già illustrato i primi risul-

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 19 febbraio 1943-XXI.

tati ottenuti, e ad esso rimando quindi per i particolari. Qui mi riferisco soltanto alla posizione dello zigomatico rispetto al piano sagittale del cranio e mi propongo di dimostrare se le tante possibilità meccaniche, prospettate dal SERGI per la interpretazione della diversa posizione che l'osso può assumere, si realizzano con una differente frequenza e se, fra quelle stesse possibilità, vi sono elementi comuni a vari gruppi etnici, anche molto diversi fra loro per altre caratteristiche. Elementi comuni che rivelerebbero le vere *leggi architettoniche*, le più stabili anche di fronte alle differenze razziali di cui solo successivamente ci si potrà rendere conto con maggiore obbiettività.

Ho pertanto iniziato queste ricerche su due serie craniche relativamente numerose, allo scopo di poter procedere al calcolo delle costanti statistiche, ed ho inoltre richiesto che esse appartenessero a gruppi etnici molto diversi fra loro per le ragioni esposte. Il materiale di cui mi sono servito, conservato nel nostro Museo romano di Antropologia, è costituito da una serie di 200 Romani ed un'altra di 157 Melanesiani.

Lo studio della posizione di un qualsiasi elemento osseo rispetto a un piano d'orientamento della testa (come il sagittale) conduce al concetto di rotazione del medesimo, già concepito dal SERGI, ma una visione più concreta del fenomeno si ha ora attraverso il calcolo della correlazione esistente tra l'indice cranico e le singole *apozighie relative* dei quattro punti ZMs , ZMi , ZFe , ZTi ⁽¹⁾ nelle serie suddette:

TABELLA I.

Coefficiente di correlazione tra indice cranico e le singole apozighie relative nei Romani e nei Melanesiani.

Apozighie relative dei punti	Romani (200)		Melanesiani (157)	
	<i>r</i>	<i>Er</i>	<i>r</i>	<i>Er</i>
<i>ZMs</i>	— 0,119	0,047	— 0,088	0,053
<i>ZMi</i>	— 0,062	0,048	+ 0,090	0,053
<i>ZFe</i>	— 0,097	0,047	+ 0,081	0,054
<i>ZTi</i>	+ 0,276	0,044	+ 0,013	0,054

⁽¹⁾ I punti prescelti sono: *zigomascellare superiore* (*ZMs*), *zigomascellare inferiore* (*ZMi*), *zigofrontale esterno* (*ZFe*) e *zigotemporale inferiore* (*ZTi*). Non ho però determinato con proiezioni, sull'intero materiale, la distanza di ciascun punto

I valori più significativi di r appartengono al gruppo dei Romani. Ciò vuol dire che le sue forti differenze di indice cranico arrivano ad essere legate anche alla posizione relativa dello zigomatico rispetto al piano sagittale, mentre nel gruppo dei Melanesiani, relativamente meno eterogenei dal punto di vista razziale ⁽¹⁾, tali relazioni sembrano quasi annullarsi e le apozighie relative dei singoli punti variano pertanto indipendentemente dall'indice di lunghezza-larghezza del cranio cerebrale.

In particolare nel gruppo dei Romani si osserva che con l'aumentare dell'indice cranico aumenta significativamente il grado di apozighia relativa del punto ZTi , mentre, sia pure con minore intensità diminuisce quello del punto ZMs . E se si pensa alla reciproca posizione di questi due punti si è indotti ad interpretare il fatto con un fenomeno di rotazione dell'osso, come se per necessità meccanica ad una apozighia del punto ZTi dovesse opporsi una corrispondente parazighia ⁽²⁾ del punto ZMs .

Gli altri coefficienti non sono significativi. Comunque questa interpretazione meccanica dei fenomeni di rotazione dello zigomatico ha di per sé un grande interesse, tanto più che ciò può non dipendere direttamente dalle variazioni della forma della testa, come per i Melanesiani ⁽³⁾. Sulla base di altri dati posso infatti aggiungere ora che anche in quest'ultimo caso vi è la possibilità di compensi reciproci, ugualmente sensibili con apozighie e parazighie tra i punti ZTi e ZMs . Lo dimostrano i calcoli riportati nelle tabelle II, III e IV.

dal piano sagittale (apozighia), ma potendo supporre minima l'influenza delle asimmetrie, dato che si tratta di crani normali, ho misurato direttamente la distanza complessiva tra i punti omonimi dei due lati ottenendo così i seguenti diametri: 1. *bizigomascellare superiore* ($biZMs$); 2. *bizigomascellare inferiore* ($biZMi$); 3. *bizigofrontale esterno* ($biZFe$); 4. *bizigotemporale inferiore* ($biZTi$). Con *apozighia relativa* intendo, allo scopo di eliminare le cause di variazione dovute alla diversa dimensione dei singoli crani, la misura relativa di ciascuno dei quattro diametri supponendo la loro somma fatta uguale a 100.

⁽¹⁾ Cfr. il mio lavoro *Le variazioni intra ed interrazziali dell'indice cefalico*.

⁽²⁾ Con *parazighia* si intende l'avvicinamento di un punto dello zigomatico al piano sagittale in opposizione alla *apozighia*.

⁽³⁾ Se poi, quando si osserva una certa relazione tra i due fenomeni si possa concepire un vero nesso di *causalità* è difficile dire per ora; nel senso che in un gruppo razzialmente eterogeneo (come è quello dei Romani), potrebbero essere conglobati tipi diversi i quali comportano nel loro diverso originario patrimonio genetico caratteristiche morfologiche e dinamiche varie tali da determinare, nel loro naturale adattamento alla concreta realizzazione fenotipica, una necessaria associazione di forme varie (facciali e craniche) che può invece essere indipendente da un *intrinseco determinismo meccanico*. Ma a questo punto è infatti aperta la via per le indagini future.

Nella tabella II vi sono i coefficienti di correlazione tra i diametri assoluti, nella III gli stessi coefficienti tra i diametri relativi (apozighie relative) e nella IV infine i corrispondenti valori del coefficiente di correlazione di secondo grado dove *per ogni coppia* di diametri si suppongono costanti gli altri due. Le correlazioni tra le apozighie relative dimostrano chiaramente alcune condizioni comuni ai due gruppi, prima ancora delle differenze specifiche.

TABELLA II.

Correlazioni reciproche fra i quattro diametri bizigomatici assoluti.

N.	Caratteri	Romani (200)		Melanesiani (157)	
		<i>r</i>	<i>Er</i>	<i>r</i>	<i>Er</i>
1	<i>biZFe-biZMs</i>	+ 0,435	0,038	+ 0,093	0,053
2	<i>biZFe-biZTi</i>	+ 0,687	0,025	+ 0,730	0,053
3	<i>biZFe-biZMi</i>	+ 0,454	0,037	+ 0,423	0,044
4	<i>biZTi-biZMi</i>	+ 0,581	0,031	+ 0,535	0,038
5	<i>biZMi-biZMs</i>	+ 0,399	0,040	+ 0,399	0,045
6	<i>biZMs-biZTi</i>	+ 0,278	0,043	+ 0,265	0,050

TABELLA III.

Correlazioni reciproche fra i quattro diametri bizigomatici relativi (apozighie relative).

N.	Caratteri	Romani (200)		Melanesiani (157)	
		<i>r</i>	<i>Er</i>	<i>r</i>	<i>Er</i>
1	<i>biZFe-biZMs</i>	— 0,233	0,045	— 0,432	0,044
2	<i>biZFe-biZTi</i>	+ 0,046	0,048	+ 0,122	0,053
3	<i>biZFe-biZMi</i>	— 0,529	0,034	— 0,390	0,046
4	<i>biZTi-biZMi</i>	— 0,284	0,044	— 0,339	0,048
5	<i>biZMi-biZMs</i>	— 0,218	0,045	— 0,213	0,051
6	<i>biZMs-biZTi</i>	— 0,628	0,029	— 0,630	0,034

TABELLA IV.

*Correlazioni reciproche di secondo grado fra i quattro diametri
bizigomatici assoluti:*

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. <i>biZFe</i> | 3. <i>biZMs</i> |
| 2. <i>biZTi</i> | 4. <i>biZMi</i> |

N.	Coefficiente di correlazione	Romani (200)	Melanesiani (157)
1 $24r_{13}$	+ 0,339	— 0,180
2 $34r_{12}$	+ 0,595	+ 0,668
3 $23r_{14}$	— 0,015	+ 0,111
4 $13r_{24}$	+ 0,438	+ 0,285
5 $12r_{34}$	+ 0,291	+ 0,329
6 $14r_{23}$	— 0,155	+ 0,169

Molto forte e negativa è la relazione tra *biZMs* e *biZTi*; ciò indica appunto un fenomeno di rotazione dello zigomatico intorno ad un asse verticale pressochè vicino alla linea *ZFe-ZMi*, ed è notevole che avvenga anche nel gruppo dei Melanesiani con la stessa intensità, pur essendo questi caratteristici per la posizione particolare dello *ZMs* ⁽¹⁾ e per la correlazione quasi nulla esistente tra i diametri relativi o apozighie relative e l'indice cranico. Una conferma di ciò si ha anche attraverso i coefficienti di secondo grado dove il valore di $14r_{23}$ rimane evidentemente, sempre per i Melanesiani, tra i più bassi. Nei Romani lo stesso coefficiente è per di più negativo.

Tra le apozighie relative una correlazione più bassa, ma anche sensibile e negativa, più ancora nei Romani, è data poi dai punti *ZFe-ZMi*. Il comportamento è simmetrico al precedente e fa pensare a rotazioni intorno ad un asse orizzontale vicino al segmento *ZTi-ZMs*. Per il resto, in questo senso, vi sono differenze tra i due gruppi, indubbiamente di ordine raziale, sulle quali non mi soffermo, a parte ad esempio, il comportamento simile dello *ZTi* rispetto al *ZFe* (v. anche i coefficienti di secondo grado).

(1) Cfr. i miei lavori citati nella Bibliografia.

Le correlazioni semplici tra i valori assoluti dei singoli diametri, che ho anche riportate, servono come base di confronto e di valutazione degli altri coefficienti, mentre ne mostrano ancora più tutta la portata.

I fenomeni *comuni* di compensazioni morfo-meccaniche a cui abbiamo assistito, anche se attraverso lo studio di un unico osso, sono infine, come *un elemento particolare, ma costante, che si riesce a mettere in evidenza in tutto quel complesso variare di forze e di movimenti, caratteristico di ogni tipo architettuale.*

Vi è dunque una armonia architettuale e meccanica non solo – potremmo dire – entro i singoli gruppi, ma anche al di fuori di questi. Il fenomeno ci è dimostrato dall'esempio che precede, anche a parte il risultato specifico, il quale potrà essere valutato alla luce di più ampie ricerche. E ciò che ora accenno in tesi generale vale naturalmente non solo per un piano, ad esempio, per la proiezione ed il profilo sagittale, ma, come dice oggi il SERGI, per i tre piani insieme dello spazio, che per le ossa della faccia danno luogo a tre *profili*, e per i piani obliqui, su alcuni dei quali già egli stesso ha portato l'attenzione ottenendo risultati importanti (come per quello contenuto dall'asse basion-bregma e dall'asterion, in una posizione intermedia tra il piano frontale e il sagittale).

Ma così solo, concepita col SERGI dinamicamente la morfologia facciale si potrà tendere – ripeto – ad una soluzione più soddisfacente e forse definitiva dei problemi sulla trasmissione ereditaria delle forme.

A questa stessa ultima conclusione del resto si è condotti quando i principi del SERGI vengono adottati per la analisi dei gruppi ibridi, la cui importanza non può pertanto sfuggire allo studioso. Io stesso ho potuto mostrarlo con ricerche sulla craniologia degli Arbore, del territorio dell'Omo-Sagan (Africa Orientale), soprattutto riferendomi alla posizione spaziale e alla forma dello zigomatico e del mascellare.

BIBLIOGRAFIA

- SERGIO SERGI e V. CAPRITTI, *Osservazioni sui rapporti di forma e dimensione tra le volte delle orbite ed il cranio cerebrale*. « Rivista di Antropologia », volume XXVIII, 1928-1929.
- SERGIO SERGI, *Sulle variazioni di forma e posizione dell'osso temporale nell'uomo*. « Rivista di Antropologia », vol. XXXI, 1935-1937.
- ID., *Variazione di forma e di posizione dell'osso temporale nei crani con deformazione artificiale*. « Atti della Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania », Catania, 1939.
- ID., *Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico nell'uomo*. « Rivista di Antropologia », vol. XXXIII, 1942.
- ID., *La topografia dell'osso zigomatico dell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia*. « Rend. della Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat., della R. Acc. d'Italia », 1942.
- ALFREDO SACCHETTI, *La variabilità relativa dei caratteri antropometrici lineari*. « Rivista di Antropologia », vol. XXXIII, 1941.
- ID., *Ueber die relative Variabilität der anthropometrischen Merkmale*. « Zeitschrift für Rassenkunde », Band XIII, H. I., 1942.
- ID., *Le variazioni intra ed interrazziali dell'indice cefalico*. « Rivista di Antropologia », vol. XXXIV, 1942. Cfr. anche: « Relazioni al XLI Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (SIPS) », Roma 1942.
- ID., *Sul valore dell'indice facciale come mezzo di differenziazione dei gruppi umani*. « Atti della IV Riunione della Società Italiana di Statistica », gennaio 1942.
- ID., *Sulle relazioni tra cranio cerebrale e cranio facciale*. « Relazioni al XLI Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (SIPS) », Roma 1942.
- ID., *Ricerche antropologiche sugli Arbore. Contributo alla conoscenza delle popolazioni del sud-ovest etiopico*. In corso di stampa a cura dell'Ufficio Studi del Ministero dell'Africa Italiana, Roma 1943.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA

- BORRIELLO, Biagio. — *Riflessioni sulla Marina mercantile. La Marina mercantile nell'anno 1939*. Vol. II, Usila, 1942-XXI. Pp. 537, in-8°.
- BORTOLOTTI, Ettore. — Vedi: RUFFINI, Paolo. *Opere matematiche*...
- BRUERS, Antonio. — *Gesù nel secolo ventesimo*. Roma, Edizioni Stella, 1942-XXI. Pp. 134, in-16°.
- *Scritti storici*. Bologna, Zanichelli, 1942-XXI. Pp. 178, in-8°.
- *La voce di Bologna*. Milano, Cordani, 1943-XXI. Pp. 208, in-8°.
- Vedi: *Un taccuino inedito di Gabriele d'Annunzio*.
- CARABELLESE, Pantaleo. — *Che cosa è la filosofia?* Roma, Signorelli, 1942-XX. Pp. 382, in-8°. (*L'Ontologismo critico*. Primi saggi. II).
- *Originalità storica e Attualità speculativa del pensiero filosofico Rosminiano*. Milano, Bocca, 1940-XVIII. Pp. 23, in-8°.
- Estratti:
Il Diritto naturale (dal vol.: *L'esperienza pratica e le sue forme fondamentali*).
La nuova Critica e il suo Principio. («Archivio di Filosofia», a. X, fasc. II, 1940-XVIII).
- FERRARINI, Manlio. — *La malattia del Dupuytren*. Saggio monografico pubblicato sotto gli auspici della Reale Accademia d'Italia. Pisa, Nistri-Lischi, 1941-XX. Pp. 446, in-8°, con figg.
- *Il « Liber secretus iuris caesarei » dell'Università di Bologna a cura di Albano Sorbelli*. Vol. II, 1421-1450. Con una introduzione sull'esame nell'Università durante il medioevo. Bologna, Istituto per la storia dell'Università, 1942-XX. Pp. CLXII-276, in-8°.
- LONGO, Biagio. — *Sulla fioritura dell'« Araucaria Bidwilli Hook »*. (Estr. dal Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli, tomo XVI).
- MAZZONI, Guido. — *Dalle poesie postume*... Firenze, Barbera, 1943-XXI. Pp. 30, in-8° (Nozze Federzoni-Sciacca della Scala).
- NARDEUCCI, Guglielmo. — *Storia della colonizzazione della Cirenaica*. Milano-Roma, Editoriale «Arte e Storia», 1942-XX. Pp. 139, in-8°, con tavv.
- PACCHIONI, Giovanni. — *I contratti a favore di terzi*. Studio di diritto romano civile e commerciale. Terza edizione. Padova, Cedam., 1933-XI. Pp. XI-445, in-8°.
- *Della gestione degli affari altrui secondo il Diritto romano, civile e commerciale*. Padova, Cedam., 1935-XIII. Pp. 580, in-8°.
- *Diritto civile italiano*. Parte I: *Le preleggi*. Parte II: *Delle obbligazioni*. Voll. 4, in-8°.

- PANCIERA, Domenico. — *Uno sguardo all'Oriente Cristiano*. (Saggio di Studio con illustrazioni). Roma, A. L. C. I., 1938-XVI. Pp. 319, in-16°, con figg.
- PANETTI, Modesto. — *Corso di costruzioni aeronautiche*. Parte I: *Aerostatica e dirigibili*. Parte II: *Aerodinamica*. Torino, Levrotto e Bella, 1941-XIX, 1942-XX. Voll. 2, in-8°.
- PICANYOL, Leodogario. — *Le scuole pie e Galileo Galilei*. Roma, Padri Scolopi di S. Pantaleo, 1942. Pp. 243, in-8°, con tavv.
- PIOLA CASELLI, Eduardo. — *Diritto di autore*. Torino, U. T. E. T., 1943-XXI. Pp. 760, in-8°.
- REGGIO, Giovanni. — *Gabriele d'Annunzio*. Voci lontane e prossime. Milano. Pubblicazioni « La Staziella », 1939-XVIII. Pp. 317, in-16°.
- RONCHI, Vasco. — *Galileo e il cannocchiale*. Udine, Casa ed. Idea, 1942-XXI. Pp. 143, in-8°, con figg. ed 1 tav. (Collana di cultura, 1).
- RUFFINI, Paolo. — *Opere matematiche* . . . Pubblicate sotto gli auspici dell'Unione Matematica Italiana a cura del prof. dr. Ettore Bortolotti. Tomo II. Roma, Edizioni Cremonese, 1942-XXI. Pp. XIII-510, in-8°.
- SCORZA DRAGONI, Giuseppe. — Vedi: SEVERI, Francesco — SCORZA DRAGONI, Giuseppe.
- SEVERI, Francesco — SCORZA DRAGONI, Giuseppe. — *Lezioni di analisi*. Vol. II, parte I . . . Bologna, Zanichelli, 1942-XX. Pp. VII-398, in-8°.
- SORBELLI, Albano. — Vedi: *Il « Liber secretus iuris caesarei » dell'Università di Bologna* . . .
- TOMMASI, Giuseppe. — *La chimica agraria per l'incremento della produzione*. Comunicazione alla R. Accademia d'Italia, Classe di Scienze fisiche, mat. e nat. del 10 aprile 1942-XX. Roma, S. A. Istituto d'Arti Grafiche Mengarelli, 1942-XX. Pp. 61, in-8°, con figg. (R. Stazione Chimico-agraria sperimentale di Roma).
- La razionale dotazione fosforica dei terreni*. Roma, S. A. Istituto d'Arti Grafiche Mengarelli, 1941-XX. Pp. 13, in-8° (R. Stazione Chimico Agraria sperimentale di Roma).
- *Il silaggio foraggero italiano*. Roma, 1942 XX. Pp. 66, in-8° con tavv.
- *Un taccuino inedito di Gabriele d'Annunzio* (Bologna, Settignano, Gamberaia). Per le nozze Sciacca della Scala-Federzoni. La Fondazione « Il Vittoriale degli Italiani », 1943-XXI. Pp. 7, XLI tavv. (facs.). Con una nota di Antonio Bruers.
- USSANI, Vincenzo. — *Scritti di filologia e umanità*. Napoli, R. Ricciardi. 1942. Pp. 378, in-8°.

Sul microfono elettrolitico ⁽¹⁾.

Relazione ⁽²⁾ dell'Accademico SILVESTRO BAGLIONI e di ANGELO MANFREDI

Nella precedente Nota ⁽³⁾ abbiamo riferito su un effetto proprio alle soluzioni elettricamente conduttrici, applicabile alla costruzione di un nuovo tipo di microfono (microfono elettrolitico).

Accertata l'esistenza del fenomeno, le ricerche si sono ora orientate verso due differenti problemi. Mentre da una parte, si sono seguite – e si seguono – indagini sul funzionamento di tale nuovo tipo di microfono, non si è voluto d'altra parte perdere di vista il vasto campo delle possibili applicazioni che esso presenta.

Si è in particolare fermata l'attenzione sul fatto che, a *parità di altre condizioni, la tensione elettrica alternativa generata dal microfono, dipende dalla concentrazione ionica, in particolare idrogenionica o idrossilionica della soluzione adoperata.*

Un accenno a questa dipendenza è nella precedente Nota; essendo già ivi descritta una disposizione sperimentale atta ad effettuarne la misura. Tale disposizione è stata ora modificata e perfezionata. La figura 1 mostra il complesso degli apparecchi usati.

Il microfono propriamente detto è costituito questa volta da una vaschetta cilindrica di vetro del diametro di circa 7 cm. e dell'altezza di 6 cm. nella quale sono immersi i due elettrodi, uno di carbone con superficie di circa 2 cm² ed uno di zinco amalgamato con mercurio con superficie di circa 6 mm².

La pressione alternativa sinusoidale è anche questa volta generata da un vibratore elettrodinamico comandato dall'oscillatore a battenti *B* attraverso lo stadio amplificatore di potenza *C*. Il condensatore

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. U. di Roma e nell'Istituto Nazionale di Elettroacustica del C. N. R.

⁽²⁾ Letta nell'Adunanza del 9 aprile 1943.

⁽³⁾ S. BAGLIONI e A. MANFREDI, *Di un microfono elettrolitico* « R. Acc. d'It. Rend. Clas. Sc. Fis. mat. e Nat. », I, s. VII, vol. IV, 1942.

variabile *A* dell'oscillatore a battimenti serve a variare a piacere la frequenza della pressione alternativa fra 10 e 14.000 Hz. L'eccitazione del campo del vibratore elettrodinamico viene fatta mediante un alimentatore separato *D*, il quale rettifica e filtra la corrente alternata della rete.

Fin qui la parte *trasmittente*. Il complesso *ricevente* è costituito essenzialmente dal preamplificatore *F* ad amplificazione variabile e dall'amplificatore *G* ad amplificazione fissa con guadagno di 80 dB.

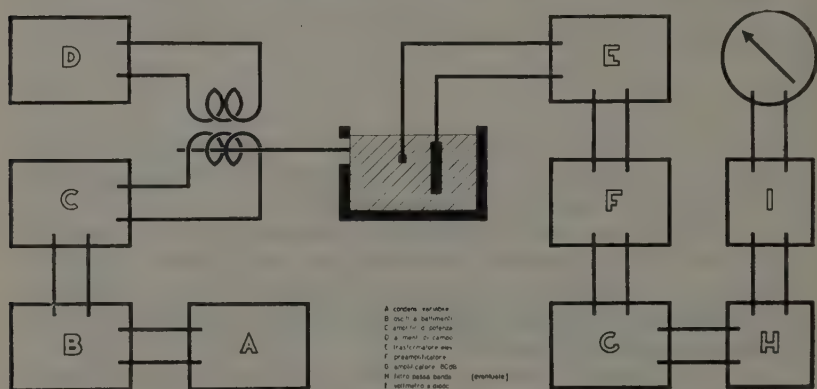


Fig. 1 - Schema della disposizione per le esperienze sul microfono elettrolitico: *A* - condensatore variabile per la regolazione della frequenza dell'oscillatore a battimenti. *B* - oscillatore a battimenti. *C* - amplificatore di potenza. *D* - alimentatore di campo del vibratore elettrodinamico. *E* - trasformatore adattatore di impedenza. *F* - preamplificatore ad amplificazione comandabile. *G* - amplificatore ad amplificazione fissa. *H* - filtro passa banda. *I* - voltmetro a tubo elettronico.

L'accoppiamento tra la cella microfonica ed il preamplificatore *F* è effettuato a mezzo del trasformatore *E*, con primario a bassa impedenza (adatta a quella media della cella - circa 15 ohm -) e secondario ad impedenza elevata (100.000 ohm) uguale a quella di entrata del preamplificatore.

La tensione di uscita dell'amplificatore *G* viene misurata dal voltmetro a tubo elettronico *I*. In alcuni casi si è dimostrato utile inserire prima del voltmetro un filtro passabanda *H*, atto ad eliminare eventuali disturbi a frequenza inferiore o superiore di quella della pressione alternativa in quel particolare caso adoperata.

Per studiare come la tensione indicata dal voltmetro *I* vari in funzione della concentrazione ionica della soluzione posta entro la vaschetta, contenente inizialmente 180 cm³ di acqua distillata, si procede alla progressiva aggiunta di piccole quantità di soluzioni titolate saline, acide o basiche,

mantenendo beninteso costanti sia l'amplificazione del preamplificatore F sia l'ampiezza e la frequenza della pressione alternativa meccanica applicata alla cella.

La figura 2 mostra uno dei grafici ottenuti partendo da acqua distillata ed aggiungendo gradualmente soluzione normale di NaCl . Con l'aumentare della concentrazione aumenta la tensione alternativa indicata

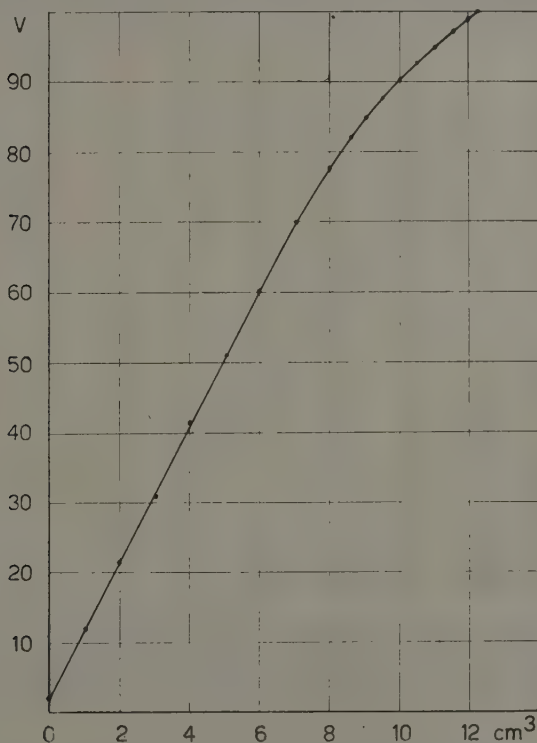


Fig. 2. - Grafico ottenuto partendo da acqua distillata ed aggiungendo gradualmente soluzione normale di NaCl nelle quantità indicate nell'asse delle ascisse.

dal voltmetro I ; il primo tratto del grafico è con molta approssimazione rettilineo; in seguito il fenomeno tende alla saturazione.

L'aggiunta di soluzione normale di NaCl è stata interrotta ai $12,2 \text{ cm}^3$ per non eccedere il campo di misura consentito dagli amplificatori.

Nella figura 3 si riporta un'altro tipico grafico ottenuto aggiungendo gradualmente soluzione $\text{N}/4$ di H_2SO_4 all'acqua distillata contenuta nella vaschetta. Giunti al punto b (6 cm^3), sospende l'aggiunta di soluzione acida,

si è aggiunta soluzione N/4 di NaOH. La tensione alternativa è andata allora diminuendo per la progressiva neutralizzazione della acidità della soluzione, pienamente raggiunta con 6 cm³ (punto *b*). Oltre questo punto l'ulteriore aggiunta di soluzione N/4 di NaOH ha fatto di nuovo aumentare la tensione di uscita dell'amplificatore *G*.

Le variazioni di acidità e di alcalinità sono state nel contempo seguite con l'indicatore al metilarancio la cui colorazione si è mantenuta rossa nei

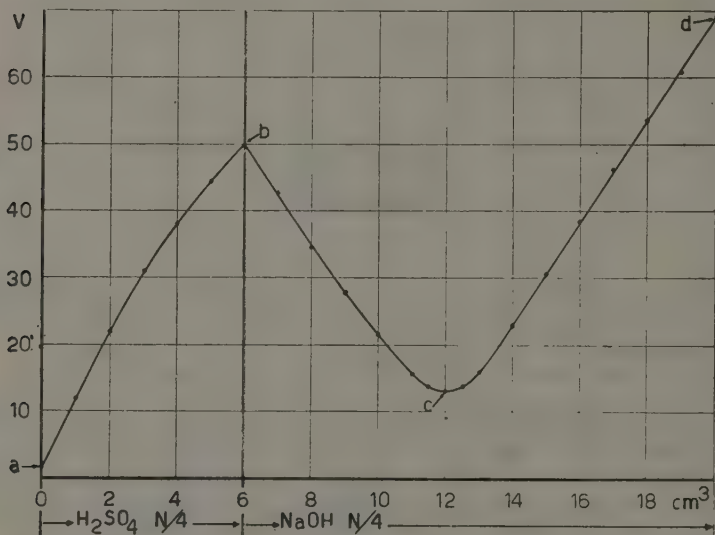


Fig. 3. - Grafico ottenuto partendo da acqua distillata ed aggiungendo gradualmente dapprima soluzione N/4 di H₂SO₄ fino alla quantità complessiva di 6 cm³, e successivamente soluzione N/4 di NaOH.

tratti *ab* e *bc* (zona acida) virando al giallo in corrispondenza del punto *c* e conservandosi poi gialla nel rimanente tratto *cd* (zona alcalina).

L'amplificazione usata per il rilievo della curva è stata di circa 100.000 volte.

Si noti che i diagrammi non partono dallo zero perchè anche l'acqua distillata presenta un debole effetto microfonico. Tale effetto è risultato apprezzabile anche con l'acqua bidistillata.

La sensibilità del sistema appare quindi notevole; essa peraltro è - come è chiaro - funzione diretta del coefficiente di amplificazione totale del complesso ricevente. Per aumentare questa amplificazione, pur conservando basso il livello dei disturbi dovuti ad induzioni della corrente

elettrica della rete industriale, o a campi elettromagnetici esterni si è costruita una camera schermata in rete metallica delle dimensioni di circa $2,5 \cdot 3,5 \cdot 2,5$ m³, nella quale, già alle prime prove, si è potuta raggiungere una amplificazione di 10.000.000 volte, mediante alimentazione in corrente continua di tutti gli apparecchi del complesso.

Prove su soluzioni di anelettroliti (ad esempio, saccarosio) hanno permesso di constatare che l'effetto non è presente in tali soluzioni.

Le esperienze in corso sono dirette allo studio del comportamento di diversi composti elettrolitici, nonché di colloidi.

Matematica. — Funzioni analitiche complementari. Nota ⁽¹⁾
di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. CAMPI COMPLEMENTARI. — Ho introdotto recentemente ⁽²⁾ la denominazione di *complementari* alle due regioni C e C_1 del piano complesso $z = x + iy$ determinate da un contorno semplice l : sia esso chiuso (fig. 1) oppure aperto (fig. 2).

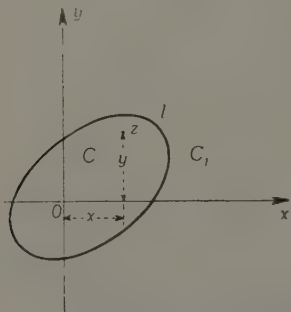


Fig. 1.

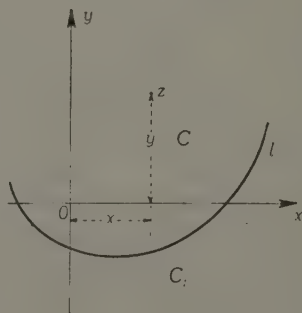


Fig. 2.

Nel primo caso l è una linea chiusa, C è un'area limitata e C_1 è il piano forato in C ; nel secondo caso l è aperta ed entrambi le regioni C e C_1 sono illimitate. Ci riferiremo dapprima al caso in cui l è chiusa.

2. FUNZIONI COMPLEMENTARI TIPICHE. — Mettiamo in corrispondenza biunivoca le due regioni C e C_1 rispettivamente col cerchio Γ (fig. 3) di raggio unitario e centro nell'origine $Z = 0$ del piano $Z = X + iY$ e con la parte complementare cioè il piano forato in Γ .

Siano

$$[1] \quad z = \Psi(Z) \quad , \quad Z = \Psi^*(z)$$

(1) Presentata nell'Adunanza del 9 aprile 1943.

(2) *Corrispondenza conforme tra campi complementari*. Questi « Rendiconti », serie VII, vol. IV, pag. 278.

le relazioni che mettono nella su citata corrispondenza C e Γ ; nella seconda di queste relazioni si è indicato con l'asterisco la funzione inversa di quella rappresentata colla stessa lettera senza asterisco.

Siano parimenti

$$[2] \quad z_1 = \Psi_1(Z_1) \quad , \quad Z_1 = \Psi_1^*(z_1)$$

le relazioni che mettono nella analoga corrispondenza i due piani forati C_1 e Γ_1 . Si tenga presente che le due regioni, circolare Γ e forata Γ_1 ,

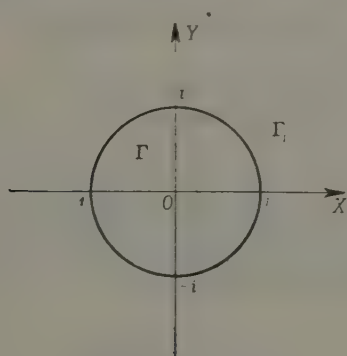


Fig. 3.

appartenenti allo stesso piano Z , si possono mettere in corrispondenza fra di loro mediante la nota relazione per raggi vettori reciproci:

$$[3] \quad Z \cdot Z_1 = 1.$$

Per questa relazione, in particolare, a un punto Z della circonferenza, considerata appartenente a Γ , corrisponde in Γ_1 il punto Z_1 della stessa circonferenza, simmetrico rispetto all'asse reale.

Per il tramite della relazione fondamentale [3] le due regioni C e C_1 del piano z si possono mettere in corrispondenza conforme: basta eliminare, per mezzo di [3], Z e Z_1 tra le due relazioni ultime delle [1] e [2] e si ottiene:

$$[4] \quad \Psi^* \cdot \Psi_1^* = 1.$$

Quando ci si riferisce ai punti del piano $z = x - iy$ si può tralasciare di mettere in rilievo l'argomento z perchè si intende che Ψ e Ψ^* si riferiscono solamente ai punti z di C e Ψ_1 e Ψ_1^* si riferiscono soltanto ai punti z_1 di C_1 . La precedente relazione mette in corrispondenza diretta i due campi complementari C e C_1 . È da rilevare che a un punto z del

contorno l di C corrisponde in C_1 un punto z_1 del medesimo contorno e, in generale, distinto da z .

Ora siccome nei punti della circonferenza del piano Z è:

$$Z_1 = \frac{1}{Z} = \bar{Z},$$

segue da questa e dalle relazioni seconde di [1] e [2] che sul contorno l deve essere soddisfatta la relazione

$$[5] \quad \Psi_1^* = \frac{1}{\Psi^*} = \overline{\Psi^*}, \quad \text{sopra } l,$$

cioè in punti corrispondenti z e z_1 del contorno l , comune a C e C_1 , le funzioni Ψ^* e Ψ_1^* assumono valori coniugati.

Le funzioni Ψ^* e Ψ_1^* che dipendono essenzialmente dalla forma del contorno l comune a C e C_1 saranno a dirsi *funzioni complementari tipiche*. Una volta note Ψ^* e Ψ_1^* , o le loro inverse Ψ e Ψ_1 , le due regioni C e C_1 sono messe in corrispondenza biunivoca e conforme tra di loro. Risolvendo [4] rispetto a z_1 si ottiene:

$$[6] \quad z_1 = \Psi_1 \left(\frac{1}{\Psi^*} \right);$$

analogamente risolvendo rispetto a z si ottiene:

$$[7] \quad z = \Psi \left(\frac{1}{\Psi_1^*} \right),$$

La [6] definisce esplicitamente il punto z_1 di C_1 corrispondente a z di C e la [7] viceversa. A norma della [5] si può osservare che nei punti del contorno l , comune a C e C_1 , la [6] e la [7] divengono rispettivamente

$$[8] \quad z_1 = \Psi_1(\bar{\Psi}^*) \quad , \quad z = \Psi(\bar{\Psi}_1^*) \quad \text{sopra } l.$$

Per esempio, nel caso di l circolare di raggio R e col centro nell'origine è per le [1]:

$$z = RZ \quad , \quad Z = \frac{z}{R},$$

per cui:

$$\Psi(Z) = RZ \quad , \quad \Psi_1(Z_1) = RZ_1 \quad , \quad \Psi^*(z) = \frac{z}{R} \quad , \quad \Psi_1^*(z_1) = \frac{z_1}{R},$$

con che la [4] diviene:

$$z \cdot z_1 = R^2,$$

che esprime la nota corrispondenza per raggi vettori reciproci.

Se l è un'ellisse di semiassi a e $b < a$ di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le funzioni complementari tipiche sono ⁽¹⁾

$$\Psi^{**} = \sqrt{k} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{z}{a^2 - b^2}} \right),$$

$$\Psi_1^{**} = \frac{z_1}{a+b} + \sqrt{\frac{z_1^2}{(a+b)^2} - q} = \frac{\sqrt{q}}{\frac{z_1}{a+b} - \sqrt{\frac{z_1^2}{(a+b)^2} - q}}.$$

$$q = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2.$$

3. FUNZIONI COMPLEMENTARI GENERICHE. — Sia $f(z)$ funzione analitica regolare in C ; consideriamo la sua determinazione nei punti z del contorno l . Essa può esprimersi mediante i corrispondenti punti z_1 del medesimo contorno per mezzo della seconda delle relazioni [8]; precisamente sarà:

$$[9] \quad f[\Psi(\bar{\Psi}_1^{**})], \quad \text{sopra } l.$$

Ciò premesso, definiamo in C_1 la seguente funzione f_1 di z_1 :

$$[10] \quad f_1 = f \left[\overline{\Psi \left(\frac{1}{\bar{\Psi}_1^{**}} \right)} \right],$$

poichè, come sappiamo, nei punti di l è

$$\frac{1}{\bar{\Psi}_1^{**}} = \bar{\Psi}_1^{**},$$

dalla precedente risulta

$$[11] \quad f_1 = \overline{f[\Psi(\bar{\Psi}_1^{**})]}, \quad \text{sopra } l,$$

cioè f_1 assume su l valori coniugati di [9]; ne segue che se si considera la funzione $f + f_1$ nei punti di l , con che z e z_1 sono legate dalla relazione [5], in virtù di [9] e [11] la somma predetta è reale essendo sopra l complessi coniugati i valori assunti in uno stesso punto. Possiamo concludere che ad

(1) Loco primo citato, formole [9] e [10].

ogni funzione analitica f regolare in C corrisponde in C_1 una funzione f_1 che assume su l , in punti corrispondenti, valori coniugati di quelli di f . Due funzioni siffatte saranno a dirsi complementari. Ciò che interessa, per le applicazioni, è di avere assodato la circostanza seguente: a ogni funzione $f(z)$ definita in C corrisponde la funzione complementare $f_1(z_1)$ definita in C_1 .

4. ESTENSIONE DI UNA FORMULA DI SCHWARZ. — Ho stabilito ⁽¹⁾ quanto segue: se in ogni punto di l due funzioni f dei punti z di C e f_1 dei punti z_1 di C_1 assumono valori complessi coniugati, per cui chiamando φ la comune parte reale si ha

$$f + f_1 = 2\varphi \quad \text{sopra } l,$$

risultano le seguenti relazioni:

$$[12] \quad \left\{ \begin{array}{l} f(z) = f(0) + \frac{z}{i\pi} \int_l \frac{\varphi d\zeta}{\zeta(\zeta - z)} \quad \text{in } C, \\ f_1(z_1) = f_1(\infty) - \frac{1}{i\pi} \int_l \frac{\varphi d\zeta}{\zeta - z_1} \quad \text{in } C_1. \end{array} \right.$$

Se f e f_1 sono funzioni complementari nel senso definito nel numero precedente, queste relazioni servono a risolvere i due problemi (interno ed esterno) riguardanti la determinazione della funzione regolare in un campo noti i valori della parte reale sul contorno. In particolare da esse si deduce la formula di SCHWARZ corrispondente a l circolare.

Per l'applicazione della prima delle [12] può convenire di riferire l'integrazione invece che al contorno l , comune a C e C_1 , al contorno circolare $|Z| = |Z_1| = 1$ dei campi Γ e Γ_1 ; su tale contorno è:

$$Z = e^{i\sigma}, \quad Z_1 = e^{-i\sigma} \quad 0 \leq \sigma \leq 2\pi;$$

si ha allora per le prime di [1] e [2]:

$$[13] \quad z = \Psi(e^{i\sigma}), \quad z_1 = \Psi_1(e^{-i\sigma}) \quad \text{sopra } l.$$

Riferendoci, per esempio, alla prima si ha:

$$dz = d\zeta = i\Psi'(e^{i\sigma}) e^{i\sigma} d\sigma,$$

(1) CISOTTI. Sulla determinazione di una funzione analitica nota la parte reale sul contorno. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIX (1° sem. 1934), pag. 528, formule [6] e [7].

designando Ψ' derivazione rispetto all'argomento, cioè a $e^{i\sigma}$; si ha dunque:

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\zeta}{\zeta} = ie^{i\sigma} \frac{\Psi'(e^{i\sigma})}{\Psi(e^{i\sigma})} d\sigma = ie^{i\sigma} \frac{\Psi'}{\Psi} d\sigma,$$

ponendo altresì

$$[14] \quad \varphi = \varphi(\zeta) = \varphi[\Psi(e^{i\sigma})] = \chi(\sigma) = \chi$$

la prima delle [12] dà luogo alla seguente formula:

[15]

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi \frac{\Psi' e^{i\sigma} d\sigma}{\Psi(\Psi^{-1} - z)}.$$

Essa definisce la funzione di z regolare in C noti i valori che la sua parte reale assume su l , e costituisce una estensione a un campo semplice C della nota formula di SCHWARZ relativa a un campo circolare ⁽¹⁾. Infatti se C è circolare col centro nell'origine e raggio R risulta:

$$\Psi = Re^{i\sigma} \quad , \quad \Psi' = R,$$

e allora la [15] diviene:

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\chi d\sigma}{Re^{i\sigma} - z};$$

siccome è

$$f(0) = ib_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi d\sigma,$$

dove b_0 è costante reale arbitraria, si ottiene in definitiva:

$$f(z) = ib_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi d\sigma + \frac{z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\chi d\sigma}{Re^{i\sigma} - z} = ib_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi \frac{Re^{i\sigma} + z}{Re^{i\sigma} - z} d\sigma,$$

che è appunto la citata nota formula di SCHWARZ.

5. FUNZIONI COMPLEMENTARI TIPICHE IN CAMPI APERTI. — Consideriamo ora il caso in cui C e C_1 sono separati da una linea semplice

⁽¹⁾ Cfr. ad esempio, CISOTTI, *Idromeccanica piana*. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1921, pag. 14, formula [1].

aperta l (fig. 2), e mettiamo in corrispondenza biunivoca C e C_1 rispettivamente coi semipiani $\Gamma (Y \geq 0)$ e $\Gamma_1 (Y \leq 0)$ del piano $Z = X + iY$ (fig. 4).

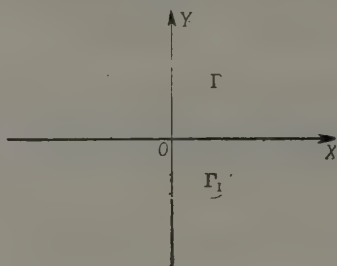


Fig. 4.

Siano:

$$[16] \quad z = \Phi(Z) \quad , \quad Z = \Phi^*(z)$$

le relazioni che mettono in corrispondenza biunivoca e conforme il campo C del piano $z = x + iy$ col semipiano $Y \geq 0$ del piano $Z = X + iY$. Analogamente siano:

$$[17] \quad z_1 = \Phi_1(Z_1) \quad , \quad Z_1 = \Phi_1^*(z_1)$$

le relazioni che stabiliscono l'analoga corrispondenza tra il campo C_1 e il semipiano $Y \leq 0$ del piano $Z = X + iY$.

Ma, com'è noto, i due semipiani Γ e Γ_1 del piano Z si possono mettere in corrispondenza fra di loro mediante la nota relazione

$$[18] \quad Z_1 = \bar{Z}.$$

Per questa relazione, in particolare a un punto Z dell'asse reale, considerato appartenente a Γ , corrisponde in Γ_1 il punto $\bar{Z} = Z$ coincidente con Z :

$$[19] \quad \bar{Z} = Z \quad \text{sopra } l,$$

cioè Z e Z_1 assumono nei punti di l valori reali coincidenti.

Per mezzo della relazione [18] si possono mettere direttamente in corrispondenza conforme le due regioni C e C_1 del piano z : basta eliminare Z e Z_1 tra le due ultime delle [16] e [17], ottenendo:

$$[20] \quad \Phi_1^* = \bar{\Phi}^*;$$

questa relazione mette direttamente in corrispondenza le due regioni complementari C e C_1 : in punti corrispondenti z e z_1 , le funzioni Φ^* e

Φ_1^* assumono valori coniugati, in particolare, nei punti di l sono reali coincidenti. Sono le funzioni complementari tipiche che dipendono manifestamente dalla forma della linea l , che costituisce il contorno comune a C e C_1 .

Risolvendo la [20] rispetto a z_1 si ottiene:

$$[21] \quad z_1 = \Phi_1(\bar{\Phi}^*);$$

risolvendola invece rispetto a z si ha:

$$[22] \quad z = \Phi(\bar{\Phi}_1).$$

Anche qui si può rilevare che le precedenti relazioni [21] e [22] si possono dedurre formalmente una dall'altra col semplice scambio di z in z_1 e

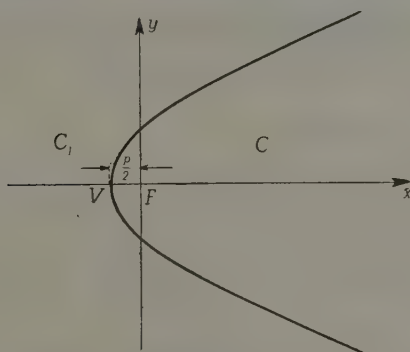


Fig. 5.

contemporaneamente di Φ in Φ_1 . Per esempio, nel caso di l rettilineo e coincidente coll'asse reale le [16] risultano essere: $z = Z$ e $Z = z$, per cui

$$\Phi(Z) = Z, \quad \Phi_1(Z_1) = Z_1, \quad \Phi^*(z) = z, \quad \Phi_1^*(z_1) = z_1,$$

con che la [20] diviene

$$z_1 = \bar{z},$$

com'è noto.

Se l è la parabola di parametro p della figura 5 le funzioni complementari tipiche sono ⁽¹⁾

$$\Phi^* = iCh\pi \sqrt{\frac{z}{2p}}, \quad \Phi_1^* = i\sqrt{p} - \sqrt{2z_1}.$$

⁽¹⁾ Loco primo indicato, formule [19] e [20].

6. FUNZIONI COMPLEMENTARI GENERICHE. — Sia $f(z)$ funzione analitica regolare in C , consideriamo i valori che essa assume nei punti z di l . Si introduca la seguente funzione f_1 dei punti z_1 di C_1 :

$$[23] \quad f_1 = \bar{f},$$

con che f_1 assume su l i valori coniugati di f ; ne segue che se si considera la funzione $f + f_1 = f + \bar{f}$ essa assume in tutti i punti di l valori reali. Si può concludere che a ogni funzione analitica regolare in C si può far corrispondere in C_1 una funzione f_1 che assume su l valori coniugati di f : f e f_1 sono funzioni complementari.

7. ESTENSIONE DI UNA FORMULA NOTA. — È noto ⁽¹⁾ che se in ogni punto di l due funzioni: f dei punti z di C e f_1 dei punti z_1 di C_1 assumono valori complessi coniugati, per cui chiamando φ la parte reale comune si ha

$$f + f_1 = 2\varphi \quad \text{sopra } l,$$

risultano le seguenti relazioni:

$$[24] \quad \begin{cases} f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\varphi d\zeta}{\zeta - z} - f_1(\infty) & \text{in } C, \\ f_1(z_1) = f_1(\infty) - \frac{1}{\pi i} \int_l \frac{\varphi d\zeta}{\zeta - z_1} & \text{in } C_1. \end{cases}$$

Supponiamo $f_1(\infty) = 0$; per l'applicazione di queste ultime formule, per esempio la prima, converrà riferire l'integrazione invece che al contorno l comune a C e C_1 , all'asse reale $Y=0$ che è contorno comune dei semipiani Γ e Γ_1 del piano $Z = X + iY$; su tale contorno è:

$$Z = \bar{Z} = X \quad -\infty \leq X \leq +\infty.$$

Si ha allora per le [22] e [21],

$$z = \Phi(X) \quad , \quad z_1 = \Phi_1(X) \quad \text{sopra } l,$$

per cui

$$dz = d\zeta = \Phi' dX,$$

designando Φ' derivazione rispetto a X ; allora la prima di [24], postovi $f_1(\infty) = 0$, diviene:

$$[25]. \quad f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi[\Phi] \Phi' dX}{\Phi - z}.$$

(1) Loco primo citato, pag. 531.

Questa formula definisce la funzione di z regolare in C noti i valori $\varphi[\Phi]$ che la sua parte reale assume su l , e costituisce una estensione a un campo aperto C di una formula ben nota relativa a un semipiano. Infatti se C è un semipiano, risulta

$$\Phi = z \quad , \quad \Phi' = 1 ;$$

allora la [25] diviene:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi dX}{z - X} ,$$

che è appunto la formula nota ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare*. « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII (1911), pag. 15.

Matematica (Analisi). — *Sulle medie aritmetiche della serie di Taylor.* Nota di NICOLA OBRESCHKOFF, presentata⁽¹⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. Secondo le proprietà fondamentali della sommazione di CESÀRO, se la serie di TAYLOR

$$[1] \quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

converge, essa sarà sommabile (C, k) per ogni $k > 0$ con somma uguale alla somma ordinaria della serie [1]. Ma l'approssimazione per le medie $S_n^{(k)}$ della serie [1] non è più forte.

In un precedente lavoro abbiamo dato⁽²⁾ una nuova formula per le medie $S_n^{(k)}$, con k intero, che è la seguente:

$$[2] \quad f(a+h) = S_n^{(k)} + \frac{A_n^{k-1}}{A_n^k} \frac{h}{1!} f'(a+h) - \\ - \frac{A_n^{k-2}}{A_n^k} \frac{h^2}{2!} f''(a+h) + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{A_n^k} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a+h) + R_n,$$

$$[3] \quad R_n = \frac{(-1)^k}{(n+k)!} \int_a^{a+h} (a+h-t)^n (t-a)^k f^{(n+k+1)}(t) dt.$$

Nell'attuale lavoro dimostriamo dapprima la formula [2] con un'altra forma del resto R_n , senza servirsi degli integrali, dunque sotto ipotesi più generali per la derivata $f^{(n+k+1)}(t)$. Supponiamo che la funzione $f(x)$ ammetta derivate nell'intervallo $(a, a+h)$ fino all'ordine $n+k+1$ e che le derivate $f^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n+k$, siano continue per

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 9 aprile 1943.

⁽²⁾ N. OBRESCHKOFF, *Neue Quadraturformeln*. « Abhandlungen der Preussischen Akad. der Wissenschaften », 1940, 4, 1-20. Un'altra dimostrazione della formula [2] è stata data da G. KOWALEWSKI, *Ueber das neue Theorem von Obreschkoff*. « Deutsche Mathematik », VI, 1942, 349-351.

$a \leq x \leq a + h$, ed $f^{(n+k+1)}(x)$ esista solamente in $(a, a + h)$ e se diviene infinita essa conservi il suo segno intorno a tali punti di infinito.

Designiamo con $g(x; f, k)$ la funzione, $b = a + h$,

$$g(x; f, k) = \sum_{v=0}^n A_{n-v}^k \frac{(b-x)^v}{v!} f^{(v)}(x) + \sum_{\mu=0}^k (-1)^{\mu-1} A_n^{k-\mu} f^{(\mu)}(b) \frac{(b-x)^\mu}{\mu!},$$

e consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = g(x; f, k) + (b-x)^p P,$$

p essendo un numero reale arbitrario più grande di k e il numero P essendo determinato dalla condizione $\varphi(a) = 0$. Per la derivata di $g(x; f, k)$ si ottiene

$$\begin{aligned} g'(x; f, k) &= - \sum_{v=1}^n A_{n-v}^k \frac{(b-x)^{v-1}}{(v-1)!} f^{(v)}(x) + \sum_{v=0}^n \frac{(b-x)^v}{v!} A_{n-v}^k f^{(v+1)}(x) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^k (-1)^{\mu-1} A_n^{k-\mu} f^{(\mu)}(b) \frac{(b-x)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ &= \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{k-1} \frac{(b-x)^v}{v!} f^{(v+1)}(x) + \sum_{\mu=0}^{k-1} (-1)^{\mu-1} A_n^{k-1-\mu} f^{(\mu+1)}(b) \frac{(b-x)^\mu}{\mu!}, \end{aligned}$$

poichè

$$A_n^k - A_{n-1}^k = A_n^{k-1}.$$

Si vede dunque che $g'(x; f, k)$ è uguale all'espressione $g(x; f', k-1)$, che corrisponde alla funzione $f'(x)$. Si avrà successivamente

$$\varphi'(x) = g(x; f', k-1) - p(b-x)^{p-1} P,$$

$$\varphi''(x) = g(x; f'', k-2) + p(p-1)(b-x)^{p-2} P,$$

.....

$$\varphi^{(k)}(x) = g(x; f^{(k)}, 0) + (-1)^k p(p-1) \cdots (p-k+1)(b-x)^{p-k} P,$$

dove

$$g(x; f^{(k)}, 0) = \sum_{v=0}^n \frac{(b-x)^v}{v!} f^{(v+k)}(x) - f^{(k)}(b).$$

Dunque si avrà infine

$$\varphi^{(k+1)}(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+k+1)}(x) + (-1)^{k+1} p(p-1) \cdots (p-k)(b-x)^{p-k-1} P.$$

È evidente che si ha

$$\varphi(b) = \varphi'(b) = \varphi''(b) = \dots = \varphi^{(k)}(b) = 0.$$

Poiché $\varphi(a) = 0$, esiste un numero α , almeno, $a < \alpha_1 < b$, tale che $\varphi'(\alpha_1) = 0$. Esiste poi un numero α_2 , $\alpha_1 < \alpha_2 < b$, tale che $\varphi''(\alpha_2) = 0$; e così di seguito. Dunque esiste almeno un numero γ , $a < \gamma < b$, tale che

$$\varphi^{(k+1)}(\gamma) = \frac{(b-\gamma)^n}{n!} f^{(n+k+1)}(\gamma) + (-1)^{k+1} p(p-1) \dots (p-k) (b-\gamma)^{n-k-1} P = 0.$$

Da qui si ottiene per P l'espressione

$$P = (-1)^k \frac{(b-\gamma)^{n+k+1-p}}{n! p(p-1) \dots (p-k)} f^{(n+k+1)}(\gamma).$$

Ponendo $b = a + h$, $\gamma = a + \theta h$, $0 < \theta < 1$, si ottiene la formula [2] col resto:

$$[4] \quad f(a+h) = \sum_{v=0}^n \frac{A_n^k}{A_n^k} \frac{h^v}{v!} f^{(v)}(a) + \\ + \frac{1}{A_n^k} \sum_{\mu=1}^k (-1)^{\mu-1} A_n^{k-\mu} \frac{h^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(a+h) + R_n,$$

dove R_n è dato da

$$[5] \quad R_n = (-1)^k \frac{h^{n+k+1} (1-\theta)^{n+k+1-p}}{n! A_n^k p(p-1) \dots (p-k)} f^{(n+k+1)}(a+\theta h),$$

$0 < \theta < 1$, p essendo un numero reale, $p > k$. Naturalmente la formula [5] s'ottiene anche dalla [3] per il caso in cui $f^{(n+k+1)}(x)$ è integrabile e finita.

La formula [4] ci mostra che l'approssimazione della funzione $f(x)$ per le medie di CESÀRO della serie [1] con i termini supplementari è molto grande e aumenta se si fa crescere il numero n o k . Essa può venir utilizzata per il calcolo di $f(a+h)$, o per lo studio della sommabilità (C, k) della serie di TAYLOR. Inversamente, conoscendo la funzione $f(x)$, essa ci dà formule asintotiche per le medie di CESÀRO della serie [1] quando $n \rightarrow \infty$.

Osserveremo che la formula [3] per il resto si ottiene facilmente per induzione. Per $k=0$ è vera, poichè si riduce alla formula classica di BERNOULLI e LAGRANGIA. Supponiamo che sia vera per $k-1$. Allora si ha

$$[6] \quad g(x; f, k-1) = \frac{(-1)^k}{n! (k-1)!} \int_x^b (b-t)^n (t-x)^{k-1} f^{(n+k+1)}(t) dt.$$

Poichè

$$\frac{d}{dx} g(x; f, k) = g(x; f', k-1) \quad , \quad g(b; f, k) = 0,$$

integrando la [6] si ottiene

$$g(x; f, k) = \frac{(-1)^{k+1}}{n! k!} \int_x^b (b-t)^n (t-x)^k f^{(n+k+1)}(t) dt.$$

2. Consideriamo ora un caso particolare interessante. Poniamo $k = n$; poichè

$$\frac{A_n^{n-v}}{A_n^n} = \frac{A_{n-v}^k}{A_n^n} = \frac{\binom{n}{v}}{\binom{2n}{v}},$$

si ottiene la formula

$$[7] \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{v=1}^n \frac{\binom{n}{v}}{\binom{2n}{v}} \frac{h^v}{v!} [f^{(v)}(a) - (-1)^{v-1} f^{(v)}(a+h)] + R_n,$$

dove per R_n si hanno le formule

$$[8] \quad R_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_a^{a+h} (a+h-t)^n (t-a)^n f^{(2n+1)}(t) dt$$

$$[9] \quad R_n = (-1)^n \frac{h^{2n+1} (1-\theta)^{2n+1-p}}{n! A_n^n p(p-1) \cdots (p-n)} f^{(2n+1)}(a+\theta h).$$

Per $p = 2n+1$ l'espressione [9] diviene

$$[10] \quad R_n = (-1)^n \frac{h^{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{n!}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n+1)}(a+\theta h).$$

Lo sviluppo [7] con la formula [10] per il resto è stato dato senza dimostrazione da PETR ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ K. PETR, « Casopis », 44, 1915, pag. 454. Io ho trovato questa formula senza conoscere la Nota di PETR, sulla quale ha richiamato la mia attenzione F. SEVERI.

La formula [7] con il resto [9] è stata oggetto di ricerche molto più complicate di WATSON ⁽¹⁾ e di RICCI ⁽²⁾. Questi due autori non hanno trovato la formula integrale [8] del resto R_n .

Facciamo ancora un'osservazione. Se integriamo per parti n volte, troviamo la formula

$$R_n = \frac{1}{(2n)!} \int_a^{a+h} \varphi^{(n)}(t) f^{(n+1)}(t) dt,$$

$$\varphi(t) = (a+h-t)^n (t-a)^n.$$

Introducendo i polinomi di LEGENDRE

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n],$$

si vede che R_n è uguale a

$$[11] \quad R_n = \frac{n! (-1)^n}{2 (2n)!} h^{n+1} \int_{-1}^1 P_n(x) f^{(n+1)} \left(a + \frac{h}{2} + \frac{h}{2} x \right) dx.$$

Da qui abbiamo

$$|R_n| \leq \frac{h^{n+1}}{2 (2n)!} \mu_{n+1} \int_{-1}^1 |P_n(x)| dx, \quad \mu_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)| \quad a \leq x \leq a+h.$$

La disuguaglianza di SCHWARZ ci dà

$$\left(\int_{-1}^1 |P_n(x)| dx \right)^2 \leq 2 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{4}{2n+1}.$$

Dunque si avrà per R_n

$$[12] \quad R_n = \frac{\theta h^{n+1}}{(2n)! \sqrt{2n+1}} \mu_{n+1}, \quad |\theta| < 1.$$

La formula [11] per il resto ci mostra che per l'esistenza di [7] basta che la funzione $f(x)$ sia derivabile solamente $n+1$ volte.

⁽¹⁾ G. N. WATSON, *Ueber eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten integrale*. « Casopis », 65, 1935, pag. 1-7.

⁽²⁾ G. RICCI, *Su una formula di K. Petr per il calcolo numerico degli integrali definiti*. « Annali di matematica pura e applicata », XV, 1936.

3. Faremo ora qualche osservazione generale sulle formule di quadratura. Queste formule possono essere dedotte da una formula generale. Sia $P(x)$ un polinomio di grado m tale che $P^{(m)}(x) = 1$, e sia $F(x)$ una funzione derivabile m volte in (a, b) . Per l'integrale

$$j = \int_a^b F^{(m)}(x) P(x) dx,$$

integrando per parti m volte, si ottiene

$$j = [F^{(m-1)}(x) P(x) - F^{(m-2)}(x) P'(x) + \dots + (-1)^{m-2} F'(x) P^{(m-1)}(x)]_a^b + (-1)^m \int_a^b F(x) P^{(m)}(x) dx.$$

Si ottiene anche la formula

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu [F^{(\nu)}(b) P^{(m-1-\nu)}(b) - F^{(\nu)}(a) P^{(m-1-\nu)}(a)] + R_m,$$

$$R_m = (-1)^m \int_a^b F^{(m)}(x) P(x) dx.$$

Per esempio, ponendo $m = n + k$, $b = a + h$, $F(x) = f'(x)$,

$$P(x) = \frac{(-1)^n}{(n+k)!} (b-x)^n (x-a)^k,$$

si ottiene la formula [2] con il resto [3], e così via.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1942 ed andamento del ciclo solare* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera solare effettuate con l'equatoriale di AMICI ad Arcetri nel 1942, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Scegliendo le giornate in cui si presentavano buone immagini, sono state eseguite dal personale dell'osservatorio, in maggioranza da A. COLACEVICH, 49 osservazioni, che danno le seguenti medie:

Arcetri

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	11".08	— 90° S	11".21
+ 60 E	10 .36	— 60 W	10 .72
+ 30 E	9 .87	— 30 W	10 .13
0 E	10 .20	0 W	10 .08
— 30 E	10 .11	+ 30 W	10 .39
— 60 E	10 .84	+ 60 W	10 .13

Da questi dati si rileva l'altezza media generale per il 1942: 10".43, che si può mettere a confronto con quella dell'anno precedente: 10".40:

$$1942 - 1941 = + 0".03$$

quindi, come già da qualche anno, l'altezza media è rimasta costante. Invece, in accordo a quanto si accennava già l'anno scorso, si nota un deciso

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri-Firenze.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

innalzamento della cromosfera ai poli di rotazione, come deve avvenire verso il minimo, a conferma di quanto è stato trovato nei precedenti cicli.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle stazioni di Arcetri e Catania risulta ancora diminuita di 35 unità di protuberanza rispetto al 1941 con indicazione che, per questo fenomeno dell'attività solare, dobbiamo essere vicini al minimo.

Confrontando l'attività delle protuberanze nei due emisferi si nota come quest'anno, a differenza dell'anno passato, l'emisfero sud è più attivo di quello nord, non solo, ma la distribuzione è notevolmente diversa nei due emisferi, avendosi un solo massimo esteso attorno a $+ 25^\circ$ di latitudine nell'emisfero boreale, mentre in quello australe il massimo è decisamente spostato a più alta latitudine, verso $- 45^\circ$. Ambedue questi fatti portano a supporre, che l'emisfero australe sia più avanzato nel ciclo undecennale di quello boreale, essendo già iniziata nel primo, la migrazione delle protuberanze verso i poli. Ricordiamo che nella media dei cicli la comparsa delle protuberanze ad alte latitudini di solito incomincia uno o due anni dopo il massimo e quindi in questo ciclo sembra si presenti un qualche ritardo.

Quanto alle altre caratteristiche dell'attività solare, dalle osservazioni di Arcetri si hanno per il 1942 i seguenti dati:

numero relativo delle macchie: 35.2,

per i flocculi chiari di calcio (K_3): 1.22 (su di una scala empirica da 0, minima attività, a 5, massima),

per i flocculi chiari di idrogeno (H_α): 0.85,

per i flocculi oscuri di idrogeno (H_α): 0.92,

anche queste tutte in diminuzione rispetto al 1941.

In contrapposto alle zone di maggior frequenza delle protuberanze, i gruppi di macchie, che furono circa 60 in ogni emisfero, si sono presentate, in quello boreale fra $+ 7^\circ$ e $+ 12^\circ$ con maggior frequenza a $+ 10^\circ$, in quello australe fra $- 1^\circ$ e $- 11^\circ$, col massimo a $- 8^\circ$. La maggiore attività solare ha avuto luogo nei mesi di febbraio, marzo ed aprile, mentre dal maggio in poi è stata molto modesta.

Un notevole gruppo di macchie alla latitudine di $+ 7^\circ$ fu visibile ad occhio nudo dal 25 febbraio al 4 marzo; il 28 febbraio si sono fotografate alla torre solare intense eruzioni cromosferiche nell'interno del gruppo. A questa perturbazione devono attribuirsi la forte tempesta magnetica e l'aurora boreale registrata sulla terra il 1° marzo.

Altre eruzioni cromosferiche sono state registrate il 7 luglio in un gruppo di macchie a latitudine $- 5^\circ$ ed il 1° dicembre in un gruppo alla stessa latitudine.

Astronomia. — *Sopra l'origine dei pianeti dal Sole.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. La presente Nota si propone di esaminare se — nell'ipotesi che i pianeti siano originati dal globo solare e qualora si faccia esclusione della teoria nebulare di Laplace, o simili — sia necessario ammettere l'intervento di un secondo astro, passato a piccola distanza dal Sole stesso. Vedremo che la risposta sarà negativa e vedremo anzi che dal nostro ragionamento si deduce una conseguenza di notevole importanza; e cioè che difficilmente potrebbero esistere, oltre ai pianeti già noti, altri grandi pianeti di origine solare. In altre parole, vedremo che se al di là di Plutone vi fossero altri grandi pianeti, questi dovrebbero ritenersi probabilmente come corpi estranei catturati dal Sole. Ma veniamo senza altro all'argomento e, per maggiore chiarezza, cominciamo col ricordare alcuni principi sopra la costituzione interna delle stelle.

2. Supponiamo il Sole presso a poco sferico e sia m la sua massa ed r il suo raggio. Sappiamo allora dalla Meccanica che, se esso fosse omogeneo, il suo momento d'inerzia C rispetto all'asse di rotazione sarebbe dato dal prodotto $0,4 mr^2$. Se invece il globo solare, anzichè essere omogeneo, presenta una qualche condensazione centrale, porremo C sotto la forma:

$$[1] \quad C = \alpha mr^2$$

dove il coefficiente α (ovviamente minore di 0,4 se la materia si addensa verso il centro) dipenderà dalla distribuzione interna delle densità.

Il caso più importante si ha quando si supponga che la densità interna solare vari secondo la legge dell'equilibrio radiativo; in tal caso, come insegna la teoria ⁽²⁾, la pressione p e la densità ρ sono legate dalla relazione:

$$[2] \quad p\rho^{4/3} = \text{costante}$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 9 aprile 1943.

⁽²⁾ Cfr. per esempio, EDDINGTON, *The internal constitution of the stars.* (Cambridge, 1926).

relazione che è identica a quella dell'equilibrio adiabatico, con la sola differenza che l'esponente, invece di essere eguale al rapporto dei due calori specifici del gas, è eguale a $4/3$.

È noto pure che il problema delle costituzione interna delle sfere gassose fu studiato ⁽¹⁾ da EMDEN, nell'ipotesi che p e ρ siano legati dalla relazione

$$[3] \quad p\rho^\gamma = \text{costante}$$

ric conducendolo ad un'equazione differenziale non riducibile alle quadrature, ma che egli integra numericamente. E precisamente per $\gamma = 4/3$, EMDEN trova $\alpha = 0,075$, valore che corrisponde ad una densità centrale circa 54 volte maggiore della densità media.

Tale risultato fu adottato da EDDINGTON; ma più recentemente MILNE ed anche JEANS — il quale ultimo suppone che il nucleo stellare sia liquido, anzi che gassoso — hanno ammesso una condensazione centrale ancora maggiore e quindi danno implicitamente ad α un valore più piccolo. In conseguenza, secondo vari astronomi moderni ⁽²⁾, il valore $\alpha = 0,075$ dovrebbe assumersi come un limite superiore.

3. Premesso tutto ciò, supponiamo che gli odierni pianeti siano nati dal Sole, senza intervento di corpi estranei. Allora (almeno astraendo dalla trasformazione di massa in energia) il momento della quantità di moto del Sole primitivo era eguale a quello complessivo di tutto il Sistema Planetario odierno. E quindi, se s'immagina conosciuto il valore di α , potremo calcolare la velocità angolare di rotazione del Sole primitivo e in conseguenza, almeno approssimativamente, il rapporto tra l'attrazione e la forza centrifuga all'equatore. Ovviamente, se i pianeti sono nati dal Sole senza intervento di corpi estranei, queste due forze dovevano approssimativamente equilibrarsi e quindi il loro rapporto doveva essere circa eguale all'unità.

4. Ciò posto, noi ci proponiamo di rispondere alle due seguenti domande:

I) *Supponendo che tutti i pianeti siano originati dal Sole, quale è il valore di α per cui, nel Sole primitivo, la forza centrifuga all'equatore avrebbe eguagliato la forza attrattiva?*

II) *Tale valore di α è ammissibile, secondo i concetti ora esposti sopra la costituzione interna delle stelle?*

⁽¹⁾ Cfr. EMDEN, *Gaskugeln*, pag. 80.

⁽²⁾ Cfr. MARKOWITZ, *The constitution of binary stars*, pag. 75 in « *Astroph. Journal* », vol. LXXV.

Notiamo subito che, rigorosamente parlando, il problema supera le forme della meccanica celeste moderna, giacchè — se si suppone che all'equatore la forza centrifuga eguagliasse la gravità. — il Sole avrebbe assunto una forma schiacciata (forma generalizzata di Roche) con l'asse polare eguale circa a $2/3$ di quello equatoriale, mentre gli studi di EMDEN si riferiscono invece alla forma sferica. In pratica però, giacchè per i nostri studi cosmogonici a noi interessa solo l'ordine di grandezza, potremo adoperare con sufficiente approssimazione i risultati di EMDEN.

5. A tale scopo, siano m , r ed ω la massa, il raggio e la velocità angolare di rotazione del Sole attuale e K_p il momento della quantità di moto degli attuali pianeti, che secondo i calcoli di GIALANELLA ⁽¹⁾ risulta eguale a $3,127 \cdot 10^{50}$ in unità C.G.S. Il momento K della quantità di moto di tutto il Sistema Planetario, poichè i pianeti si muovono presso a poco nel piano dell'equatore solare, sarà quindi:

$$[4] \quad K = K_p + \alpha m r^2 \omega.$$

Indichiamo ora con M , R , Ω la massa del Sole primitivo (eguale a quella complessiva dei pianeti e del Sole attuale), il suo raggio e la sua velocità angolare di rotazione. Per la costanza del momento avremo:

$$[5] \quad K = \alpha M R^2 \Omega$$

da cui ricaviamo come valore della forza centrifuga all'equatore:

$$[6] \quad F = R \Omega^2 = \frac{K^2}{\alpha^2 M^2 R^3} = \frac{(K_p + \alpha m r^2 \omega)^2}{\alpha^2 M^2 R^3}.$$

D'altra parte, poichè il globo solare s'immagina con forte condensazione centrale, la forza attrattiva all'equatore sarà prossimamente:

$$[7] \quad G = \frac{f M}{R^2}.$$

Eguagliando F con G e riducendo abbiamo allora

$$[8] \quad \alpha^2 (f M^3 R - m^2 r^4 \omega^2) - 2 K_p m r^2 \omega \alpha - K_p^2 = 0$$

equazione di secondo grado in α .

6. Per eseguire il calcolo numerico, supponiamo che non vi sia stata nessuna sensibile diminuzione di massa e che il raggio solare antico sia stato pure poco diverso da quello attuale: avremo allora $R = r$ ed $M = m + \mu$, dove μ indica la massa complessiva dei pianeti attuali.

⁽¹⁾ Cfr. GIALANELLA, *Il momento della quantità di moto del Sistema Planetario* in « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1936, sem. I.

Prendendo le unità del sistema C. G. S. si ha dall'astronomia:

$$\begin{aligned} f &= 6,664 \cdot 10^{-8} & ; & \quad \omega = 2,776 \cdot 10^{-6} \text{ (rad/sec)} & ; & \quad r = 6,953 \cdot 10^{10} \\ M &= 1,985 \cdot 10^{33} & ; & \quad m = 1,983 \cdot 10^{33} & ; & \quad K_p = 3,127 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

Con questi dati, la [8] diviene:

$$[9] \quad \alpha^2 - 0,000459 \alpha - 0,002697 = 0$$

equazione che ha una sola radice positiva e precisamente $\alpha = 0,052$. Ora tale numero è poco lontano ed anzi supera i due terzi del valore 0,075 che, come dicemmo, sembra forse superiore al vero; se ne conclude che il valore 0,052 è *completamente ammissibile*.

Ne deduciamo che nel Sole primitivo la forza d'attrazione all'equatore era presso a poco eguale, od almeno poco diversa, dalla forza centrifuga e quindi che i pianeti poterono uscire dall'equatore solare anche in causa di forti parossismi dell'astro, senza bisogno dell'attrazione di un'altra stella passata a grande vicinanza. Ne deduciamo pure che il Sole primitivo, allorchè conteneva tutti i pianeti odierni, era, per così dire, *saturo* di momento della quantità di moto; onde - se esistessero altri grandi pianeti al di là di Plutone - questi dovrebbero logicamente ritenersi come catturati dal Sole od almeno aventi origine extra-solare.

Dalla [4] e [5] si ha poi:

$$[10] \quad \Omega = \frac{K_p + \alpha m r^2 \omega}{\alpha M R^2}$$

dalla quale, col valore trovato di α , abbiamo:

$$\Omega = 0,000628 \text{ rad/sec.}$$

ciò che corrisponde ad una rotazione solare della durata di circa tre ore.

7. JEANS, nel suo ben noto trattato di Astronomia e Cosmogonia, ha rilevato⁽¹⁾ che il Sole avrebbe potuto dar origine spontaneamente (e cioè con le sole sue forze, senza invocare l'intervento di un'altra stella passata in vicinanza) ai pianeti, eruttandoli dal bordo equatoriale, qualora la sua massa fosse stata *sufficientemente addensata* verso il centro. Ma egli non si è accorto - ed è appunto ciò che volevamo mettere in rilievo nella presente Nota - di un fatto importante e cioè che la *concentrazione necessaria* per

⁽¹⁾ Thus, notwithstanding its present small angular moment, the Sun could have broken up in this way, if its mass had been sufficiently centred at its centre. (JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, pag. 388. Cambridge, Univ. Press, 1928).

la nascita spontanea dei pianeti è presso a poco quella stessa che risulta dalla teoria dell'equilibrio radiativo.

Lo stesso autore però solleva ⁽¹⁾ due gravi difficoltà contro tale origine, e cioè dichiara che in questa ipotesi:

I) Il Sole dovrebbe ancora possedere una forte velocità angolare di rotazione e quindi una forma notevolmente schiacciata. Infatti, poichè i pianeti hanno una massa assai piccola rispetto a quella solare, il loro distacco dal Sole avrebbe prodotto verosimilmente nel Sole stesso una diminuzione abbastanza piccola del momento della quantità di moto.

II) Le orbite planetarie si svolgerebbero probabilmente a piccola distanza dal Sole. Inoltre – aggiungiamo noi – i loro perielii dovrebbero verosimilmente trovarsi nelle immediate vicinanze del Sole stesso, e cioè le orbite planetarie sarebbero ellissi assai allungate.

Queste difficoltà sono certamente assai gravi, se si ammette, come legge di attrazione, l'ordinaria legge di NEWTON. Ma esse spariscono facilmente se si completa la legge newtoniana con la aggiunta di un piccolo termine correttivo, in modo da dare all'attrazione il carattere di *forza dissipativa*; ad esempio se si ammette la nostra legge di attrazione, che è certamente la più semplice del genere.

Infatti, in tal caso, come abbiamo già dimostrato in altre Note, il momento della quantità di moto passa lentamente dal Sole ai pianeti, onde il Sole stesso viene a perderlo continuamente, ciò che produce una continua diminuzione della sua velocità di rotazione. Inoltre, come abbiamo pur dimostrato, in tal caso il parametro delle orbite planetarie va sempre aumentando, mentre le eccentricità diminuiscono e quindi le orbite aumentano di dimensione e tendono a divenire circolari.

La spiegazione diviene allora immune da difficoltà ed anzi si comprende facilmente perchè i pianeti siano abbastanza numerosi. Infatti, dopo aver dato origine ai primi pianeti (Nettuno, Urano, ecc.), il Sole restò per qualche tempo ancora dotato di forte momento di quantità di moto, onde la forza centrifuga restò ancora sensibilmente eguale all'attrazione all'equatore, e quindi nuovi accessi parossistici dell'astro poterono produrre facilmente altri pianeti.

Sembra così che possa spiegarsi, in modo assai semplice e naturale, l'origine del nostro Sistema Planetario, senza ricorrere all'ipotesi di LAPLACE e sue derivate, che presentano tutte il fianco a numerose obiezioni; e, d'altro lato, senza invocare l'intervento di un'altra stella passata in prossimità del Sole stesso, cosa che costituisce un fenomeno, a *priori*, altamente improbabile.

(1) Op. cit., pag. 390.

Fisica. — *Sulla dipendenza dal mezzo ambiente delle azioni elettrostatiche, magnetiche, elettromagnetiche, elettrodinamiche.* Nota ⁽¹⁾ di LUIGI PUCCIANTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le leggi di questa dipendenza nei quattro casi sono le seguenti:

1^a *Azioni elettromagnetiche:* proporzionalità inversa alla induttività elettrica del mezzo ambiente.

2^a *Azioni magnetiche:* proporzionalità inversa all'induttività magnetica del mezzo ambiente.

3^a *Azioni elettromagnetiche:* indipendenza dal mezzo ambiente.

4^a *Azioni elettrodinamiche:* proporzionalità diretta all'induttività magnetica del mezzo ambiente.

Esse sono generalmente note e indiscusse.

Ma quanto al modo di interpretarle, la cosa non è così semplice.

Nelle comuni trattazioni si giunge ad esse per vie indirette, e sono presentate piuttosto come particolarità di argomenti diversi, che nel loro insieme, mentre appunto il confronto tra di loro è assai ricco di interesse. Ho l'impressione che sopravviva ancora e sia ancora assai diffusa una valutazione eccessiva della identità formale dei primi due enunciati, conforme alla tradizionale analogia tra i fenomeni elettrostatici e i magnetici, la quale è ormai svuotata di un contenuto intrinseco: d'altra parte le diversità tra la legge 2^a e la 3^a e tra la 3^a e la 4^a, la apparente, anzi appariscente, antinomia tra la 2^a e la 4^a parrebbero a prima giunta interdire una riduzione dei fatti magnetici ad elettrodinamici, cioè la concezione di Ampère, la quale invece ha prevalso (troppo tardi sì, ma definitivamente) nelle teorie che trattano delle proprietà magnetiche dei corpi in rapporto alla loro intima costituzione, ed ha ricevuto conferma sperimentale per opera di DE HAAS e di BARNET.

E ciò non mostra ancora tutta l'importanza dell'argomento, il quale si riconnette anche con la critica del concetto di Etere in rapporto con la

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

teoria della Relatività ⁽¹⁾, e con la necessità, evidente per una trattazione dell'Elettrologia che voglia esser coerente dal principio alla fine, di non attribuire all'Etere proprietà le quali si trovino poi in contraddizione con i concetti di quella teoria.

Questi sommariamente sono i motivi che mi hanno indotto a comporre la presente Nota; nella quale per ciò che concerne le leggi 2^a, 3^a, e 4^a riassumo in parte quel che esposi or sono quasi trent'anni in una mia memoria ⁽²⁾, ma completo il quadro premettendo la interpretazione della legge 1^a al fine principalmente di mostrarne la profonda diversità concettuale da quella 2^a.

A questa pubblicazione mi ha anche incoraggiato il fatto che recentemente il prof. E. PERUCCA ha avuto il merito di richiamare l'attenzione sull'importante problema, con una Nota ⁽³⁾, nella quale parmi si proponga obiettivi diversi dal mio; in effetto egli si pone in un punto di vista diverso; e ciò risparmia una discussione; ma non esclude che io aggiunga, che dal suo punto di vista egli vede acutamente.

Nella presente Nota non tratto tutto ciò (e sarebbe molto e di molto interesse generale) che riguarda la storia delle teorie elettriche e magnetiche, e neanche quegli argomenti che hanno molta affinità col problema propostomi, ma non sono necessari alla sua soluzione. Solo questa espongo nei termini più semplici, quale essa si presenta, a mio avviso, allo stato attuale della scienza, sulla base di verità acquisite.

Nelle poche formule che riporto, uso le solite notazioni riferite ai sistemi di misura elettrostatico ed elettromagnetico secondo il caso: ϵ e μ indicheranno dunque numeri puri, con $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ nello spazio vuoto. Invero l'oggetto che tratto, cioè la diversità delle azioni in seno ai vari mezzi corporei e in confronto a quelle nello spazio vuoto, non implica la considerazione delle cosiddette induttività assolute.

Per le azioni elettrostatiche la cosa è assai semplice: basta ragionare sul seguente presupposto.

Ogni corpo contiene nel suo interno cariche elettriche in grandissimo numero, positive e negative, frammiste in modo che, se il corpo non è elettrizzato, in ogni sua porzione di dimensioni apprezzabili la somma algebrica di esse risulti nulla.

Orbene, un campo elettrico solleciterà tali cariche, le positive in un verso, le negative in verso opposto; se si tratta di un conduttore, avrà

⁽¹⁾ In proposito è importante il discorso tenuto da A. EINSTEIN il 5 marzo 1920 nella Università di Leida: *Aether und Relativitätstheorie* (Berlin, Julius Springer).

⁽²⁾ *La Teoria del Magnetismo secondo Ampère*. «Nuovo Cimento», serie VI, t. IX, p. 411, 1915.

⁽³⁾ «Nuovo Cimento», 1941, fasc. I, pag. 1.

luogo una *migrazione*, se di un isolante, uno *spostamento* ⁽¹⁾ fino a un valore, che ammetteremo proporzionale all'intensità del campo ⁽²⁾; ed essendo questo solenoidale, ogni porzione interna di dimensioni apprezzabili di un corpo omogeneo rimarrà neutra. Solo alla superficie che limita il corpo si formerà uno strato sottilissimo con cariche in eccesso, positive ove il flusso di forza esce, negative ove entra. È quella che viene chiamata *elettricità libera* da coloro i quali riservano il nome di *elettricità vera* alle cariche che danno origine al campo; ma preferisco di chiamare queste, *cariche primarie*, quelle, *secondarie*; perchè vere sono le une e le altre, e « libera » è espressione poco chiara usata invece di non neutralizzata.

Per fare un caso semplice consideriamo un mezzo isolante omogeneo, indefinito con induttività ε e in esso una sfera conduttrice con la carica primaria Q ; la carica secondaria Q' si raccoglierà alla superficie che separa il conduttore dall'isolante, neutralizzando parzialmente l'effetto della carica Q ; cosicchè in un punto P generico il campo, che avrebbe nel vuoto il valore

$$E_0 = \frac{Q}{r^2}$$

avrà quello

$$E = \frac{Q - Q'}{r^2}.$$

Quindi la proporzione

$$E_0 : E = Q : Q - Q'$$

ma

$$E = \varepsilon E_0$$

onde

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Se, invece che di una sfera si tratta di un corpo conduttore di forma generica, anzichè alle cariche totali, ci riferiremo alle densità superficiali σ e σ' e scriveremo

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

L'indebolimento del campo prodotto dalle cariche secondarie ha per ovvia conseguenza la diminuzione nel rapporto da ε a 1 della differenza di potenziale fra le armature di un condensatore, cioè l'aumento

⁽¹⁾ Non si tratta dell'ipotetico spostamento di MAXWELL, ma di uno spostamento reale, come per il conduttore è reale la migrazione.

⁽²⁾ Se non vi fosse proporzionalità fra spostamento e campo, entro un corpo isolante omogeneo non sarebbe valida la legge di COULOMB.

nel rapporto da 1 a ϵ della capacità rispetto al valore che si avrebbe quando lo spazio compreso fra le armature fosse vuoto. È invece bene notare che si tratta sempre di un indebolimento; perchè non esiste alcun isolante per cui sia $\epsilon < 1$ ⁽¹⁾. Il che nelle concezioni e locuzioni tradizionali si esprimerebbe dicendo: non esiste nella Elettrostatica il caso analogo al diamagnetismo; ma tali concezioni sono ormai superate.

Meno facile è l'interpretazione delle leggi 2^a, 3^a, e 4^a, nella prima e nell'ultima delle quali compare l'induttività magnetica; ma anche questa interpretazione risulta chiara, se si accetta la concezione ampèriana, essenziale per la teoria elettrodinamica del magnetismo.

Ponendosi dunque in questo punto di vista il primo caso da prendere in considerazione è il 4^o; chiarito il quale si passerà logicamente a chiarire il 3^o e il 2^o.

Consideriamo dunque un circuito di filo sottile, percorso da una corrente costante, dapprima nello spazio vuoto; in un qualsiasi punto dello spazio circostante, dal quale il circuito sia visto sotto l'angolo solido Ω

$$H = \text{gradi } i \Omega$$

sarà il vettore mediante il quale si può calcolare la forza agente su un elemento di filo percorso pure da corrente, o sopra una carica elettrica in moto.

Quando lo spazio circostante, anzichè vuoto, sia occupato da un mezzo corporeo d'induttività μ , omogeneo, indefinito, questo sarà per effetto del campo H modificato nel modo che è in linea generale prevedibile, se si parte dal seguente presupposto:

Le cariche elettriche positive e negative, che in gran numero sono presenti in un corpo qualsiasi, sono incessantemente agitate da movimenti, i quali, se il corpo non è *magnetizzato*, costituiscono un insieme di correnti elettriche disordinato così, che non si produce dal loro insieme un campo apprezzabile.

Orbene il campo H prodotto dalla corrente i agirà su tali movimenti o correnti elettriche presenti nel mezzo stabilendovi un certo parziale ordinamento in correnti di Ampère, le quali produrranno alla loro volta un campo H_A .

Questo campo si sovrappone a quello H risultandone il campo

$$B = H + H_A = \mu H.$$

⁽¹⁾ Si intende finchè si rimanga nella Elettrostatica. Per campi alternativi di alta frequenza interviene una differenza di fase tra campo e spostamento, fino al caso dell'opposizione, con la quale si spiega l'indice di rifrazione comunemente minore di uno per i raggi Röntgen.

Si intende che questi valori non sono che le medie statistiche di quelli spettanti a singoli fatti elementari dell'ordine molecolare, atomico, elettronico, nella cui analisi noi qui non entriamo.

Limitiamoci per semplicità alla considerazione di materiali isotropi⁽¹⁾: allora manca una *ragione sufficiente* affinchè le direzioni di H_A e di H siano diverse, e si presentano due casi che già P. LANGEVIN mostrò teoricamente possibili sia l'uno che l'altro.

H_A opposto ad H , caso diamagnetico $\mu < 1$

H_A concorde con H , caso paramagnetico $\mu > 1$.

Se poi le interazioni tra le correnti di Ampère sono molto notevoli, si presenta il caso ferromagnetico. Se le correnti di Ampère, una volta orientate, rimangono stabilmente orientate, si avrà il magnete permanente.

Un filo percorso a sua volta da corrente sarà nello spazio circostante sottoposto all'azione del campo totale B : le azioni elettrodinamiche *coeteris paribus* risulteranno dunque proporzionali ai valori di μ per i vari mezzi corporei.

È la 4^a legge.

Nessuna analogia intrinseca con le azioni elettrostatiche. Che se una corrispondenza in senso più che altro formale si vuole stabilire, dovremo far corrispondere al caso diamagnetico, in cui, essendo $\mu < 1$, il campo risulta indebolito per effetto delle correnti di Ampère, quello elettrostatico $\epsilon > 1$, nel quale pure il campo viene indebolito per effetto delle cariche secondarie; invece al caso paramagnetico $\mu > 1$ corrisponderebbe quello $\epsilon < 1$, che non si presenta,

ϵ e μ non sono dunque termini corrispondenti, sibbene ϵ e $1/\mu$, ovvero $1/\epsilon$ e μ .

Tutto ciò non è conforme alla comune tradizione scolastica, ma è ormai accettato da moderni scrittori, e, quel che più importa, è conforme alla realtà.

Quanto alle interazioni tra fili percorsi da correnti, ciò spiega dunque chiaramente perchè esse seguano la legge 4^a.

Ogni circuito, se la corrente che lo percorre ha un'intensità invariabile, produrrà in qualunque mezzo ambiente omogeneo lo stesso campo di H e sarà sollecitato dal campo di B , cioè potrà servire a esplorare il campo di B .

Naturalmente tutto ciò vale qualunque sia la forma dei due circuiti interagenti, purchè essi siano costituiti da fili sottili, che cioè non occupino porzioni di spazio di volume notevole turbando la omogeneità del

⁽¹⁾ Nel caso di materiali anisotropici, μ indicherebbe, anzichè un numero, una omografia vettoriale.

mezzo ambiente. Vediamo ora come con una forma speciale e una opportuna alterazione della omogeneità del mezzo si possa ottenere un tipo di avvolgimenti elettrodinamici, i quali in qualunque mezzo si comportino come magneti permanenti, cioè in modo conforme alle leggi 3^a e 2^a.

A tal fine cominciamo dal considerare un solenoide elettrodinamico di forma tubulare molto allungata e sia:

n_1 il numero di spire di filo sottilissimo avvolte strettamente attorno alla figura tubulare per ogni unità della sua lunghezza;

a l'area abbracciata da ciascuna spira;

i l'intensità della corrente circolante nelle spire.

A questo solenoide potremo applicare le formule, che sarebbero esatte se esso fosse neutro (cioè se la sua figura fosse rientrante), con tanta maggiore approssimazione quanto più grande sia la sua lunghezza rispetto alle sue dimensioni trasversali, e più piccolo il diametro del filo rispetto a queste, cioè, infine, con l'approssimazione che si desidera.

Se tutto lo spazio (eccetto il piccolissimo volume occupato dal filo) è vuoto avremo nello spazio interno

$$H = 4 \pi n_1 i \quad B = 4 \pi n_1 i$$

e attraverso a ciascuna sezione

$$\varphi(H) = 4 \pi a n_1 i \quad \varphi(B) = 4 \pi a n_1 i.$$

Tale flusso, con lo stesso valore per H e per B , nell'interno andrà dall'estremo sud all'estremo nord, e nello spazio esterno ritornerà dall'estremo nord all'estremo sud.

È manifesto che il campo esterno sarà identico a quello prodotto da un solenoide magnetico della stessa forma la cui intensità di magnetizzazione abbia il valore

$$I = n_1 i.$$

Sarà questa appunto la condizione di equivalenza del magnete e del solenoide NELLO SPAZIO VUOTO.

Se invece tutto lo spazio (salvo il piccolo volume occupato dal filo conduttore) è occupato da un mezzo d'induttività $\mu = 1$, i valori dei vettori di B ed H saranno diversi tra loro, cioè sarà

$$\varphi(H) = 4 \pi a n_1 i \quad \varphi(B) = \mu 4 \pi a n_1 i.$$

Il campo all'esterno non sarà più uguale a quello prodotto dal solenoide magnetico con magnetizzazione invariata perchè per questo avremo ora i valori:

$$\varphi(H) = \frac{4 \pi a I}{\mu} \quad \varphi(B) = 4 \pi a I.$$

L'equivalenza sarebbe ristabilita se fosse soddisfatta la condizione più generale

$$I = \mu n_1 i,$$

la quale, contenendo μ , cioè un elemento estrinseco al magnete e al solenoide elettrodinamico, non potrebbe stabilire una equivalenza autentica.

Pensiamo ora che gli estremi della figura tubulare siano chiusi mediante una parete impermeabile al mezzo ambiente, in modo che questo invada sì lo spazio esterno, ma non quello interno alla figura tubulare stessa. Io ho chiamato per brevità un tal solenoide elettrodinamico SOLENOIDE CIECO. Per esso avremo i seguenti valori nell'interno della figura tubulare

$$\varphi(H) = 4\pi an_1 i \quad \varphi(B) = 4\pi an_1 i$$

e ricordando che il campo di B è in ogni luogo privo di divergenza, ne segue che attraverso agli estremi il flusso di B passerà con valore, inalterato, cioè per lo spazio esterno sarà:

$$\varphi(H) = \frac{4\pi an_1 i}{\mu} \quad \varphi(B) = 4\pi an_1 i$$

come per il solenoide magnetico, rimanendo valida in ogni caso la condizione intrinseca di equivalenza

$$I = n_1 i$$

la quale esprime appunto l'uguaglianza di effetto tra le correnti circolanti nel filo e le correnti di Ampère circolanti nell'interno del materiale magnetizzato. Le correnti di Ampère circolanti nell'interno del materiale magnetico di questo, saranno nell'altro sostituite con correnti circolanti regolarmente intorno alla superficie laterale dello spazio tubulare; queste non rappresenteranno altro che, per così dire, una sintesi statistica, conforme a ciò che si fa ordinariamente nella Fisica, quando, per esempio, si considera la massa di un corpo uniformemente distribuita entro il volume, che in realtà è non occupato, ma invaso dai suoi atomi; oppure si considera l'elettricità distribuita uniformemente in uno strato alla superficie di un conduttore, invece di uno affollamento con carattere discreto di elettroni o di protoni in numero prevalente gli uni sugli altri o gli altri sugli uni: infine in tal senso si può dire che il solenoide cieco è un magnete.

L'azione meccanica di un solenoide cieco percorso da corrente invariabile sopra un filo sottile, pure percorso da corrente invariabile, risulterà

indipendente dalla induttività del mezzo ambiente conformemente alla legge 3^a. Da ciò segue per il principio di azione e reazione, che anche l'azione del filo sul solenoide cieco sarà indipendente dalla induttività del mezzo, cioè sarà determinata dal campo di H (non di B) prodotto dal filo.

Il solenoide cieco dunque produrrà in qualunque mezzo circostante lo stesso campo di B e sarà sensibile al campo di H .

E ne segue come conseguenza immediata che le interazioni meccaniche fra due solenoidi ciechi risulteranno inversamente proporzionali alla induttività del mezzo, in conformità della legge 2^a.

Il solenoide, cieco è dunque un oggetto elettrodinamico, diremo anzi manifestamente (non occultamente come il magnete) elettrodinamico, il quale si comporta in tutto e per tutto come un sbarra allungata a magnetizzazione invariabile.

Ecco secondo il concetto ampèriano la interpretazione delle leggi 2^a, 3^a e 4^a.

Tutto ciò è manifestamente condizionato dalla forma molto allungata dei solenoidi, anzi è tanto meglio approssimato quanto più le loro dimensioni trasversali sono trascurabili rispetto alle longitudinali.

Le leggi 2^a e 3^a sono dunque leggi limiti, che varrebbero esattamente solo per solenoidi infinitamente sottili.

E invero entro un solenoide cieco di forma poco allungata il campo sarebbe sensibilmente influenzato dalle correnti di Ampère dello spazio circostante, e tanto più quanto più notevoli fossero le dimensioni trasversali sulle longitudinali.

D'altra parte per una sbarra magnetica di forma così allungata che nel suo interno sia trascurabile quella che dicesi comunemente azione smagnetizzante degli estremi, il flusso del vettore B è sensibilmente dato da $4\pi I$. Ed esiste un semplice metodo capace di controllare la invariabilità della magnetizzazione, ossia di avvertire qualunque variazione eventuale di essa, e valersi di ciò per una correzione dei risultati sperimentali: esso consiste nell'avvolgere intorno a un tratto non troppo prossimo agli estremi, in spire replicate, un filo sottilissimo chiuso sopra un sensibile galvanometro, il quale accuserebbe ogni variazione di I . Un tal metodo sarebbe male applicabile, o meglio i suoi risultati non avrebbero un significato chiaro, nel caso di una sbarra di forma poco allungata, sempre peggio via via che questa fosse più grossa e breve.

Come caso limite si giungerebbe alla cosiddetta *lamina magnetica* la quale è un oggetto non mai realizzato, ma immaginario, e quindi dotato delle proprietà che ai teorici è piaciuto attribuirgli.

In conclusione, oltre la interpretazione delle leggi, si è mostrato, il loro vero carattere, e precisati i casi tipici della loro validità. La legge 1^a sarà sempre valida non solo per cariche puntiformi, ma anche per corpi

conduttori carichi, di qualunque forma, quando tutto lo spazio non occupato da essi sia occupato da un mezzo isolante omogeneo.

Le leggi 2^a e 3^a saranno valide per magneti o solenoidi ciechi di forma molto allungata, anzi sono leggi limiti per solenoidi infinitamente sottili rispetto alla lunghezza.

La legge 4^a sarà valida per fili molto sottili, anzi legge limite per fili infinitamente sottili.

E si vede anche in ciò che non esiste una vera analogia fra magnetostatica ed elettrostatica.

Fisica (Fisica teoretica). — *Intorno alle funzioni armoniche sopra le superficie.* Nota di NICOLA OBRESCHKOFF, presentata ⁽¹⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sia data una superficie A mediante il suo elemento lineare

$$[1] \quad ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2.$$

Una funzione $\varphi(u, v)$ dicesi armonica sopra A se essa soddisfa all'equazione di BELTRAMI

$$[2] \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\Delta} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\Delta} \right) \right] = 0$$

$$(\Delta = \sqrt{EG - F^2}).$$

Una funzione armonica è regolare se essa ammette derivate continue dei due primi ordini: Supponiamo che A sia una superficie analitica. È allora noto che le funzioni armoniche sopra A sono analitiche. Sia $M_0(u_0, v_0)$ un punto della superficie A , nell'interno del quale le funzioni E, F, G sono olomorfe e $\Delta \neq 0$. Basandosi sui teoremi di HOLMGREEN e di HILBERT si può dimostrare l'esistenza di una funzione armonica $g(u, v; u_0, v_0)$, che ⁽²⁾ è regolare in un dominio B di A contenente M_0 , fatta eccezione del punto M_0 stesso, nel quale essa diviene infinita come $\log \gamma$, designando con γ la distanza geodetica dei punti M ed M_0 .

Sia allora D un dominio di B , limitato da una curva C . Descriviamo intorno ad M_0 un piccolo cerchio geodetico $\gamma = \gamma_1 = \text{costante}$, che desi-

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

⁽²⁾ $g(u, v; u_0, v_0) = A_1(M, M_0) \log \gamma + B_1(M, M_0)$, A_1 e B_1 funzioni regolari per $M = M_0$, $A_1(M_0, M_0) = 1$.

gnamo con c . Secondo la formula di GREEN-BELTRAMI, per ogni funzione armonica φ , regolare in D e sopra C , si ha

$$\int_C \left(\varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds = - \int_c \left(\varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds.$$

In questa formula le derivate sono prese secondo la normale interna a C a sinistra e secondo la normale esterna a c a destra. Facendo tendere γ_1 a zero, si vede subito che la parte destra ha il valore limite $-2\pi\varphi(M_0)$ e si ottiene così la formula

$$[3] \quad \varphi(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial g}{\partial n} \right) ds.$$

Se C si riduce alla curva $g = \text{costante}$, si ha:

$$[4] \quad \varphi(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \varphi \frac{\partial g}{\partial n} ds.$$

Sia $\mu(M)$ una funzione arbitraria, definita nei punti di C , che noi supponiamo per semplicità continua su C . Allora l'integrale

$$[5] \quad U(M_0) = \int_C \mu(M) g(M, M_0) ds$$

ci rappresenta il potenziale di semplice strato in senso generalizzato e l'integrale

$$[6] \quad V(M_0) = \int_C \mu(M) \frac{\partial g}{\partial n} ds$$

è il potenziale di doppio strato. Essi sono funzioni armoniche rispetto ad M_0 , perchè della stessa proprietà gode la funzione $g(M, M_0)$. La funzione $U(M_0)$ è continua e la funzione $V(M_0)$ è discontinua quando M_0 traversa C . Sia M_0 interno al contorno C . Allora, ponendo nella [3] $\varphi = 1$, si ha

$$[7] \quad \int_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = -2\pi.$$

Supponiamo ora che M_0 coincida con un punto M' sopra C . È facile vedere che l'integrale [6] esiste. Descriviamo attorno ad M' un piccolo cerchio $\gamma = \varepsilon = \text{costante}$ e designamone con c la parte di esso, che cade

entro D e con C_ε la parte della curva C che si ottiene sopprimendo la parte intersecata dal cerchio $\gamma = \varepsilon$. Si ha allora

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} ds + \int_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial n} ds = 0.$$

Se il punto M' è regolare per C si vede subito che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial n} ds = \pi,$$

e si ottiene così la formula

$$[8] \quad \int_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = -\pi.$$

Allorchè M_0 è esterno a C , si ha

$$[9] \quad \int_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = 0.$$

Si dimostra facilmente, come nel caso del piano, che la funzione

$$V(M_0) - \mu(M') \int_C \frac{\partial g}{\partial n} ds$$

è continua, allorchè M_0 pressa per il punto M' . Designando allora con $V_i(M')$, $V_e(M')$ i valori limiti di $V(M_0)$, allorchè M_0 s'avvicina ad M' all'interno o all'esterno rispettivamente e con $V(M')$ il valore di [6] per $M_0 = M'$, si ottengono le relazioni fondamentali

$$[10] \quad \begin{cases} V_i(M') = V(M') + \pi\mu(M') \\ V_e(M') = V(M') - \pi\mu(M') \end{cases}$$

Tali relazioni ci permettono di risolvere il problema di DIRICHLET come le funzioni armoniche ordinarie.

Sia M_0 un punto interno di D e sia $\psi(M, M_0)$ la funzione armonica regolare in D , che prende il valore $g(M, M_0)$ sopra C . Allora la funzione

$$G(M, M_0) = \psi(M, M_0) - g(M, M_0)$$

è armonica e regolare in D , fatta eccezione del punto M , e prende il valore zero sopra C . È la funzione di GREEN. Si ha l'equazione

$$\int_C \left[(G + g) \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \left(\frac{\partial G}{\partial n} + \frac{\partial g}{\partial n} \right) \right] ds = 0,$$

essendo φ una funzione armonica regolare in D . Da questa formula e dalla [3] si trae la formula

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

Se la funzione G è conosciuta, l'ultima formula ci dà in modo immediato la risoluzione del problema di DIRICHLET. Si possono così ottenere formule simili alle formule di GAUSS e POISSON. La stessa teoria è altresì valida per la varietà a più di due dimensioni. Soltanto, in questo caso, la funzione g diviene infinita come $\frac{1}{r^{n-2}}$, se n è il numero delle dimensioni. Noi abbiamo considerato il caso della sfera o dell'ipersfera in due note precedenti. È interessante trovare superficie per le quali g ha una forma semplice. Tale questione può essere anche risolta cercando funzioni g soddisfacenti alla proprietà seguente: per ogni elemento lineare ds sulla superficie si ha $d\omega = -\frac{\partial g}{\partial n} ds$, dove $d\omega$ è l'angolo sotto il quale ds è visto dal punto M_0 , tale angolo essendo compreso tra le geodetiche uscenti da M_0 . Noi ci riserviamo di dare gli sviluppi in un prossimo lavoro.

Chimica (Chimica biologica). — *Sulla natura chimica dell'esterasi epatica* ⁽¹⁾. Nota di ALFREDO RUFFO, presentata ⁽²⁾ da GAETANO QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Applicando la dialisi frazionata allo studio della natura chimica dell'esterasi epatica ⁽³⁾ ho potuto dimostrare che questa è costituita, oltre che dall'apoenzima di natura colloidale, da più costituenti dializzabili con diversa velocità. Precisamente dializza dapprima (nelle prime 60 ore nelle mie condizioni sperimentali) una sostanza inorganica la cui assenza rende l'enzima inattivo, poi (nelle 30 ore successive) una sostanza il cui allontanamento produce la riattivazione dell'enzima, ed infine (nelle ultime 50 ore) il coenzima propriamente detto. Questi risultati sono stati da me interpretati nel seguente modo: la sostanza che dializza per prima è un « protettore » in quanto protegge l'enzima (apoenzima + coenzima) da un'altra sostanza, un inibitore, che dializza più lentamente. L'allontanamento del protettore rende inattivo l'enzima; il successivo allontanamento dell'inibitore lo riattiva.

Con le ricerche che espongo brevemente ho cercato di chiarire la natura chimica ed alcune proprietà del protettore e dell'inibitore.

Le modalità di tecnica sono le stesse delle esperienze precedenti ⁽³⁾ ⁽⁴⁾.

Ho interrotto la dialisi dopo circa 60 ore, cioè quando l'enzima è quasi completamente inattivato, ed ho aggiunto all'enzima così inattivato le ceneri del liquido esterno di dialisi, oppure tracce di alcuni sali metallici (CuSO_4 , MgSO_4 , FeSO_4 , MnSO_4 e CoSO_4). Nella tabella I è riportata questa esperienza.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Biologica della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

⁽³⁾ RUFFO A., « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1942, 17, 675.

⁽⁴⁾ RUFFO A., « La Ricerca Scientifica », 1942, 13, 608.

TABELLA I.

N. della prova	Preparato enzimatico	ac. butirrico liberato		Riattiva- zione °/o
		millimol	°/o	
1	non dializzato	0,85	34	—
2	dializzato per 60 h a 6° C.	0,11	4	—
3	id. + ceneri del 1° liquido esterno di dialisi	0,67	27	90
4	id. + 0,1 γ di Cu	0,50	20	76
5	id. + 0,1 γ di Mg	0,10	4	0
6	id. + 0,1 γ di Mn	0,11	4	0
7	id. + 0,1 γ di Co	0,12	4	0
8	id. + 0,1 γ di Fe	0,12	4	0
9	enzima dopo 60 h a 6° C (controllo) . .	0,75	30	—
10	id. + 0,1 γ di Cu	0,76	30	—

I dati esposti confermano che la soluzione delle ceneri del liquido esterno delle prime 60 ore di dialisi riattiva l'enzima dializzato, e mostrano che dei metalli aggiunti il solo rame ha prodotto una riattivazione, che nell'esperimento riferito è stata non molto inferiore a quella prodotta dalle ceneri. Risulta logico supporre che la sostanza di natura inorganica che protegge l'esterasi dall'inattivazione e che dializza nelle prime 60 ore si identifichi con il Cu.

Se questo è vero, l'enzima deve contenere rame, e questo nelle prime 60 ore di dialisi dovrebbe passare nel liquido esterno. Ho perciò dosato il metallo ⁽¹⁾ nell'estratto enzimatico prima e dopo la dialisi, e nel corrispondente liquido esterno di dialisi. La tabella seguente riporta la quantità di Cu contenuta nel volume di soluzione enzimatica prelevata ogni volta per la prova di attività (0,3 cc della soluzione non dializzata, ed un volume corrispondente dei liquidi interno ed esterno di dialisi).

⁽¹⁾ Seguendo le indicazioni di FISCHER H. («Zeit. Angew. Chem.», 1934, 47, 90) esposte da CARTENI A. e CARANDANTE G. («Quad. Nutriz.», 1940, 8, 80).

TABELLA II.

	Cu, γ
Estratto non dializzato . . .	0,107
Estratto dializzato per 60 h .	0,010
Liquido esterno di dialisi . .	0,082

Dalla tabella risulta che l'enzima contiene rame (nella proporzione di circa 0,5 mg per 100 gr di sostanza secca), e che dopo 60 ore di dialisi più del 90 % di esso passa nel liquido esterno. Questo risultato, insieme con quello esposto nella tabella precedente, mi autorizza a concludere che il rame possiede la proprietà di proteggere l'esterasi dall'inattivazione.

Ho poi voluto indagare se il rame fosse anche un attivatore dell'enzima. Infatti la mia precedente osservazione [loc. cit. (3)] che l'estratto enzimatico inattivato con 140 ore di dialisi (allontanamento del protettore, dell'inibitore e del coenzima) riacquista solo il 50 % circa della sua attività per addizione del liquido esterno della terza dialisi (contenente il solo coenzima), poteva lasciar supporre che la riattivazione non fosse completa per l'assenza del rame nell'ultimo liquido esterno di dialisi. In tale caso si sarebbe dovuto attribuire a questo metallo anche un'azione attivante.

Per chiarire questo punto ho eseguito la seguente esperienza.

Dapprima ho continuata la dialisi della soluzione enzimatica inattivata per l'allontanamento del protettore sino a che l'attività si ripristina per l'allontanamento dell'inibitore (circa 30 ore), poi ho aggiunto al liquido interno il rame nella stessa concentrazione in cui esso esercita azione di « protettore ». Se si trattasse anche di un attivatore esso si troverebbe in condizioni ottime per dimostrare la sua azione; se si tratta solo di un protettore il suo effetto sarà nullo. Aggiunto invece all'estratto enzimatico dializzato, insieme col liquido esterno di questa seconda dialisi (contenente l'inibitore) dovrà proteggere l'enzima dall'inattivazione.

Nella tabella III è esposto il risultato di questa esperienza.

I dati esposti nella tabella, oltre a confermare che nelle mie condizioni sperimentali l'inibitore dializza tra la 60^a e la 90^a ora di dialisi (prova n. 2) e che il rame annulla l'azione dell'inibitore (prova n. 6), dimostrano: 1° che il preparato riattivato con la 2^a dialisi viene inibito, praticamente nella stessa misura, sia dal liquido esterno della 2^a dialisi, sia dalle ceneri di esso (prove n. 3 e 4); 2° che il rame non esercita alcuna azione né sul-

l'enzima privato del protettore e dell'inibitore (prova n. 5), nè sull'enzima integro, non dializzato (prova n. 8).

TABELLA III.

N. della prova	Preparato enzimatico	ac. butirrico liberato		inibi- zione ‰	prote- zione ‰	attiva- zione ‰
		millimol	‰			
1	inattivato con 60 ore di dialisi a 6° C	0,11	4	—	—	—
2	riattivato con altre 30 ore di dialisi a 6° C.	0,70	28	—	—	—
3	id. + liquido esterno della 2 ^a dialisi	0,37	15	47	—	—
4	id. + ceneri del liquido esterno della 2 ^a dialisi	0,45	18	36	—	—
5	id. + 0,1 γ di Cu	0,67	27	—	—	0
6	id. + ceneri come in 4 + 0,1 γ di Cu	0,60	24	—	60	—
7	enzima dopo 90 ore a 6° C. (controllo)	0,71	28	—	—	—
8	id. + 0,1 γ di Cu	0,72	28	—	—	0

Restava ancora da provare se il rame avesse azione attivatrice sul solo apoenzima. A questo scopo, su di una parte del preparato enzimatico privato del protettore e dell'inibitore, è stata proseguita la dialisi per altre 50 ore sino a completa inattivazione per l'allontanamento del coenzima. Sul preparato inattivo così ottenuto si è provata l'azione del rame sia da solo, sia addizionato al liquido esterno di questa 3^a dialisi (contenente il solo coenzima).

I risultati di questa esperienza, riportati nella tabella IV, dimostrano che il rame aggiunto, sia alla soluzione dell'apoenzima (prova n. 3), sia a quella dell'oloenzima appena ricostituito (prova n. 5) non ne modifica in alcun senso l'attività. La incompleta riattivazione (prove n. 4 e 5) di questo preparato enzimatico, non è quindi da ascriversi alla mancanza del rame, ma piuttosto al fatto che il coenzima molto verosimilmente, dializza in parte anche prima della 90^a ora. Queste ricerche escludono perciò chiaramente l'azione attivante del rame, mentre dimostrano che la sua presenza è necessaria per proteggere l'esterasi dell'azione dell'inibitore.

TABELLA IV.

N. della prova	Preparato enzimatico	ac. butirrico liberato		riatti- vazione ‰	attiva- zione ‰
		millimol	‰		
1	dializzato per 90 ore a 6° C	0,70	28	—	—
2	dializzato per altre 50 ore a 6° C . .	0,05	2	—	—
3	id. + 0,1 γ di Cu	0,04	2	—	0
4	id. + liquido esterno della 3 ^a dialisi	0,26	10	62	—
5	id. + liquido esterno come in 4 + 0,1 γ di Cu	0,25	10	62	0
6	enzima dopo 140 ore a 6° C (controllo) .	0,41	16	—	—
7	id. + 0,1 di Cu	0,40	16	—	0

CONCLUSIONI.

Le esperienze esposte in questa Nota portano un ulteriore contributo alla conoscenza dell'esterasi epatica.

Esse, infatti, mentre confermano che l'enzima risulta costituito da un protettore, da un inibitore e dal coenzima (dializzabili) riuniti ad un supporto colloidale (non dializzabile), dimostrano: 1° che il protettore e l'inibitore sono di natura inorganica; 2° che l'enzima contiene rame nella proporzione di circa 0,5 mg per 100 gr di sostanza secca; 3° che dopo 60 ore di dialisi circa il 90 % di esso passa nel liquido esterno di dialisi; 4° che dei vari metalli aggiunti all'enzima inattivato con 60 ore di dialisi il solo rame ha provocato una riattivazione dell'80% circa; 5° che il rame, infine, non esercita alcuna azione attivante nè sull'enzima privato con 90 ore di dialisi del protettore e dell'inibitore, nè sul solo apoenzima ottenuto dopo 140 ore di dialisi.

Questi risultati mi autorizzano ad identificare con il rame la sostanza, di natura inorganica, che dializza nelle prime 60 ore da una soluzione di esterasi preparata dal fegato di maiale. Contrariamente a quanto una mia ricerca precedente lasciava supporre, questo metallo non possiede alcuna azione attivante: la sua presenza è indispensabile per la normale attività dell'enzima solo perchè lo protegge dall'azione di un inibitore, di natura inorganica, in esso contenuto.

Biologia. — *La funzione della cosiddetta vescica urinaria nei Teleostei depositanti le uova a nastro.* Nota ⁽¹⁾ di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il Pesce Persico come è noto depone le così dette uova a nastro, in una sostanza di aspetto gelatinoso.

È uno dei tanti accorgimenti della Natura a protezione dei germi.

Qualche anno addietro (in collaborazione colla dott.ssa LINA RIZZO) ⁽²⁾ io descrivevo in detta specie di pesce una ghiandola esocrina presente in ambo i sessi, ma di solito più sviluppata nel femminile, che in sezione presentava numerose pliche (principali e secondarie) e aspetti secretori dell'epitelio (cellule caliciformi).

Nello stesso Pesce Persico antichi autori avevano descritto e figurato una vescica urinaria che evidentemente corrisponde a detta ghiandola, alla quale attribuivamo la funzione di secernere la sostanza mucosa dei nastri.

Dopo la pubblicazione di detta Nota esponevo tali ipotesi al chiarissimo prof. ERCOLE GIACOMINI inviandogli un acquerello ricavato da un preparato microscopico. Il prof. GIACOMINI, accettava detta ipotesi sulla funzione della presunta vesciva urinaria nel secernere l'involucro mucoso dei nastri ovarici e mi scriveva cortesemente a proposito della omologazione dell'organo, che avendo raffrontato sezioni dei suoi preparati sulla vescica urinaria della Trota aveva trovato aspetti simili, per quanto le pliche non fossero così sviluppate.

Nella vescica urinaria della Trota però vi è un epitelio cilindrico unistratificato, mentre nei miei preparati vi è un epitelio polistratificato.

Dopo il reperto del Persico io mi posi il quesito se eventualmente anche in altre specie di pesci che notoriamente depongono uova a nastro, la così detta vescica urinaria non fosse ugualmente sviluppata e con tali funzioni.

Ebbi così una riprova indiretta nel fatto che proprio i pesci come il *Lophius* che secernono un involucro attorno agli ammassi di uova presen-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 9 aprile 1943.

⁽²⁾ BRUNELLI G. e RIZZO L., *Ghiandola esocrina, ovario impari ed ermafroditismo nella « Perca fluviatilis »*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », Classe Scienze fisiche, matem. e nat., vol. VII, Serie VI, fasc. 10, Roma, 1928.

tano una tale vescica sviluppata. Accertai tali condizioni non solo nel *Lophius*, ma anche nell'*Ophidium*.

Nel *Fierasfer* che anche depone uova con involuero mucoso, già EMERY aveva descritto una vescica urinaria.

Grazie ai lavori di LO BIANCO, di RAFFAELE e dell'Istituto Talassografico di Messina (da parte di Sanzo e di Spartà) conosciamo oggi altre diverse specie di pesci che depongono uova a nastro: così le *Scorpene*, il *Centriscus scolopax*, l'*Ophidium barbatum*, nei quali anche successive indagini, come ho già riscontrato nell'*Ophidium*, dimostreranno circostanze simili a quelle del Persico e del *Lophius*.

Dal punto di vista etologico Sanzo distinse le uova dei Teleostei nelle seguenti categorie: 1^a Uova libere e galleggianti; 2^a Uova racchiuse in una masse gelatinosa galleggiante od attaccate a corpi solidi galleggianti; 3^o Uova fisse nel fondo e ai sostegni sommersi a mezzo di filamenti propri della capsula o per natura adesiva della capsula stessa.

Le nostre ricerche gettano luce sull'origine della 2^a categoria di uova e sui dispositivi morfologici e fisiologici che le realizzano. Il suddetto reperto serve anche a chiarire diversi punti sia anatomici che fisiologici circa le ghiandole annesse dei Teleostei, per quanto manchi una precisa definizione e classificazione di esse (GERHARDT), specialmente per alcuni organi che hanno per origine la regione cloacale.

Giova intanto ricordare come l'OPPEL ha scritto nel suo classico trattato di anatomia microscopica, che poco sappiamo circa le ghiandole annesse dei Teleostei, e ancor meno istologicamente.

Nello stesso trattato il poco che relativamente ai Teleostei si ricorda, riguarda il maschio e non le femmine delle specie elencate.

Le più dettagliate ricerche intorno alle ghiandole accessorie dei Teleostei si debbono ad EGGERT (1931), ma in base a dette ricerche il GERRARDT conclude che « Weibliche Anhangsdrüsen fehlen völlig ».

Evidentemente era sfuggito agli anatómi e ai fisiologi di prendere in considerazione la così detta vescica urinaria.

Notoriamente l'anatomia comparata pecca sovente di criteri antropomorfici e non si è collegata come dovrebbe alla fisiologia comparata e ancor meno, come nel nostro caso, alla etologia.

Che la vescica urinaria possa avere tale funzione secretoria non è da meravigliare, come mi ricordava GIACOMINI, nel maschio dello Spinarello infatti è il rene che assume tali funzioni di segregare il muco per la costruzione del nido destinato alla custodia e difesa delle uova. Intorno a ciò dopo i primi reperti di MÖBIUS si hanno le più recenti ricerche di HESS (1918) e di VAN HOORDT (1924).

Nei riguardi però della omologazione delle ghiandole secernenti la sostanza gelatinosa delle uova a nastro colla vescica urinaria, non è sempre chiaro quali siano i precisi rapporti di detta ghiandola esocrina cogli

ureteri e coi gonodotti e coll'intestino terminale, e in molti casi occorrerebbe studiare anche lo sviluppo embrionale.

È probabile che ciò che si chiama vescica urinaria nei Pesci non sia sempre dal punto di vista omologico lo stesso organo.

Bisogna poi tener presente che la vescica urinaria dei Pesci non è omologa a quella dei Vertebrati più alti.

SKIMKEWITSCH nei Dipnoi ritiene appunto che la vescica urinaria, che in essi apparisce come un diverticolo dorsale dell'intestino (cieco cloacale di KERR), non abbia a che vedere con quella dei Vertebrati più alti. Secondo moderni autori i Teleostei hanno una vescica urinaria che deriva in parte dalla cloaca in parte dagli ureteri, ma le ricerche sono state condotte in poche forme.

Nell' *Ophidium* dalle mie ricerche la struttura della così detta vescica urinaria ricorda quella dell'appendice digistiforme dei Selaci (che a sua volta è paragonabile alla vescica urinaria dei Dipnoi). In corrispondenza alle pieghe della mucosa si notano infatti un epitelio polistratificato e cellule caliciformi secretorie.

Ma anche se la vescica urinaria dei Teleostei fosse omologa a quella dei più alti Vertebrati, le sue funzioni appariscono molto diverse, e più che per una raccolta dell'urina in molti casi avrebbe assunto una particolare funzione secretoria.

Noi dobbiamo per i Teleostei concludere quello che per gli Anfibi ha scritto precedentemente GEGENBAUR nei riguardi della vescica urinaria, che cioè vi sono ancora molte questioni da chiarire sia dal lato morfologico che fisiologico.

Nella luce delle mie ricerche sui Teleostei potranno estendersi ad alcuni Anfibi ricerche atte a mostrare la importanza della vescica urinaria quale organo secretorio, in rapporto colla secrezione di sostanze gelatinose o mucose per assicurare lo sviluppo delle uova e la protezione degli embrioni.

Lo stesso evidentemente deve avvenire nei Dipnoi, per i noti adattamenti alla vita anfibiota in cui si servono di rivestimenti mucosi.

Biologia (Chimica-biologica). — *Azione di alcuni nicotinil-aminotiazoli sullo sviluppo del bacillo della dissenteria* ⁽¹⁾.
Nota di FRANCO LANFRANCHI, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Risulta ormai certo, da diversi lavori apparsi in questi ultimi anni, come sia indispensabile per la crescita di taluni batteri in terreno sintetico di amino-acidi l'aggiunta di una o più vitamine (fattori di crescita), che sono invece presenti nei terreni usuali di cultura (brodo, agar ecc.).

Per alcuni germi è necessario per esempio, l'aggiunta dell'acido nicotinic o della nicotinamide o di alcuni loro derivati (esteri, cozimasi di EULER, coenzima di WARBOURG ecc.). Così secondo LWOFF e LWOFF ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ per lo sviluppo su brodo nutritivo dell'*Hemophilus influenzae* ed *H. parainfluenzae* sono necessarie piccolissime quantità del coenzima I o coenzima II, che per dette speci di *Hemophilus* non possono essere sostituiti da acido nicotinico o nicotinamide; mentre per altre specie (*H. canis* ed *H. ducreyi*) può bastare la nicotinamide stessa ⁽⁵⁾. Secondo KNIGHT ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾, KNIGHT e MAC ILWAIN ⁽⁸⁾ e LANDY ⁽⁹⁾ per lo sviluppo aerobico dello *Staphylococcus aureus* su terreno culturale sintetico oltre alla vitamina B₁ (la vitamina B₁ può essere sostituita dal tiocromo o dal nucleo tiazolico e pirimidinico dell'aneurina riuniti insieme) è necessario l'acido nicotinico (o il suo estere metilico od etilico) o la nicotinamide (risultò anche essere attivo l'acido nicotinurico ed inattiva la dietilnicotinamide); mentre secondo RICHARDSON ⁽¹⁰⁾ per lo sviluppo anaerobico dello stesso germe è necessario oltre alla

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

⁽³⁾ LWOFF A. e LWOFF M., « Proc. Roy. Soc. » (London), B, 122, 352 (1937).

⁽⁴⁾ LWOFF A. e LWOFF M., « Proc. Roy. Soc. » (London), B, 122, 360 (1937).

⁽⁵⁾ LWOFF A. e PIROSKY I., « Comp. rend. soc. biol. », 124, 1169 (1937).

⁽⁶⁾ KNIGHT B. C. J. G., « Biochem. J. », 31, 731 (1937).

⁽⁷⁾ KNIGHT B. C. J. G., « Biochem. J. », 31, 966 (1937).

⁽⁸⁾ KNIGHT B. C. J. G. e MAC ILWAIN H., « Biochem. J. », 32, 1241 (1938).

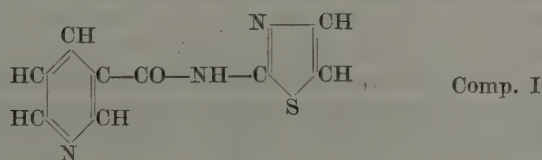
⁽⁹⁾ LANDY M., « Proc. soc. exper. Biol. Med. », 38, 504 (1938).

⁽¹⁰⁾ RICHARDSON G. M., « Biochem. J. », 30, 2184 (1937).

vitamina B₁ e alla nicotinamide anche l'uracile. D'altra parte MUELLER ⁽¹⁾ ⁽²⁾ dimostrò che per il bacillo della dissenterie era necessario l'acido nicotinico con la β -alanina; mentre FILDES ⁽³⁾ e LWOFF e QUERIDO ⁽⁴⁾ dimostrarono che l'acido nicotinico e la nicotinamide sono fattori di crescita per il *Proteus*.

Più recentemente DORFMAN, KOSER, REAMES, SWINGLE e SAUNDERS ⁽⁵⁾ esaminarono, per quanto riguarda la loro azione, come fattori di crescita, sullo sviluppo del bacillo della dissenteria in terreno sintetico di amino-acidi glucosato, 24 derivati del nucleo piridinico e trovarono che solo quei pochi aventi azione curativa sulla lingua nera del cane e sulla pellagra dell'uomo sono capaci di promuovere la crescita del bacillo della dissenteria su terreno culturale sintetico. Così non solo l'acido nicotinico ed alcuni suoi esteri (estere metilico, etilico, propilico e butilico, per i quali gli AA. osservarono che con l'aumentare della lunghezza della catena del radicale alchilico diminuisce l'attività); ma anche la nicotinamide ed alcuni suoi derivati N-sostituiti (acido nicotinurico, N-monometilnicotinamide e N-dietilnicotinamide o coramina) risultarono avere azione come fattori di crescita. Ora, avendo preparato alcune nicotinamidi N-sostituite, nelle quali un atomo di H del gruppo $-NH_2$ è sostituito da un radicale tiazolico, abbiamo ricercato se anche queste nicotinamidi, che, come abbiamo messo in evidenza in due Note ⁽⁶⁾ di prossima pubblicazione, possono presentare un notevole interesse biologico sotto diversi punti di vista, avessero azione come fattori di crescita sul bacillo della dissenteria.

Fra i composti preparati, furono presi in esame, prestandosi bene per la loro sufficiente solubilità a freddo, i seguenti 3 derivati:



2-nicotinilamino-tiazolo

⁽¹⁾ MUELLER J. H., « J. Bacter. », 34, 429 (1937).

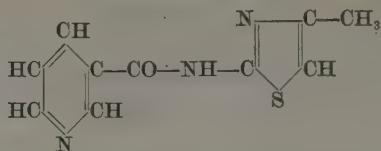
⁽²⁾ MUELLER J. H. e COHEN S., « J. Bacter. », 34, 381 (1937).

⁽³⁾ FILDES P., « Brit. J. exper. Pathol. », 28, 239 (1938).

⁽⁴⁾ LWOFF A. e QUERIDO A., « Comp. rend. soc. biol. », 111, 1039 (1938).

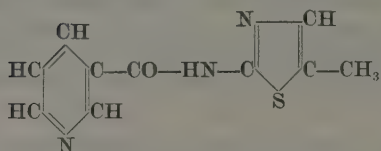
⁽⁵⁾ DORFMAN A., KOSER S. A., REAMES H. R., SWINGLE K. F. e SAUNDERS F., « J. of infect. Diseases », 65, 163 (1939).

⁽⁶⁾ LANFRANCHI F., « Atti R. Acc. d'Italia », Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., fasc. 12, Serie VII, vol. III (1942) e successivi.



Comp. II

2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo



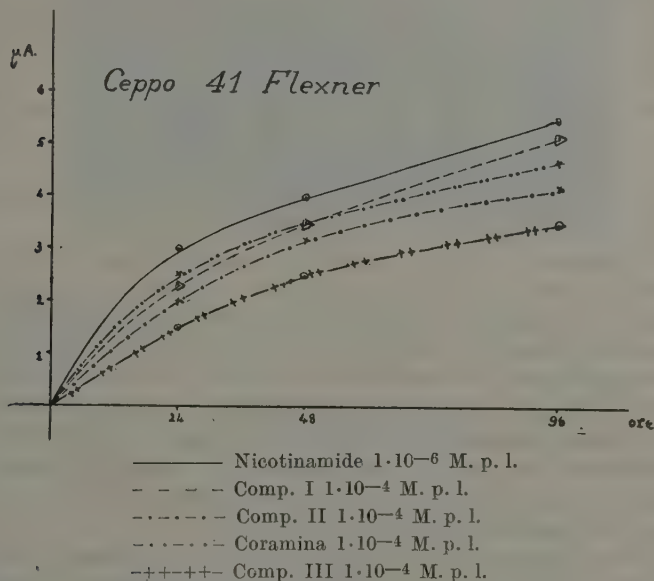
Comp. III

2-nicotinilamino-5-metil-tiazolo.

Fu così studiata la loro azione ad una conc. di $1 \cdot 10^{-4}$ M. per l. (tale azione fu comparata a quella della coramina e a quella della nicotinamide ad una conc. rispettivamente di $1 \cdot 10^{-4}$ M. per l. e di $1 \cdot 10^{-6}$ M. per l.) sullo sviluppo in terreno sintetico di amino-acidi glucosato di 12 diversi ceppi del bacillo della dissenteria, fra i quali 6 ceppi *Shiga*, 3 *Flexner*, 2 *Ceylonensis* e 1 *Madanyrensis*. È da notare però che degli *Shiga* 5 crebbero discretamente anche senza l'aggiunta di alcuna sostanza [ciò fu constatato anche dagli AA. americani (1)]; ma più rigogliosamente crebbero per aggiunta di una delle sostanze sopra indicate. Gli altri ceppi invece crebbero solamente con l'aggiunta della nicotinamide o di una delle nicotinamidi sostituite (v. nella parte sperimentale la fotografia relativa ad un ceppo *Flexner*). Certamente, a parità di conc. delle sostanze promuoventi la crescita, sulla crescita stessa ha influenza la composizione del terreno culturale e forse con un terreno culturale costituito da un maggiore numero di amino-acidi di quello impiegato e indicato nella parte sperimentale (non ci fu possibile, date le attuali circostanze di guerra, procurarci la serie completa) la crescita sarebbe stata, a parità delle altre condizioni, più rigogliosa. Mentre la maggior parte degli AA. sopracitati, che hanno lavorato sui fattori di crescita, apprezzarono a vista l'intorbidamento dovuto alla sospensione batterica, noi abbiamo seguito la crescita dei batteri mediante il Diafanometro elettrico del MARTELLONI, apparecchio a cellula fotoelettrica, che permette di eseguire con molta esattezza misure colorimetriche e nefelometriche. Rimandando alla parte sperimentale per una sommaria descrizione dell'apparecchio e della tecnica seguita, qui

(1) Loc. cit. in (6), a pag. 433.

riportiamo il grafico relativo ad un solo ceppo *Flexner* (anche per gli altri 11 ceppi vennero tracciati analoghi grafici, che, per ragioni di spazio, non possono venire riportati), nel quale in ascisse sono riportati i tempi di permanenza in termostato e in ordinata le corrispondenti diminuzioni di intensità di corrente dovute all'assorbimento parziale della luce da parte delle sospensioni batteriche:



Da questo grafico risulta chiaramente in quale ordine, per il ceppo 41/*Flexner*, possono essere poste le varie sostanze studiate in base alla loro attività decrescente. Anche dai grafici ottenuti per gli altri 11 ceppi, salvo che per 2, risultò la nicotinamide essere la più attiva; mentre per le altre sostanze l'ordine di attività decrescente fu assai variabile. D'altra parte essendo per gli altri 11 ceppi la differenza di attività delle nicotinamidi N-sostituite sempre piccola, si può concludere che la loro attività, ad uguale conc., è praticamente uguale. Comunque risultando, a prescindere dall'ordine di attività, che anche le nicotinamidi da noi preparate sono attive sullo sviluppo del bacillo della dissenteria, resta a vedere ora se i nicotinil-aminotiazoli hanno azione curativa sulla lingua nera del cane e sulla pellagra dell'uomo.

PARTE SPERIMENTALE.

10) *Preparazione del terreno culturale sintetico.*

Il terreno culturale fu preparato sciogliendo in 1000 cc. di H_2O le seguenti sostanze: Fosfato acido dipotassico gr. 1,00; solfato di magnesio gr. 0,10; asparagina gr. 2,00; dl. α -alanina gr. 1,00; glicocola gr. 0,20; dl-triptofano gr. 0,40; l-istidina. HCl gr. 0,20; dl-valina gr. 0,10; l-leucina gr. 0,10; l-tirosina gr. 0,05; dl-cistina gr. 0,20; d-isoleucina gr. 0,20; d-ornitina. 2 HCl gr. 0,20; acido d-glutamico gr. 0,20; cisteina. HCl gr. 0,20; glucosio gr. 20. La soluzione neutralizzata potenziometricamente con NaOH, dopo sterilizzazione, presentò un $P_H = 7,2$.

20) *Preparazione delle soluzioni titolate della nicotinamide e delle nicotinamidi N-sostituite.*

a) *Soluzione $1 \cdot 10^{-5}$ M. p. l. di nicotinamide.* - Questa soluzione fu preparata per diluizione di una soluzione $1 \cdot 10^{-1}$ M. p. l., a sua volta preparata per diluizione di un'altra $1 \cdot 10^{-3}$ M. p. l. Quest'ultima fu ottenuta sciogliendo in 1000 cc. di H_2O 0,1220 gr. di nicotinamide (P. M. = 122,064).

b) *Soluzione di coramina, Comp. I, Comp. II e Comp. III $1 \cdot 10^{-3}$ M. p. l.* - Queste soluzioni furono preparate sciogliendo in 1000 cc. di H_2O rispettivamente gr. 0,1781 di coramina (P. M. = 178, 128) gr. 0,2051 del Comp. I (P. M. = 205,14), gr. 0,2191 del Comp. II (P. M. = 219,156) e gr. 0,2191 del Comp. III (P. M. = 219, 156).

30) *Preparazione delle sospensioni batteriche per l'inseminamento.*

Per l'inseminamento fu preparata, subito prima dell'uso, di ogni ceppo una sospensione batterica molto chiara, stemperando una piccolissima quantità di patina batterica, prelevata da una cultura su agar molto duro mediante leggero sfregamento con ansa di platino, in 5 cc. di un Puffer di fosfati $P_H = 7$.

40) *Tecnica seguita per determinare l'azione della nicotinamide e delle nicotinamidi N-sostituite.*

Per ogni ceppo furono preparate 6 provette, pulite, ben calibrate (in modo che si adattassero perfettamente al porta provette del Diafanometro Elettrico) e numerate da 1 a 6, nelle quali furono introdotti 9 cc. di terreno culturale. Alla 1^a fu poi aggiunto 1 cc. di H_2O ; mentre alla 2^a, 3^a, 4^a, 5^a e 6^a fu aggiunto rispettivamente 1 cc. della soluzione della nicotinamide, del Comp. I, del Comp. II, della coramina e del Comp. III. Tutte le provette furono poi inseminate, dopo sterilizzazione in autoclave, con 0,1 cc. della sospensione batterica. Lo sviluppo dei vari ceppi fu seguito, eseguendo determinazioni dopo 24, 48 e 96 ore di permanenza in termostato a 37°. La seguente fotografia



si riferisce al ceppo 41/*Flexner* dopo permanenza in termostato per 96 ore – mediante il Diafanometro Elettrico. Rimandando, per ragione di spazio, alla letteratura ⁽¹⁾ per una descrizione dettagliata dell'apparecchio, qui basta ricordarne le caratteristiche fondamentali. La luce generata da una lampadina elettrica – la lampadina può venire alimentata con corrente continua o alternata e l'intensità della luce viene mantenuta costante mediante speciale dispositivo – cade su una cellula fotoelettrica al selenio, che genera una corrente elettrica, l'intensità della quale viene misurata da un microamperometro 50 μA . fondo scala graduato a 0,5 μA . (si può apprezzare comodamente fino a 0,25 μA). L'apparecchio 'è costruito in modo però che si può inserire, per misure più fini, anche un microamperometro 25 μA . fondo scala graduato a 0,1 μA . Sul percorso del raggio luminoso, tra la sorgente luminosa e la cellula, viene a trovarsi un porta provette, nel quale vengono introdotte le provette contenenti le sospensioni batteriche. Queste, come tutti i liquidi torbidi, determinano un assorbimento parziale della luce proporzionale al numero delle particelle in sospensione e che si traduce in una diminuzione di intensità di corrente generata dalla cellula. Riportando, su un sistema di assi ortogonali, in ascisse i tempi di permanenza in termostato e in ordinata i relativi abbassamenti di intensità di corrente, è possibile per ogni ceppo e per ogni sostanza studiata tracciare una curva, che permette di rendersi conto dello sviluppo di quel dato ceppo sotto l'azione di quella determinata sostanza. In questo modo sono state [appunto tracciate le 5 curve del grafico più indietro

(¹) NICCOLINI P., *Diagnostica e Tecnica di Laboratorio*, febbraio, 1937.

riportato e riferentesi all'azione delle 5 sostanze da noi studiate sul ceppo 41/Flexner. Diamo ora per detto ceppo (non è possibile farlo, per ragione di spazio, per gli altri 11 ceppi) i valori numerici, che permisero di tracciare le curve relative.

CEPPO	Numero della provetta						Diminuzioni intensità di corrente in μ A. dopo
	1	2	3	4	5	6	
41/FLEXNER	0	3,0	2,3	2,0	2,5	1,5	24 ore
	0	4,0	3,5	3,2	3,5	2,5	48 »
	0	5,5	5,2	4,2	4,7	3,5	96 »

Biologia (Chimica-biologica). — *Azione della nicotinil-p-fenetidina sullo sviluppo del bacillo della dissenteria* ⁽¹⁾.
Nota di FRANCO LANFRANCHI, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella precedente Nota non solo abbiamo confermato che la nicotinamide e la N-dietilnicotinamide o coramina sono in grado di determinare la crescita del bacillo della dissenteria in terreno culturale sintetico di amino-acidi glucosato [ciò fu stabilito per la prima volta da DORFMAN, KOSER, REAMES, SWINGLE e SAUNDERS ⁽³⁾]; ma anche abbiamo messo in evidenza che detta proprietà è posseduta da altre nicotinamidi N-sostituite più complesse, che strutturalmente risultano per sostituzione di 1 atomo di H del gruppo $-NH_2$ con un radicale tiazolico (2-nicotinilamino-tiazolo, 2-nicotinilamino-4-metil-tiazolo e 2-nicotinilamino-5-metil-tiazolo).

I sopracitati AA. americani trovarono che non solo l'acido nicotinico ed alcuni suoi esteri (estere metilico, etilico, propilico e butilico) e la nicotinamide ed alcuni suoi derivati N-sostituiti (acido nicotinurico, N-monometilnicotinamide ed N-dietilnicotinamide); ma anche il Coenzima I e II sono in grado di agire come fattori di crescita del bacillo della dissenteria. Inoltre gli AA. stabilirono che il filtrato di una cultura del bacillo della dissenteria, cresciuto su terreno sintetico di amino-acidi in presenza di acido nicotinico, aggiunto in quantità variabili a del brodo di vitello glucosato è in grado di determinare la crescita del *Hemophilus influenzae* ed *H. parainfluenzae*, che, com'è noto ⁽⁴⁾, possono crescere solo in presenza del Coenzima I o II, essendo insufficiente l'acido nicotinico o la sua amide. Risultava evidente quindi che il bacillo della dissenteria, dopo una preliminare trasformazione dell'acido nicotinico in nicoti-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 26 marzo 1943.

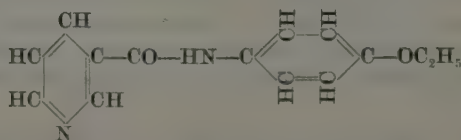
⁽³⁾ DORFMAN A., KOSER S. A., REAMES H. R., SWINGLE K. F. e SAUNDERS F., « J. of infect. Diseases. », 65, 163 (1939).

⁽⁴⁾ LWOFF A. e LWOFF M., « Proc. Roy. Soc. » (London), B, 122, 352 (1937) e B, 122, 360 (1937).

namide, ha la capacità di sintetizzare o uno dei due Coenzimi, od entrambi o sostanze ignote per costituzione e quindi per azione biologica a questi analoghe. Con la necessaria trasformazione dell'acido nicotinic in nicotinamide veniva chiarito anche il fatto, stabilito dagli AA., che in presenza di nicotinamide, a parità di concentrazione, la crescita all'inizio è molto più rapida che in presenza di acido nicotinic; mentre poi raggiunge, col passare del tempo, un'uguale intensità.

Parimenti, secondo gli AA., anche gli esteri dell'acido nicotinic, dopo essere stati dal batterio trasformati direttamente in nicotinamide (che gli esteri non vengano prima saponificati, per opera di un'esterasi, in acido nicotinic ed i relativi alcool risultò dal fatto che l'estere metilico determinò una crescita più rapida del batterio, rispetto all'acido nicotinic, appunto per la sua più facile trasformabilità in nicotinamide), sono impiegati per la sintesi di uno dei due Coenzimi o di composti per costituzione a questi analoghi.

Per quanto riguarda l'acido nicotinurico si deve, a nostro avviso, ammettere, come molto probabile, una preliminare idrolisi enzimatica (per opera di una carbossipolipeptidasi quasi certamente presente nel batterio) a glicocola ed acido nicotinic, che viene poi successivamente trasformato a nicotinamide. Per le altre nicotinamidi N-sostituite non contenenti il gruppo carbossilico (alchil-N-nicotinamidi esaminate dagli AA. americani e nicotinilamino-tiazoli da noi esaminati) si può pure ammettere che vengano dapprima scisse idroliticamente, per opera di un'aminoacilasi, in acido nicotinic e nelle relative ammine e che l'acido venga poi trasformato in nicotinamide; ma non è da escludere senz'altro che si formino dei composti sconosciuti, che si differenziano dal Coenzima I e II unicamente per il fatto che uno o due atomi di H del gruppo $-\text{NH}_2$ sono sostituiti da radicali alchilici e tiazolici. Questa seconda ipotesi sarà più verosimile qualora possa venire esclusa la presenza di una tale aminoacilasi. Per quanto solamente ricerche dirette possano decidere in merito a tale questione, quanto segue già depone forse in favore dell'assenza di un tale enzima. Avendo preparato la nicotinil-p-fenetidina



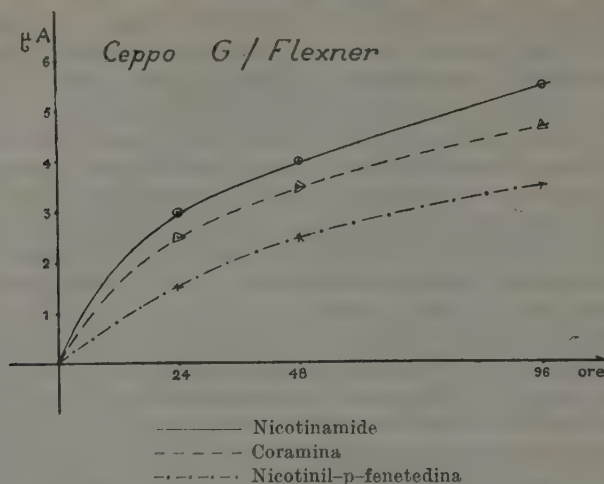
che, come abbiamo messo in evidenza in una precedente Nota ⁽¹⁾, può presentare notevole interesse sotto diversi punti di vista, abbiamo ricer-

⁽¹⁾ LANFRANCHI F., « Atti R. Acc. d'Italia », Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., fasc. 6, ser. VII, vol. IV (1942).

cato se anche questa nicotinamide N-sostituita avesse la proprietà di promuovere la crescita del bacillo della dissenteria ed abbiamo trovato che effettivamente tale sostanza è in grado di determinare, su terreno culturale sintetico, uno sviluppo rigoglioso di vari ceppi del bacillo della dissenteria. Ora, qualora fosse presente nel batterio una tale aminoacilasi, nel caso della nicotinil-p-fenetidina dovrebbe formarsi, per idrolisi, acido nicotinico e p-fenetidina e quest'ultima, essendo un veleno protoplasmatico (ciò risulta dalle ricerche farmacologiche sui derivati acilici della p-fenetidina), dovrebbe inibire la crescita del batterio. Ad ogni modo, come già abbiamo detto, l'assenza di una tale aminoacilasi può essere dimostrata solo con ricerche dirette.

Riferiamo ora sui risultati da noi ottenuti in merito all'azione della nicotinil-p-fenetidina sullo sviluppo del bacillo della dissenteria. L'azione di detto composto fu studiata a una concentrazione $M/1,5 \cdot 10^4$ p. l. (comparativamente fu studiata l'azione della nicotinamide ad una conc. $M/1 \cdot 10^6$ p. l. e della coramina ad una conc. $M/1 \cdot 10^4$ p. l.) su 12 ceppi del bacillo della dissenteria, fra i quali 6 *Shiga*, 3 *Flexner*, 2 *Ceylonensis* ed 1 *Madanyrensis*. I ceppi presi in esame come pure il terreno culturale, sul quale avvenne lo sviluppo dei batteri, sono gli stessi impiegati per le ricerche, in merito alle quali abbiamo riferito nella Nota precedente. Fu constatato quindi anche in questo caso che dei 12 ceppi 5 ceppi *Shiga* crebbero discretamente anche senza l'aggiunta di alcuna sostanza (più rigogliosamente crebbero però per aggiunta di una delle sostanze sopra indicate); mentre gli altri 7 ceppi si svilupparono solamente per aggiunta della nicotinamide o della coramina o della nicotinil-p-fenetidina (vedi nella parte sperimentale la fotografia relativa ad un ceppo *Flexner*). Essendo il terreno culturale quello stesso impiegato per le ricerche sull'azione dei nicotinil-aminotiazoli, è chiaro che valgono, circa la sua composizione, le medesime considerazioni già fatte nella Nota precedente.

Anche in questo caso lo sviluppo del batterio fu seguito mediante determinazioni con l'apparecchio a cellula fotoelettrica del MARTELLONI. Qui sotto riportiamo come esempio, essendoci impossibile farlo per gli altri 11 ceppi, il grafico relativo a un ceppo *Flexner*, nel quale in ascisse sono riportati i tempi di permanenza in termostato delle culture e in ordinata le corrispondenti diminuzioni di intensità di corrente (l'intensità della corrente generata dalla cellula fotoelettrica venne misurata in $\mu A.$ e decimi di $\mu A.$) dovute all'assorbimento parziale della luce da parte delle sospensioni batteriche. In questo grafico le 3 curve si riferiscono allo sviluppo di 3 culture del ceppo *G/Flexner* rispettivamente in presenza della nicotinamide, della coramina e della nicotinil-p-fenetidina alle concentrazioni più sopra riportate.



Da questo grafico risulta che per il ceppo *G/Flexner* la nicotinamide è più attiva della coramina e che questa, a sua volta, è più attiva della nicotinil-p-fenetidina. Anche per gli altri 11 ceppi, per i quali abbiamo tracciato analoghi grafici, che non è necessario riportare, la nicotinamide risulta essere la più attiva; mentre la coramina risulta essere nettamente più attiva della nicotinil-p-fenetidina nei confronti di 9 ceppi, essendo per 2 ceppi *Shiga* l'attività delle due sostanze quasi uguale.

PARTE SPERIMENTALE.

1° *Preparazione del terreno culturale sintetico.* — Il terreno culturale sintetico era quello stesso impiegato per le ricerche, che fanno oggetto della Nota precedente, alla quale rimandiamo per la sua preparazione.

2° *Preparazione della soluzione $M/1 \cdot 10^5$ p. l. di nicotinamide e della soluzione $M/1 \cdot 10^3$ p. l. di coramina.* Queste soluzioni furono preparate nel modo indicato nella Nota precedente.

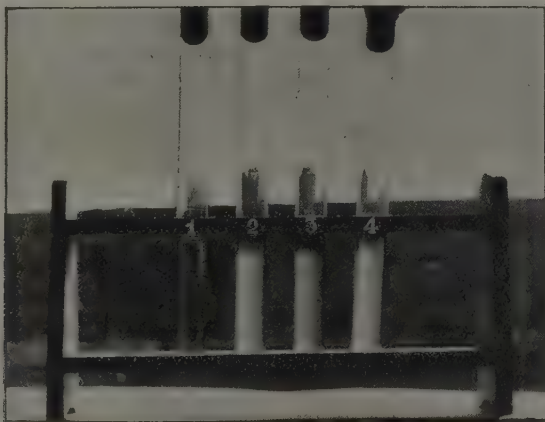
3° *Preparazione della soluzione $M/1,5 \cdot 10^3$ p. l. di nicotinil-p-fenetidina.* — Questa soluzione fu preparata sciogliendo in 1500 cc. di H_2O gr. 0,2421 di nicotinil-p-fenetidina (p. m. = 242,13). Fu tentato dapprima di preparare una soluzione $M/1000$ sciogliendo, con riscaldamento, la stessa quantità di sostanza in 1000 cc. di H_2O ; ma per raffreddamento alla temperatura ambiente riprecipitò parte della sostanza. Portando a 1500 cc., l'acqua impiegata per la soluzione, non si ebbe più, per raffredd-

damento alla temperatura ambiente (18-20°), alcuna precipitazione. Qualche cristallino cominciò invece a separarsi a 2-3° sopra 0°.

4° *Preparazione delle sospensioni batteriche per l'inseminamento.* -

Le sospensioni dei singoli ceppi furono preparate nel modo indicato nella Nota precedente. Le sospensioni, avendo la tendenza a depositarsi abbastanza rapidamente al fondo delle provette, prima del pipettamento degli 0,1 cc., furono vigorosamente agitate per renderle omogenee. In tale modo si ebbe la garanzia che tutte le provette, da inseminare con uno stesso ceppo, fossero inseminate con un numero di bacilli praticamente uguale.

5° *Tecnica seguita per determinare l'azione della nicotinamide, della coramina e della nicotinil-p-fenetidina e risultati ottenuti.* - La tecnica seguita per potere confrontare, in maniera quantitativa, l'azione della nicotinamide, della coramina e della nicotinil-p-fenetidina sullo sviluppo dei 12 ceppi del bacillo della dissenteria fu quella stessa indicata nella Nota precedente, alla quale rimandiamo. Riportiamo ora, come esempio, la fotografia relativa al ceppo *G/Flexner*, che fu presa dopo che le culture di detto ceppo erano restate in termostato a 37° per 96 ore.



Prov. 1. - 9 cc. terr. cult.+1 cc. H₂O+0,1 cc. sospens. batt.

Prov. 2. - 9 cc. terr. cult.+1 cc. sol. nicotinamide M/1·10⁵
p. l. + 0,1 cc. sospens. batt.

Prov. 3. - 9 cc. terr. cult.+1 cc. sol. coramina M/1·10⁵
p. l. + 0,1 cc. sospens. batt.

Prov. 4. - 9 cc. terr. cult.+1 cc. sol. nicotinil-p-fenetidina
M/1,5·10⁵ p. l. + 0,1 cc. sospens. batt.

Diamo ora sempre per il ceppo *G/Flexner* - non ci è possibile, per ragione di spazio, fare altrettanto per gli altri 11 ceppi - la tabella dei

valori numerici, ottenuti con il Diafanometro elettrico, in base ai quali furono tracciate le tre curve del grafico più indietro riportato.

	Diminuzione di intensità di corrente in μ A. dopo			Numero della provetta
	24 ore	48 ore	96 ore	
CEPPO				
G/FLEXNER	0,0	0,0	0,0	1
	3,0	4,0	5,5	2
	2,5	3,5	4,7	3
	1,5	2,5	3,5	4

OPERE PERVENUTE IN DONO ALLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA

- BENEDETTO, Luigi Foscolo. — *Arrigo Beyle milanese*. Bilancio dello stendhalismo italiano ... Firenze, Sansoni, 1942, pp. xxiv-728, in-8.
- BIBLIOTECA DEL SENATO DEL REGNO. — *Catalogo della raccolta di Statuti ...*, vol. I, A-B. Roma, Tipografia del Senato, 1943, pp. xxxv-290, in-4°.
- CAMPA, Maria. — Vedi: PEISINO, Giovanni. *Catalogo di 2390 stelle*.
- CARAMAZZA, Filippo. — *Teoria del diritto di proprietà*. Roma, « Jorio », 1942, pp. 239, in-8°.
- CARLINI, Armando. — *Lineamenti di una concezione realistica dello spirito umano*. Parte I: *Introduzione, il problema gnoseologico epistemologico, l'idea cosmologica nella filosofia greca*. Roma, Perrella, 1942, pp. iv-325, in-8° (Biblioteca di « Logos » diretta da A. Aliotta e M. F. Sciacca).
- CASSINIS, Gino. — Estratti:
Per una carta d'Italia a grande scala. (Bollettino della Società Italiana di Fotogrammetria « Ignazio Porro », n. 1, 1942.
Riproduzione di un bassorilievo con procedimenti fotogrammetrici. (Rivista « Palladio », anno VI, n. V-VI, Roma, 1942.
- CISOTTI, Umberto. — *Analisi matematica*. Lezioni svolte nel R. Politecnico di Milano. V ed. con 285 figg. Milano, Libreria Editrice Politecnica, 1943, pp. xix-690, in-8°.
- CONGRESSO DO MUNDO PORTUGUES. — Publicações. Voll., VII-XIX, in-8°.
Seccao de Congressos, 1940. (Comissão executiva dos Centenários).
- CORSELLI, Rodolfo. — *La grande guerra 1915-1918 alle fronti italiane*. Bologna. Zanichelli, 1942, 2 voll. in-8°.
- GALASSI PALUZZI, C. — Vedi: GERLINI, Elsa.
- GERLINI, Elsa. — *Piazza Navona*. Catalogo. Prefazione di C. Galassi Paluzzi. II ed. Reale Ist. di Studi Romani, 1943, pp. 132, in-8°, con XVI tav. (Reale Ist. di Studi Romani. Mostre de « Il volto di Roma dei secoli »).
- IMBRIGHI, Gastone. — *S. Pietro Apostolo a Portovenere* con prefazione del professore avv. Andrea Mori. Tip. Poliglotta Vaticana, 1943, pp. 126, in-8°, con tavv.
- ISTITUTO NAZIONALE DI ECONOMIA AGRARIA. — *I comprensori di bonifica ...* vol. I: *Italia settentrionale*. Roma, 1941, pp. 459, in-8°.
- LANDRA, Guido. — *Il problema della razza in Romania*. Bucarest, Istit. italo-romeno di studi demografici, 1942, pp. 198, in-8°, con tavv.

- LA VIOSA ZAMBOTTI, Pia. — *Le più antiche culture agricole europee. L'Italia, i Balcani e l'Europa centrale durante il neo-eneolitico*. Milano-Messina, G. Principato, 1943, pp. ix-514, in-8°, con figg. e tavv.
- LUCCHESI, Elio. — *Contributi alla conoscenza dei lepidotteri del melo. V. Blastodacne Putripennella Zell.* Portici, Della Torre, 1942. Estr. dal Bollettino del R. Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici, vol. V, pp. 175-195).
- LUGLI, Giuseppe. — Estratti:
L'origine dei teatri stabili in Roma antica secondo i recenti studi. (« Dioniso », « Boll. dell'Ist. Naz. del Dramma Antico », vol. IX, nn. 2-3, 1942.
Il valore topografico e giuridico dell'« Insula » in Roma antica. (« Rendiconti della Pont. Acc. Rom. di Arch. », vol. XVIII, 1941-42).
- MERLO, CLEMENTE. — *I nomi romanzati del dì feriale con una appendice sui nomi del dì festivo.* Pisa, Mariotti, 1918, pp. 21, in-8°.
- *I nomi romanzati della Candelara* (La festa della Purificazione di Maria Vergine). Perugia. Unione Tipografica Cooperativa, 1915, pp. 28, in -8° (Nozze Sarteschi-Merlo).
- *I nomi romanzati delle stagioni e dei mesi . . .* Torino, Loescher, 1904, pp. 284, in-8°.
- *Studi glottologici di Clemente Merlo pubblicati nell'occasione del XXV anniversario del suo insegnamento da colleghi, discepoli ed amici.* Pisa, Nistri-Lischi, 1934, in-8°, con ritr.
- MONTI, Antonio. — *Un drammatico decennio di storia piemontese. . . (1821-1831).* . . . Milano, Hoepli, 1943, pp. xviii-448, in-16°. Con tavv.
- POLIZIANO, Angelo. — *La favola di Orfeo.* Firenze, Alla Croce del Sud, 1943.
- SACCO, Federico. — *Caratteri geologici e connessi delle regioni d'Italia.* Torino, 1942, pp. 94, in-8°. (« Annali della R. Accademia di Agricoltura », Torino, vol. 85°. Adunanza del 25 aprile 1942.

Matematica. — *Una proprietà caratteristica dei coni di Veronese.* Nota ⁽¹⁾ di ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Appartiene a GAETANO SCORZA ⁽²⁾ l'elegante teorema che segue:

È un S_{i-1} -cono ogni varietà $V_{r+i}^{n^r}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ che sia tagliata dagli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ del suo spazio in $V_r^{n^r}$ rappresentate sopra un S_r dal sistema di tutte le forme d'ordine n .

Per brevità, come si usa per l'ordinaria superficie di VERONESE ($n = r = 2$), dirò *varietà di VERONESE* ⁽³⁾ quelle $V_r^{n^r}$, e *coni di VERONESE* quelli proiettanti una varietà di VERONESE.

Questo teorema esige che la V_{r+i} che si tratta di caratterizzare sia algebrica e che si conosca la natura di *tutte* le sue $\propto \binom{n+r}{r}^i$ sezioni fatte con gli $S_{\binom{n+r}{r}-1}$ di $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$.

Queste condizioni sono molto onerose. In realtà un teorema capace di caratterizzare i coni di VERONESE può darsi in condizioni molto meno restrittive: ed è questo lo scopo del presente lavoro.

2. Riferiamoci, per semplicità di discorso, alla ordinaria superficie di VERONESE F_2^4 di S_5 e ad un cono V_3^4 di S_6 ottenuto proiettandola da un punto. Ogni sezione iperpiana di V_3^4 è una superficie di VERONESE: il teorema di Scorza inverte questa proprietà (evidente).

La varietà V_3^4 può pensarsi riempita da $\infty^1 F_2^4$ di VERONESE, in particolare da quelle che si ottengono nel modo seguente. Si fissi una F_2^4 di V_3^4 e su quella una conica C^2 e quindi lo S_4 che tocca la F_2^4 in tutti i punti di C^2 (S_4 tangente fisso lungo C^2 ad F_2^4). Uno S_5 generico per S_4 entro S_6 sega, per ipotesi, V_3^4 in una superficie di VERONESE: al variare di S_5 se

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ G. SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali.* « Rend. Circ. Matem. di Palermo », 28, 1909.

⁽³⁾ E. BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici.* « Mem. R. Acc. Lincei », (5), 13, 452-474, 1921.

ne hanno ∞^1 che riempiono V_3^4 . Basta l'esistenza di queste ∞^1 superficie di VERONESE a caratterizzare un cono di VERONESE di S_6 ?

La risposta affermativa è data dal seguente teorema:

Se ∞^1 superficie di VERONESE di un S_6 si toccano lungo una conica e se questa è luogo di punti regolari per la V_3 che le contiene, la V_3 è necessariamente un cono.

Si noti che quest'enunciato non presuppone affatto l'algebricità di V_3 e che esso si limita a considerare ∞^1 , e non ∞^5 , sezioni iperpiane. La condizione di regolarità dei punti della conica per la V_3 (che nel caso in cui si considerino le ∞^5 sezioni iperpiane non è necessario enunciare, non potendo un punto qualsiasi di V_3 essere singolare) è la più importante (essendo chiaro che, senza di essa, quelle ∞^1 superficie riempirebbero sempre una V_3 , ma questa non sarebbe necessariamente un cono). Questa condizione ha carattere topologico e dipende da proprietà topologiche non ancora note, e che mi riservo di esporre altrove, relative alle calotte di varietà congiungenti calotte superficiali di dato ordine fra loro tangenti (o a contatto di ordine assegnato).

3. - Consideriamo in S_5 la superficie di VERONESE F

$$x_1 = u^2, x_2 = uv, x_3 = v^2, x_4 = uw, x_5 = vw, x_6 = w^2$$

e su di essa la conica $w = 0$, e cerchiamo in S_5 le superficie di VERONESE \bar{F} che posseggono la conica $w = 0$ e hanno lungo essa lo stesso S_4 tangente di F ($x_6 = 0$): si noti che ciò non implica che F ed \bar{F} si tocchino nei punti della conica. Sulla \bar{F} assumiamo i parametri $U : V : W$ tali che quella conica C^2 sia rappresentata da $W = 0$; possiamo anche fare in modo che nei punti della conica C^2 (cioè per $w = 0, W = 0$) si abbia $U : V = u : v$.

Si vede senza alcuna difficoltà che le equazioni delle \bar{F} considerate sono necessariamente del tipo

$$\bar{x}_1 = U^2 + W A_1, \bar{x}_2 = UV + W B_1, \bar{x}_3 = V^2 + W C_1, \bar{x}_4 = W D_1,$$

$$\bar{x}_5 = W E_1, \bar{x}_6 = f W^2$$

ove $A_1 = a_1 U + a_2 V + a_3 W$, B_1, \dots, E_1 sono forme di 1° grado U, V, W ed f è una costante.

Imponiamo ora la condizione che \bar{F} ed F abbiano in ogni punto di C^2 lo stesso piano tangente.

Il piano tangente ad \bar{F} nel punto $(U, V, 0)$ ha le equazioni

$$\begin{vmatrix} 2U & V & 0 \\ 0 & U & 2V \\ a_1 U + a_2 V & b_1 U + b_2 V & c_1 U + c_2 V \end{vmatrix} = (d_1 U + d_2 V) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2U & V & 0 \\ 0 & U & 2V \end{vmatrix}.$$

Affinchè esso coincida col piano tangente ad F in $(u, v, 0)$, cioè $U:V = u:v$ (e $w = W = 0$) occorre e basta che si abbia

$$a_2 = c_1 = 0, \quad e_1 = d_2 = 0, \quad a_1 = 2b_2 (=2a), \quad c_2 = 2b_1 (=2b), \quad d_1 = c_2 (=d).$$

Si possono ora fare i cambiamenti di parametri

$$U' = U - aW, \quad V' = V - bW, \quad \bar{W} = dW;$$

le equazioni di \bar{F} , indicando $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ costanti arbitrarie, si scrivono

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= U'^2 + \alpha \bar{W}^2, \quad \bar{x}_2 = U'V' + \beta \bar{W}^2, \quad \bar{x}_3 = V'^2 + \gamma \bar{W}^2 \\ \bar{x}_4 &= U'\bar{W} + \delta \bar{W}^2, \quad \bar{x}_5 = V'\bar{W} + \varepsilon \bar{W}^2, \quad \bar{x}_6 = \zeta \bar{W}^2. \end{aligned}$$

Le equazioni di qualsiasi superficie \bar{F} di VERONESE tangente alla F lungo la conica assegnata (ed appartenenti al medesimo S_2) possono scriiversi nella forma precedente.

4. - Conviene osservare il significato geometrico dei parametri U, V, \bar{W} introdotti su \bar{F} .

Fissati i due punti (arbitrari su C^2) $O_1(1, 0, 0)$ e $O_2(0, 1, 0)$ di F si ha una corrispondenza fra i punti P di \bar{F} e quelli F di F assumendo \bar{P} sulla intersezione delle coniche di \bar{F} tangenti rispettivamente in O_1 e O_2 alle coniche O_1P e O_2P di F .

Come subito si verifica (notando, per esempio, che la tangente in O_1 alla conica $\bar{W} = \lambda U$ di \bar{F} ha le equazioni $x_4 = \lambda x_2, x_5 = x_6 = x_3 = 0$) che sono pure quelle della tangente alla conica $w = \lambda v$ di F in O_1 , questa corrispondenza è rappresentata da

$$U':V':\bar{W} = u:v:w$$

e non dipende affatto dai punti O_1, O_2 . Essa è una proiettività fra le due superficie di VERONESE F ed \bar{F} definita dall'assumere come corrispondenti su F ed \bar{F} punti coincidenti di C^2 e l'identità fra i fasci di direzioni uscenti dai punti stessi.

Dopo ciò le equazioni di una \bar{F} si possono assumere senza restrizioni nella forma

$$[4.1] \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = u^2 + \alpha w^2, \quad \bar{x}_2 = uv + \beta w^2, \quad \bar{x}_3 = v^2 + \gamma w^2 \\ \bar{x}_4 = uw + \delta w^2, \quad \bar{x}_5 = vw + \varepsilon w^2, \quad \bar{x}_6 = \zeta w^2 \end{cases}$$

ove $u:v:w$ sono gli stessi parametri assunti su F , relativi al punto corrispondente nella proiettività ora individuata. Riassumendo:

Vi sono ∞^6 superficie di VERONESE in S_2 fra loro tangenti nei punti di una conica assegnata: fra due qualsiasi di esse è determinata una proiet-

tività. Riferiti punti corrispondenti nella proiettività ad una stessa terna $u : v : w$ le equazioni di quelle superficie assumono la forma precedente [4,1].

5. — Per quanto non sia necessario per il seguito è opportuno notare come le ∞^6 superficie \bar{F} si ottengano dalla F . Basta applicare a questa la omologia definita da

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + \alpha x_6, \bar{x}_2 = x_2 + \beta x_6, \bar{x}_3 = x_3 + \gamma x_6, \\ \bar{x}_4 &= x_4 + \delta x_6, \bar{x}_5 = x_5 + \varepsilon x_6, \bar{x}_6 = x_6 + (\zeta - 1) x_6\end{aligned}$$

il cui centro è il punto $\alpha : \beta : \gamma : \delta : \varepsilon : \zeta - 1$ e il cui asse è lo S_4 $x_6 = 0$ tangente fisso lungo la conica.

6. — Consideriamo ora in uno S_6 un sistema ∞^1 di superficie di VERO-NESE tangenti alla F lungo la conica C^2 . La F appartenga allo spazio $x_7 = 0$ e lo S_4 tangente fisso lungo C^2 ad F sia perciò $x_6 = x_7 = 0$ e quindi gli $\infty^1 S_5$ delle superficie in esame siano rappresentati da $x_7 = kx_6$.

Le superficie del sistema siano individuate dai valori di un parametro λ , e la F corrisponda a $\lambda = 0$.

Se si proiettano queste superficie dal punto $(0, \dots, 0, 1)$, che è un punto qualsiasi di S_6 , non appartenente allo S_5 di F , su questo S_5 si ottiene un sistema ∞^1 di superficie \bar{F} tangenti ad F lungo C^2 , rappresentabili quindi con le equazioni [4.1] ove $\alpha, \dots, \varepsilon$ sono funzioni di λ che si annullano per $\lambda = 0$ e ζ è pure funzione di λ che per $\lambda = 0$ assume il valore 1. E poichè anche k è funzione di λ nulla per $\lambda = 0$ possiamo assumere come parametro λ il coefficiente di w^2 in x_7 . Con ciò le ∞^1 superficie di S_6 sono rappresentabili con equazioni del tipo

$$[6.1] \quad \begin{cases} x_1 = u^2 + \lambda A(\lambda) w^2, x_2 = uv + \lambda B(\lambda) w^2, x_3 = v^2 + \lambda C(\lambda) w^2 \\ x_4 = uw + \lambda D(\lambda) w^2, x_5 = vw - \lambda E(\lambda) w^2, x_6 = \{1 - \lambda R(\lambda)\} w^2, x_7 = \lambda w^2 \end{cases}$$

ove A, \dots, E, R sono funzioni di λ regolari per $\lambda = 0$.

Consideriamo ora un punto di C^2 , per esempio, O_2 ($u = v = 0$) e assumiamo nell'intorno di esso come coordinate non omogenee le $X_i = x_i/x_3$ (quindi $X_3 = 1$): si ha $X_i = x_i + [3]_{u,w}$ ove $[3]_{u,w}$ indica termini di 3° grado almeno in u e w .

La superficie di parametro λ ha in O_2 una calotta del 2° ordine che indicheremo con $\sigma(\lambda)$; la F ha la calotta $\sigma(0)$. Tutte le calotte $\sigma(\lambda)$, di centro O_2 , appartengono per ipotesi (come le intere superficie in esame) ad una V_3 , quindi ad una sua calotta di 2° ordine, regolare in O_2 cioè avente ivi un S_3 tangente ben determinato.

Risulta dalle equazioni precedenti che una calotta di V_3 contenente $\sigma(0)$ e $\sigma(\lambda)$ è rappresentata da

$$\begin{aligned}X_1 - A(\lambda) X_7 &= X_2^2 + \dots \\ X_4 - D(\lambda) X_7 &= X_2 X_5 + \dots \\ X_6 - R(\lambda) X_7 &= X_5^2 + \dots\end{aligned}$$

che ha per S_3 tangente quello rappresentato dall'uguagliare a zero i primi membri. Ma se *tutte* le calotte $\sigma(\lambda)$ debbono appartenere ad una *stessa* calotta di V_3 (di centro O_2) quello S_3 *non* deve dipendere da λ , il che impone che A, D, R siano costanti.

Se analogamente si procede per O_4 ($v = w = 0$) e poi per un terzo punto di C^2 si trova che anche B, C, E sono costanti.

Si ha quindi per le ∞^1 superficie la rappresentazione

$$x_1 = u^2 + A\lambda w^2, \quad x_2 = uv + B\lambda w^2, \quad x_3 = v^2 + C\lambda w^2, \quad x_4 = uw + D\lambda w^2 \\ x_5 = vw + E\lambda w^2, \quad x_6 = w^2 + R\lambda w^2, \quad x_7 = \lambda w^2.$$

Esse appartengono perciò al cono V_3^4 che dal punto $(A : B : C : D : E : R : 1)$ proietta la F data.

La superficie di parametro λ sta nello $S_5(1 + R\lambda) x_7 = \lambda x_6$.

Osservazione. — Il fatto topologico, cui s'è accennato in principio, che soggiace a questa dimostrazione è il seguente. Due calotte superficiali tangenti (in uno spazio topologico $X_r, r > 3$) non appartengono in generale ad una calotta del 2° ordine a tre dimensioni per cui il centro delle due calotte sia regolare: ma se ciò avviene per una calotta a tre dimensioni avviene per infinite e tutte queste hanno la stessa giacitura tangente. Qui di più avviene che non solo due ma tutte le ∞^1 calotte delle superficie di VERONESE con centro in un punto di C^2 stanno su una stessa calotta regolare di V_3 .

7. — Il teorema s'estende subito alle V_{2+i} di S_{5+i} ($i > 1$) che contengono una F_4^4 di VERONESE, F , e che dagli S_5 passanti per lo S_4 tangente fisso lungo una sua conica sono segati pure in superficie di VERONESE. Come prima lo S_5 di F può supporre individuato da $w_{6+h} = 0, h = 1, \dots, i$ (ed F dalle equazioni parametriche già scritte); gli $\infty^2 S_5$ secanti in superficie di VERONESE la V_{2+i} sono quelli di equazioni $w_{6+h} = k_h x_6$.

Se si proietta una qualsiasi delle sezioni (dipendenti da i parametri) dallo spazio $x_1 = \dots = x_6 = 0$ sullo S_5 di F si deve ottenere una superficie del tipo [4.1]. Le α, \dots, ζ sono funzioni di i parametri, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ e tali che, per esempio, per $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = 0$ si abbia la F . Anche le k_h sono funzioni degli stessi parametri, nulle quando essi sono tutti nulli. Poichè w_{6+h} è uguale a w^2 moltiplicato per un coefficiente che si annulla con i parametri, possiamo senz'altro prendere questo coefficiente come parametro λ_h e scrivere le equazioni delle ∞^i superficie di VERONESE nella forma

$$x_1 = u^2 + \sum_1^i \lambda_h A_h(\lambda) w^2, \quad x_2 = uv + \sum_1^i \lambda_h B_h(\lambda) w^2, \quad x_3 = v^2 + \sum_1^i \lambda_h C_h(\lambda) w^2 \\ x_4 = uw + \sum_1^i \lambda_h D_h(\lambda) w^2, \quad x_5 = vw + \sum_1^i \lambda_h E_h(\lambda) w^2, \quad x_6 = w^2 + \sum_1^i \lambda_h R_h(\lambda) w^2 \\ w_{6+h} = \lambda_h w^2, \quad h = 1, \dots, i$$

essendo le A_h, B_h, \dots, R_h funzioni regolari delle $\lambda_1, \dots, \lambda_i$, nell'intorno dei valori nulli di esse.

Dopo ciò, e procedendo come nel n. 6, si vede che l'esistenza di calotte regolari di V_{2+i} aventi i centri su C^2 e contenenti in essi tutte le calotte $\sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_i)$ delle superficie di VERONESE che vi passano impone la costanza delle A_h, \dots, E_h, R_h . E se queste sono costanti tutte le superficie [7.1] stanno sopra un S_{i-1} -cono (il cui vertice è quello congiungente i punti $(A_1, \dots, R_1, 1, 0, \dots, 0), (A_2, \dots, R_2, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ecc.).

8. Procedendo per successive estensioni, passiamo a considerare una $F_2^{n^2} = F$ di $\frac{S_{n(n+3)}}{2}$ rappresentante le curve piane d'ordine n al modo di VERONESE. Su di essa consideriamo una C^n . Gli spazi $(n-1)$ -osculatori, $S(n-1)$, alla F nei punti di C^n appartengono tutti ad uno $\frac{S_{n(n+3)}-1}{2}$ fisso che può dirsi spazio $(n-1)$ -osculatore ad F lungo C^n . La rappresentazione di tutte le $F_2^{n^2}$ di VERONESE aventi lungo C^n contatto d'ordine $n-1$ (e quindi lo stesso $\frac{S_{n(n+3)}-1}{2}$ osculatore fisso lungo C^n) si ottiene da quella di F in modo analogo alla [4.1] (cioè se C^n è data su F da $w=0$ aggiungendo a tutte le coordinate di F un termine in w^n). E dopo ciò si procede come nei nn. 6, 7 per provare che:

Se ∞^i superficie di VERONESE $F_2^{n^2}$ di $\frac{S_{n(n+3)}}{2} + i$ hanno in comune una C^n e lungo questa un contatto d'ordine $n-1$, e se C^n è luogo di punti regolari per la V_{2+i} che contiene quelle superficie, la V_{2+i} è necessariamente un S_{i-1} -cono di VERONESE.

9. - È ormai chiaro come la stessa dimostrazione si estenda al caso della varietà di VERONESE. Possiamo, *ad abundantiam*, schizzarla per il caso delle V_3^8 di S_9 (rappresentativa delle quadriche di un S_3).

Siano le equazioni di una tale V_3^8 le seguenti

$$[9.1] \quad \begin{cases} x_1 = u^2, x_2 = uv, x_3 = v^2, x_4 = uw, x_5 = vw, x_6 = w^2, \\ x_7 = ut, x_8 = vt, x_9 = wt, x_{10} = t^2 \end{cases}$$

e su di essa si consideri la F_2^4 di VERONESE $t=0$: gli S_3 tangenti a V_3^8 nei punti di F_2^4 stanno nello S_8 di equazione $x_{10}=0$.

Le V_3^8 tangenti a V_3^8 in ogni punto di F_2^4 hanno equazioni parametriche che si possono porre nella forma $\bar{x}_r = x_r + \alpha_r t^2$ ($r=1, \dots, 10$) ove le x_r sono date dalle [9.1].

Si consideri ora in S_{10} ($x_1: \dots: x_{10}: x_{11}$) un sistema ∞^1 di V_3^8 fra loro tangenti lungo la F_2^4 fissata ($t=0$); le loro equazioni parametriche, se

la V_3^8 iniziale corrisponde al valore $\lambda = 0$ del parametro, possono scriversi nella forma

$$\bar{x}_r = x_r + \lambda A_r(\lambda) t^2, \quad \bar{x}_{11} = \lambda t^2.$$

Si consideri ora un punto, per esempio, $u = w = t = 0$, di F_2^4 e si cerchi di costruire in esso una calotta regolare di V_4 contenente le due calotte di V_3^4 , corrispondenti a $\lambda = 0$ e ad un valore $\lambda \neq 0$, con centro in quel punto.

Fatte le posizioni $X_i = x_i/x_3$ si vede che nell'intorno di quel punto una tale calotta è rappresentata dalle equazioni

$$X_1 - A_1(\lambda) X_{11} = X_2^2 + [3], \quad X_4 - A_4(\lambda) X_{11} = X_2 X_5 + [3],$$

$$X_6 - A_6(\lambda) X_{11} = X_5^2 + [3]$$

$$X_7 - A_7(\lambda) X_{11} = X_2 X_8 + [3], \quad X_9 - A_9(\lambda) X_{11} = X_5 X_8 + [3],$$

$$X_{10} - A_{10}(\lambda) X_{11} = X_8^2 + [3].$$

Se deve esistere una V_4 contenente tutte quelle calotte (anzi tutte le V_3^8) le $A_r(\lambda)$ che compariscono nelle equazioni precedenti devono essere costanti. E similmente si prova che se in ogni punto di F_2^4 tutte le ∞^1 calotte di V_3^8 del 2° ordine debbono appartenere a calotte di V_4 risultano costanti tutte le A_r . Con ciò è dimostrato che la V_4 luogo delle $\infty^1 V_3^8$ per cui i punti di F_2^4 sono regolari è il cono di VERONESE proiettante da un punto di S_{10} la V_3^8 iniziale.

Possiamo quindi enunciare il teorema nella sua forma generale:

Date $\infty^i V_r^{n^r}$ di VERONESE in uno $S_{\binom{n+r}{r}+i-1}$ tali che esse abbiano contatto d'ordine $n-1$ in tutti i punti di una $V_{r-1}^{n^r-1}$ comune, se i punti di questa sono regolari per la V_{r+i} luogo delle $\infty^i V_r^{n^r}$, la V_{r+i} è necessariamente un S_{i-1} -cono di VERONESE $V_{r+i}^{n^r}$.

Questo teorema, che contiene evidentemente quello dello SCORZA, ne riduce le ipotesi non occorrendo per esso l'algebricità della V_{r+i} e limitandosi a considerarne ∞^i , e non $\infty^i \binom{n+r}{r}$, sezioni con $S_{\binom{n+r}{r}-1}$. L'ipotesi di regolarità è evidentemente soddisfatta nel caso dello SCORZA non potendo ogni punto della V_{r+i} esser singolare.

Matematica. — *Sulle relazioni fra le parti reali e le parti immaginarie degli operatori funzionali.* Nota di RENZO POSSENTI, presentata (1) dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. Si vuol indagare se, e sotto quali condizioni, e a meno di quali grandezze arbitrarie, la conoscenza di una sola delle due funzioni di variabile reale $U_0(\omega)$ e $V_0(\omega)$, da concepire la prima (funzione pari) come parte reale e la seconda (funzione dispari) come parte immaginaria di un operatore, nel senso di KENNELLY-STEINMETZ, $f(j\omega) = U_0(\omega) + jV_0(\omega)$, sia sufficiente a determinare l'operatore $f(\lambda)$, nel senso di HEAVISIDE-GIORGI, che assume lungo l'asse immaginario del piano della variabile λ i valori $U_0(\omega)$ per la parte reale e $V_0(\omega)$ per quella immaginaria.

Il problema è stato trattato da BAYARD (1) per il caso ristretto che l'operatore $f(\lambda)$ sia un'impedenza, ossia una funzione razionale di λ avente nel semipiano di destra la parte reale positiva e avente poli e radici nel semipiano di sinistra (compreso l'asse immaginario).

CAUER (2) ha esteso la trattazione alle funzioni $f(\lambda)$ che sono regolari nel semipiano di destra e ha ricavato, per trasformazione dalle formule di PICK-HERGLOTZ relative al cerchio unitario, delle notevoli relazioni fra i valori che $f(\lambda)$ assume nel semipiano di destra e lungo l'asse immaginario. Le formule di CAUER diventano particolarmente interessanti quando si supponga che $f(\lambda)$ sia reale per λ reale, perchè in tal caso, per il principio di simmetria di SCHWARZ, $U_0(\omega)$ è funzione pari e $V_0(\omega)$ funzione dispari di ω .

2. Lo stesso problema può essere trattato per via operatoria. Già CARSON (3) aveva dato per l'ammettenza indiziale $A(t)$ - risposta di un sistema ad una sollecitazione del tipo $1(t)$ (2) - le seguenti formule:

$$[1] \quad A(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{U_0(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = U_0(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{V_0(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega$$

valide per $t > 0$.

(1) Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

(2) Seguo qui le notazioni del GIORGI e quindi indico con $1(t)$ la funzione telegrafica unitaria e con $G(t)$ la funzione generatrice, cioè la risposta di un

Poichè la conoscenza della $A(t)$ equivale a quella dell'operatore $f(\lambda)$, è chiaro che queste formule risolvono implicitamente il problema propostoci. Le formule di CARSON cadono però in difetto, come è facile verificare, quando l'operatore $f(\lambda)/\lambda$ non è regolare lungo l'asse $\lambda = j\omega$. WAGNER (4) nel riportare le [1] ne delimita con maggior rigore il campo di validità, ma non dice quali altre relazioni corrono fra la $A(t)$ e le $U_0(\omega)$ e $V_0(\omega)$ quando $f(\lambda)$ non è regolare.

3. Per ricavare delle formule che abbiano la validità più generale possibile, supponiamo in un primo tempo, che $f(\lambda)$ sia del tipo che GIORGI ha chiamato diffusivo, cioè che $f(\lambda)$ si annulli nelle direzioni $\lambda \rightarrow \pm j\infty$, e riferiamoci alle seguenti relazioni tra l'operatore $f(\lambda)$ e la sua generatrice $G(t)$ (1):

$$[2] \quad G(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_C f(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda;$$

$$[3] \quad f(\lambda) = \int_0^\infty G(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau$$

dove la notazione \int_C sta ad indicare che il percorso d'integrazione deve essere una linea che, come il semicerchio C infinito di destra, vada da $-j\infty$ a $+j\infty$ lasciando a sinistra tutti i punti singolari al finito della $f(\lambda)$.

Osserviamo ora che gli $f(\lambda)$ che s'incontrano nello studio dei sistemi fisici sono tutti del tipo che altrove (2) chiamo a struttura reale e che quindi $G(t)$ è reale per t reale; se ne conclude, ponendo nella [3] $\lambda = \alpha + j\omega$ e $f(\lambda) = u(\alpha, \omega) + jv(\alpha, \omega)$, che $u(\alpha, \omega)$, e in particolare $U_0(\omega)$, è funzione pari, mentre $v(\alpha, \omega)$, e in particolare $V_0(\omega)$, è funzione dispari di ω . Tenendo conto di questo e ponendo nella [2] $\lambda = j\omega$, vale a dire integrando lungo l'asse immaginario, da $-j\infty$ a $+j\infty$, ma con l'avvertenza, che, per seguire un cammino equivalente al C , occorre aggirare a destra con dei piccoli semicerchi i punti singolari $j\sigma'$ di $f(\lambda)$ situati sul-

sistema ad una sollecitazione impulsiva unitaria $Fu(t)$. Indico poi promiscuamente con $f(\lambda)$ sia una funzione della variabile complessa λ , sia il simbolo di un'operazione funzionale nella quale λ ha il significato di d/dt .

(1) Vedi la nota precedente.

(2) In una Memoria, dallo stesso titolo della presente Nota, in corso di pubblicazione in « Poste e Telecomunicazioni ».

l'asse immaginario e con dei cerchietti interi i punti singolari σ situati nel semipiano di destra, la [2] fornisce per $G(t)$ l'espressione seguente:

$$[4] \quad G(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (U_0 \cos \omega t - V_0 \sin \omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi j} \sum \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma} + \int_{\delta} \right] f(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi j} \sum \int_{\leftarrow}^{\rightarrow} f(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda$$

dove l'integrale \int_0^{∞} va inteso come valore principale di CAUCHY, le nota-

zioni \int_{γ} e \int_{δ} indicano gl'integrali estesi ai semicerchietti e ai cerchietti

interi di raggio ρ , sopraccennati, e i termini $\int_{\leftarrow}^{\rightarrow}$ indicano gl'integrali lungo i

due lembi, percorsi in sensi contrari, di un taglio orizzontale effettuato nel piano della variabile λ fra l'asse immaginario e un punto σ ; questi termini sono nulli quando σ non è punto di diramazione.

Ponendo nella [4] $-t$ al posto di t e osservando che, per $t > 0$, deve essere $G(-t) = 0$, si ottengono le formule:

$$[5] \quad G(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_0 \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi j} \sum \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma} + \int_{\delta} \right] f(\lambda) \cosh \lambda t d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi j} \sum \int_{\leftarrow}^{\rightarrow} f(\lambda) \cosh \lambda t d\lambda$$

$$[6] \quad G(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_0 \sin \omega t d\omega + \frac{1}{\pi j} \sum \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\gamma} + \int_{\delta} \right] f(\lambda) \sinh \lambda t d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi j} \sum \int_{\leftarrow}^{\rightarrow} f(\lambda) \sinh \lambda t d\lambda$$

valide per $t > 0$.

Se si esclude *a priori* che l'operatore abbia punti singolari a destra dell'asse immaginario, il che equivale ad escludere che si tratti di sistemi contenenti sorgenti d'energia, l'indeterminatezza con cui, data la V_0 o la U_0 , si può ricavare la $G(t)$ si riduce al contributo degli eventuali punti singolari $j\sigma'$, e se si suppone che questi ultimi siano tutti poli semplici con residui R , si ha:

$$[7] \quad G(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_0 \cos \omega t d\omega + \sum R \cos \sigma' t = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_0 \sin \omega t d\omega + j \sum R \sin \sigma' t.$$

Notiamo di passaggio che, applicando queste formule all'operatore $f(\lambda)/\lambda$, nell'ipotesi che $f(\lambda)$ sia regolare e che quindi l'unico punto $j\sigma'$ sia il punto $\lambda = 0$ con residuo $U_0(0)$, si ritrovano, tenendo presente che la $A(t)$ di $f(\lambda)$ è la $G(t)$ di $f(\lambda)/\lambda$, le formule di CARSON.

Ma quando $f(\lambda)$ è regolare lungo tutto l'asse immaginario, più che delle formule di CARSON, che abbiamo così dimostrate circoscrivendone esattamente il campo d'applicabilità, conviene servirsi delle seguenti:

$$[8] \quad G(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_0 \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_0 \sin \omega t d\omega$$

perchè ognuna di queste contiene una sola delle due funzioni $U_0(\omega)$ e $V_0(\omega)$.

Il problema proposto in principio è dunque risolto dalle formule da [5] a [8], le quali corrispondono a ipotesi via via più restrittive circa la natura di $f(\lambda)$ e quindi circoscrivono sempre meglio quest'ultima fino a determinarla completamente.

4. Nel caso dell'operatore diffusivo e regolare, per trovare esplicitamente $f(\lambda)$ basta introdurre i valori di $G(t)$ dati da una delle [8] nella [3]; facendo poi in questa $\lambda = j\omega_1$ e separando le parti reali dalle immaginarie, si ottengono le formule:

$$[9] \quad U_0(\omega_1) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega_1 \tau d\tau \int_0^{\infty} V_0(\omega) \sin \omega \tau d\omega$$

$$[10] \quad U_0(\omega_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega_1 \tau d\tau \int_0^{\infty} U_0(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$[11] \quad V_0(\omega_1) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega_1 \tau d\tau \int_0^{\infty} U_0(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$[12] \quad V_0(\omega_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega_1 \tau d\tau \int_0^{\infty} V_0(\omega) \sin \omega \tau d\omega.$$

La [9] e la [11] esprimono direttamente una delle due componenti in funzione dell'altra, mentre la [10] e la [12] rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti, affinché la $U_0(\omega)$ e la $V_0(\omega)$ siano pensabili come componenti reali e immaginarie di un possibile operatore diffusivo e regolare.

5. Quando $f(\lambda)$ non è diffusivo, la [2], dalla quale siamo partiti, non è utilizzabile, perchè divergente. Anche l'artificio, suggerito da GIORGI, d'introdurre nella [2] un opportuno fattore di convergenza, deducendo

la $G(t)$ con un successivo passaggio al limite, non è applicabile in generale al nostro problema, perchè non sempre è possibile risalire dal comportamento per $\omega \rightarrow \infty$ della sola $U_0(\omega)$ o della sola $V_0(\omega)$ a quello per $\lambda \rightarrow \pm j\infty$ della $f(\lambda)$. Val meglio in questo caso cercare di decomporre la U_0 o la V_0 date in una somma di termini per ciascuno dei quali si sappia trovare la corrispondente $f(\lambda)$.

Così, per esempio, ad un termine $(-1)^n \omega^{2n}$ con n intero, positivo nullo o negativo, in $U_0(\omega)$ corrisponde in $f(\lambda)$ un termine λ^{2n} ; un termine sen $\omega\tau_0$ in $V_0(\omega)$ non può derivare che da un termine $e^{\lambda\tau_0}$ in $f(\lambda)$; un termine $\cos \frac{\pi}{2n} \omega^{\frac{1}{n}}$ con $n \neq 0$ in $U_0(\omega)$ deriva necessariamente da un termine $\lambda^{\frac{1}{n}}$ in $f(\lambda)$ e gli corrisponde sen $\frac{\pi}{2n} \omega^{\frac{1}{n}}$ in $V_0(\omega)$ e così via.

È poi ovvio che se $f(\lambda)$ è una soluzione particolare del nostro problema, la soluzione generale si otterrà aggiungendo a $f(\lambda)$ il termine $\lambda\varphi(\lambda^2)$ se la grandezza di partenza è la $U_0(\omega)$, e il termine $\varphi(\lambda^2)$ se la grandezza di partenza è la $V_0(\omega)$, dove φ è il simbolo della più generale funzione che sia reale per argomento reale.

6. Se α è un'ascissa superiore a quella del punto singolare al finito di $f(\lambda)$ situato più a destra, l'integrale [2] si può eseguire percorrendo la parallela all'asse immaginario di ascissa α . Eliminando $G(t)$ dalle equazioni che così si ottengono e da quelle già ottenute da [5] a [8], risultano relazioni fra $u(\alpha, \omega)$, $v(\alpha, \omega)$, $U_0(\omega)$, $V_0(\omega)$ e i punti singolari di $f(\lambda)$ situati nella striscia fra l'asse immaginario e la parallela suddetta.

7. Tutto quel che abbiamo detto circa i rapporti fra le componenti reale e immaginaria di un operatore si lascia estendere ai rapporti fra il modulo e l'argomento. Basta osservare che, posto

$$f(j\omega) = M(\omega) e^{j\Theta(\omega)},$$

log $M(\omega)$ e $\Theta(\omega)$ sono rispettivamente la U_0 e la V_0 dell'operatore, a struttura reale se tale è $f(\lambda)$, log $f(\lambda)$.

Come caso particolare, quando sono verificate queste due ipotesi:

a) tutti i punti singolari e tutte le radici di $f(\lambda)$ giacciono a sinistra dell'asse immaginario.

b) $f(\lambda)$ tende a 1 per $\lambda \rightarrow \pm j\infty$, per modo che risulti diffusivo l'operatore log $f(\lambda)$.

sono applicabili le formule da [8] a [12] e quindi l'operatore è determinato dal solo suo modulo o dal solo suo argomento, a meno, in questo caso, del fattore arbitrario $\varphi(\lambda^2)$.

BIBLIOGRAFIA

- (1) M. BAYARD, *Relations entre les parties réelles et imaginaires des impédances etc.*
« Revue Générale de l'Electricité », 1935, pag. 659.
 - (2) W. CAUER, *Das Poissonsche Integral und seine Anwendungen.* « Elektrische Nachrichten Technik », 1940, pag. 17.
 - (3) J. R. CARSON, *Electric Cirenit Theory and Operational Calculus.* New York, 1926, pag. 180.
 - (4) K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung.* Leipzig, 1940, pagg. 34-35.
-

Matematica (Geometria). — *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di tre superficie* ⁽¹⁾. Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata ⁽²⁾ dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. Sia C una curva sghemba algebrica, d'ordine n e genere p , priva di punti multipli. Si considerino tre superficie f, φ, ψ , irriducibili degli ordini rispettivi $\lambda \leq \mu \leq \nu$ le quali passino semplicemente per C . La curva C assorbe

$$[1] \quad E = (\lambda + \mu + \nu - 4)n - (2p - 2)$$

intersezioni semplici delle tre superficie: E è l'equivalenza (numerativa) di C nel gruppo virtuale di punti (f, φ, ψ) .

Se $E = \lambda\mu\nu$ e se inoltre f, φ, ψ non hanno, fuori di C , un'ulteriore curva comune, la curva C è intersezione semplice completa di f, φ, ψ ⁽³⁾.

⁽¹⁾ L'argomento di questo scritto mi è stato suggerito da F. SEVERI. Ved. la rubrica « Problemi, risultati, discussioni » del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica nei relativi « Rendiconti », 1943.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽³⁾ La condizione che f, φ, ψ non abbiano, fuori di C , altra curva comune è necessaria. Si consideri, ad esempio, una C^5 razionale con una (sola) quadrisecante (C^5 di VAHLEN). Se f, φ, ψ sono tre superficie cubiche passanti semplicemente per essa l'equivalenza di C^5 nel gruppo di punti (f, φ, ψ) calcolata con la 1) vale 27. Pur tuttavia C^5 non è intersezione semplice completa delle tre superficie. In effetto, le superficie cubiche per C^5 contengono, in conseguenza, la quadrisecante di C^5 e formano un sistema lineare ∞^3 omaloidico. La quadrisecante, nel gruppo (f, φ, ψ) , ha l'equivalenza — 1.

La precisazione del concetto d'intersezione semplice di tre superficie, aventi una curva comune, in un punto di questa, nonché l'equivalenza *funzionale* di una curva irriducibile, priva di punti multipli, lungo cui tre superficie si seghino semplicemente, nel gruppo virtuale delle loro intersezioni, trovasi in F. SEVERI, *Ueber die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitte von Formen* in corso di stampa nelle « Hamburger Abhandl. » dal gennaio 1942. Questo lavoro fu esposto da SEVERI nelle sue lezioni presso il Reale Istituto di Alta matematica nel dicembre 1941.

Le brevi considerazioni che seguono sono dirette a caratterizzare quelle curve che possono ottenersi quali intersezioni semplici complete di tre superficie.

2. La curva C sia intersezione semplice completa di f, φ, ψ . Si considerino i sistemi lineari completi $|f|, |\varphi|, |\psi|$ costituiti dalle superficie degli ordini λ, μ, ν passanti semplicemente per C ; la curva C stessa è intersezione semplice completa di tre superficie estratte genericamente da $|f|, |\varphi|, |\psi|$. Le dimensioni di $|\varphi|, |\psi|$ sono certo > 0 .

Il sistema $|\psi|$ contiene parzialmente o totalmente i sistemi $|f|, |\varphi|$ e quindi, per l'ipotesi, non ha ulteriori punti base, fuori di C . In particolare ogni punto di C è, per la generica ψ , semplice con piano tangente variabile. *La generica ψ è dunque priva di punti multipli.*

3. Sulla generica ψ le superficie φ segano, fuori di C , un sistema lineare $|\gamma|$ di curve privo di punti base. La generica γ risulta pertanto priva di punti multipli e quindi, se è riducibile, si compone di più curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ irriducibili, prive di punti multipli, appartenenti ad un fascio (lineare) senza punti base. Se riducibile, la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \dots$ è pertanto totalmente sconnessa.

Sulla curva γ_1 (con $\gamma_1 = \gamma$ se γ è irriducibile) le superficie dell'ordine $\mu + \nu - 4$ passanti per $C + \gamma - \gamma_1$ (cioè aggiunte a γ_1) segano su γ_1 , fuori del gruppo $(C + \gamma - \gamma_1, \gamma_1)$, la serie canonica completa. Ma poichè γ_1 non ha punti comuni con $\gamma - \gamma_1$, così le superficie di quel medesimo ordine passanti per C segano su γ_1 , fuori del gruppo (C, γ_1) , la serie canonica completa. Esistono, d'altra parte, superficie f passanti per C e che non hanno intersezioni variabili con γ_1 ; ma allora una superficie arbitraria dell'ordine $\mu + \nu - \lambda - 4$ stacca su γ_1 un gruppo canonico (effettivo o virtuale). La curva γ_1 è pertanto *sottocanonica*. E sottocanonica dovrà pure dirsi la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$, in quanto su di essa le superficie di quell'ordine segano gruppi somme di gruppi canonici delle singole componenti.

Se Γ è una sezione piana di ψ , si avrà dunque su ψ :

$$C = \mu\Gamma - \gamma$$

dove γ è una curva sottocanonica di ψ .

Su ψ la curva C appare pertanto quale differenza fra una curva intersezione completa e una curva sottocanonica.

4. Il risultato precedente si inverte.

Sia ψ una superficie d'ordine ν , priva di punti multipli, la quale possiede una curva γ , anche priva di punti multipli, *sottocanonica*: su γ

le superficie di un determinato ordine ρ segano gruppi canonici. Una superficie φ d'ordine μ (ora non necessariamente $\leq \nu$) sega ψ , fuori di γ , in una curva C irriducibile e priva di punti multipli. Le superficie dell'ordine $\mu + \nu - 4$ passanti per C (cioè aggiunte a γ) segano su γ , fuori del gruppo (C, γ) , la serie canonica completa.

Se A è un gruppo sezione piana di γ ha luogo pertanto, su γ , l'equivalenza:

$$(\mu + \nu - 4) A - \rho A \equiv (C, \gamma).$$

Su γ esiste dunque la serie:

$$|(\mu + \nu - \rho - 4) A - (C, \gamma)|:$$

è la serie zero. Esistono dunque, in conseguenza ⁽¹⁾, superficie f dell'ordine $\mu + \nu - \rho - 4$ passanti per C e che non hanno intersezioni variabili con γ .

Se x è l'ordine e π il genere di γ sarà: $\rho x = 2\pi - 2$.

Per l'ordine n e il genere p di C si ha poi:

$$n = \mu\nu - x \quad ; \quad 2p = (\mu\nu - 2x)(\mu + \nu - 4) + 2\pi.$$

L'equivalenza di C nel gruppo virtuale di punti (f, φ, ψ) vale dunque:

$$E = (\mu + \nu + \mu + \nu - \rho - 8)(\mu\nu - x) - (\mu\nu - 2x)(\mu + \nu - 4) - \\ - 2\pi + 2 = \mu\nu(\mu + \nu - \rho - 4).$$

Poichè le superficie f, φ, ψ non hanno manifestamente, fuori di C , ulteriore curva comune, si conclude che C è intersezione semplice completa delle tre superficie f, φ, ψ .

5. La breve ricerca può riassumersi nel modo seguente.

Si consideri il sistema $L^{\mu\nu}$ delle curve intersezioni semplici complete di due superficie F^ν, F^μ ; una curva residua, rispetto a quel sistema, di una curva sottocanonica (per esempio, di un'altra curva intersezione completa $L^{\rho\sigma}$ o di una curva ellittica . . .) è intersezione semplice completa di tre superficie. Inversamente ogni curva siffatta è ottenibile per tale via.

⁽¹⁾ Per l'argomentazione qui addotta cfr. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza . . .*, pag. 375 (Roma, Ed. Cremonese, 1938).

Matematica (Geometria). — *Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore.* Nota di ANGELO MAXIA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. PREMessa. — In una Nota di prossima pubblicazione nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni » il BOMPIANI prende in esame un elemento cuspidale ordinario (per una curva che lo contiene il suo centro è origine di un ramo superlineare del second'ordine e della prima classe) e, introdotta la nozione di *ordine* dell'elemento, ne inizia lo studio proiettivo differenziale fino a stabilire un riferimento intrinseco legato all'elemento. Tale riferimento dipende *dall'intorno del decimo ordine* del punto sul ramo cuspidale o, secondo la nomenclatura del BOMPIANI già usata per gli elementi differenziali regolari, dall'elemento E_{10} .

Fatti nuovi si presentano se si cerca di estendere lo studio al caso di elementi cuspidali di *specie superiore* cioè appartenenti a rami superlineari di ordine maggiore di due o di classe maggiore di uno. Essi si manifestano essenzialmente nella presenza di invarianti proiettivi prima ancora che dell'elemento si riesca a determinare un riferimento intrinseco e mettono quindi in luce l'esistenza di elementi cuspidali proiettivamente distinti dipendenti da intorni più bassi di quello capace di determinare un riferimento intrinseco ⁽²⁾. Tali fatti sono intimamente connessi alle relazioni numeriche che legano l'ordine m e la classe q del ramo cui appartiene l'elemento.

Si presentano così profondamente dissimili, tanto da richiedere una trattazione separata, i casi in cui m, q siano o non siano primi fra loro.

In questa Nota riassuntiva si espongono sommariamente alcuni risultati di un lavoro, di prossima pubblicazione nei « Rendiconti di Mate-

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ Fatti analoghi si presentano nello studio fatto dal BOMPIANI, *Sui flessi di specie superiore* i cui risultati sono già in corso di pubblicazione nel « Boll. dell'Unione Mat. Italiana ». Tali studi, insieme a quelli sulle cuspidi, rientrano nel più vasto argomento delle singolarità a cui il BOMPIANI ha dedicato nell'anno 1942-43 una parte del suo corso di *Geometria differenziale*.

matica e delle sue applicazioni», riguardante lo studio di un elemento cuspidale nel caso in cui m, q siano primi fra loro.

L'interessante argomento merita d'essere approfondito per spingere più innanzi la teoria proiettiva delle singolarità. Si può infatti notare che la trattazione particolareggiata dell'ENRIQUES-CHISINI ⁽¹⁾ non esaurisce lo studio di un ramo superlineare. Basti dire al riguardo che nel caso in cui m, q siano primi fra loro la trattazione si arresta all'intorno di ordine più basso relativo al ramo. E non molto diversamente accade nel caso opposto se si esclude l'ipotesi, da considerarsi particolare, che nella rappresentazione del ramo manchino alcuni opportuni termini ⁽²⁾.

Lo studio a cui qui si accenna viene eseguito approssimando l'elemento cuspidale mediante curve di confronto di preciso significato geometrico e per quanto è possibile semplici, fino a determinare un riferimento intrinseco (e quindi dare ai coefficienti dei termini dello sviluppo significato invariante). La conoscenza degli elementi geometrici capaci di caratterizzare tali curve equivarrà alla conoscenza dell'elemento ⁽³⁾.

2. GENERALITÀ SU DI UN ELEMENTO CUSPIDALE. — Di un elemento differenziale irregolare

$$[1] \quad x^m = \sum a_{rs} x^r y^s \quad r, s \geq 0, \quad r + s > m \quad (4)$$

il cui centro $O \equiv (0, 0, 1)$ sia, per una curva γ contenente l'elemento, origine di un *unico* ramo superlineare di ordine m ($m > 1$) e classe q ($q > 0$) consideriamone la rappresentazione parametrica

$$[2] \quad y = t^m, \quad x = t^n (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_i t^i + \dots), \quad n = m + q$$

⁽¹⁾ Cfr.: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1918; vol. II, libro IV.

⁽²⁾ Se il ramo ha la rappresentazione parametrica

$$y = t^m, \quad x = t^{m+q} [\alpha_0 + \alpha_1 t a_1 + \alpha_2 t a_2 + \dots]$$

la trattazione va fino all'intorno determinato dai coefficienti (detti *caratteristici*) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i$ per i quali

$$D(m, q) \equiv 1, \quad D(m, q, q_1) \equiv 1, \quad D(m, q, q_1, \dots, q_{i-1}) \equiv 1, \quad D(m, q, q_1, \dots, q_i) = 1$$

(D è simbolo di massimo comun divisore).

⁽³⁾ Il principio e il metodo sono quelli esposti dal BOMPIANI già dal 1926 nella Nota: *Per lo studio proiettivo differenziale delle singolarità* del « Boll. Un. Mat. Italiana ».

⁽⁴⁾ La somma deve intendersi estesa alle coppie r, s per cui $r + s > m$. Per il passaggio alla rappresentazione parametrica ⁽²⁾ cfr. ENRIQUES-CHISINI, loc. cit.

e in conseguenza valutiamo di ciascun termine $x^r y^s$ l'ordine di infinitesimo $nr + ms$ rispetto a t considerato come infinitesimo principale. Ordiniamo quindi gli addendi $a_{rs} x^r y^s$ in ordine di infinitesimo crescente rispetto a t e poniamo

$$[3] \quad x^m = a_{0n} y^n + \sum (a_{r_i s_i} x^{r_i} y^{s_i})$$

dove, per ogni intero i , i termini chiusi in parentesi corrispondono alle soluzioni intere r_i, s_i dell'equazione

$$[4] \quad nr_i + ms_i = mn + i \quad i = 1, 2, \dots$$

La rappresentazione [3] determina la rappresentazione [2] e, per $i < m$, inversamente. Le rappresentazioni [3] che fino ad un certo i danno luogo alla stessa rappresentazione [2] determinano un *elemento cuspidale* E_k di ordine $k = mn + i$ relativo ad un ramo di ordine m e classe q . Un tale elemento lo indicheremo spesso col simbolo $(m, q; i)$. Un E_k definisce un gruppo di $k + 1$ punti la cui configurazione è conosciuta solo quando si conoscono due dei tre numeri m, q, i (il solo valore di k non caratterizza, com'è evidente, la natura dell'elemento).

Il più piccolo valore di i per il quale le soluzioni della [4] sono tali che $r_i + s_i > n$ è dato da $\delta + 1 = mn + n + q$. Da ciò segue la possibilità di rappresentare un E_k ($k \leq \delta$) con un'espressione [3] in cui ad ogni indice i corrisponde un solo termine di ordine $\leq n$. Ciò significa geometricamente che un tale E_k può essere sempre posseduto da una curva C^n di ordine n . Nel caso $q > 1, k > \delta$ l'essere un E_k appartenente ad una C^n costituisce una particolarità proiettiva per l'elemento.

A differenza del caso $(2, 1; i)$ l'elemento $(m, q; i)$, dove i dipende da m, q ma è in tutti i casi non maggiore di $n + q - 1$, determina sempre un riferimento intrinseco al quale si può pervenire approssimandolo con curve di ordine n . Il valore di i da cui dipende il riferimento può apparire dal seguente schema:

$$m < q \left\{ \begin{array}{l} q = m + k \ (k < m) \text{ il riferimento dipende da un } E_{mn+2q} \\ q = 2m + k \dots\dots\dots E_{mn+n+k} \\ q = hm + k \dots\dots\dots E_{mn+2q}, \end{array} \right.$$

$$m > q \left\{ \begin{array}{l} m = 2, q = 1 \text{ il riferimento dipende da un } E_{40} \\ m > 2, q = 1 \dots\dots\dots E_{mn+n} \\ m - hq + k \ (k < q) \dots\dots\dots E_{mn+(h+2)q}. \end{array} \right.$$

I tipi di curva approssimanti che determinano il riferimento, che si differenziano nettamente nei due casi $m < q, m > q$, e gli enti geometrici che ad essi si collegano sono esposti molto succintamente nella seguente classifica.

3. CASO $q = m + k$, $k < m$. - L'elemento E_δ ($\delta = mn + n + q - 1$) può approssimarsi con curve Γ del tipo

$$[5] \quad x[x^{m-1} + P_m + \dots + P_{n-2}](\alpha x + \beta y + 1) = a_0 n (y + \mu x)^n \quad (1).$$

L'elemento E_{mn+q} determina una proiettività π in cui devono corrispondersi le tracce T nella tangente cuspidale delle tangenti inflessionali a Γ (nei suoi flessi di specie $y = x^n$) e le rette t che dal centro O dell'elemento proiettano i punti di contatto di tali tangenti. L'elemento E_{mn+2q} associa ad ogni retta t per O una retta t_1 per il punto T omologo di t in π . L'involuppo γ delle rette t_1 , che sono le rette inflessionali delle curve Γ che contengono l'elemento, è al variare di t una conica o una cubica della terza classe a seconda che $2k < m$ o $2k \geq m$ (può essere $2k = m$ se $k = 1$). La tangente cuspidale fa parte dell'involuppo: come retta semplice nel primo caso, come retta doppia nel secondo. In ogni caso la corrispondenza fra le rette t e le rette t' che da O proiettano i punti di contatto delle corrispondenti tangenti t_1 di γ è una proiettività π' avente come rette unite la tangente cuspidale e una retta t_0 . Detti O_2 l'omologo di t_0 in π , O_1 l'intersezione di t_0 con la retta t_1 di γ uscente da O_1 risulta determinato un triangolo di riferimento OO_1O_2 . Nel caso $2k > m$ si verifica che O_1 è anche il punto doppio della curva luogo aderente a γ e O_1O_2 la tangente cuspidale relativa.

In relazione al triangolo OO_1O_2 la curva Γ può supporre avere il punto O_1 come $(q-1)$ -uplo con $q-2$ tangenti coincidenti con la retta O_1O_2 . La tangente rimanente in O_1 , distinta da O_1O , O_1O_2 , interseca la curva aderente a γ in un punto che può assumersi come punto unità.

4. CASO $q = 2m + k$, $k < m$. - L'elemento E_δ può approssimarsi con curve Γ del tipo

$$[6] \quad x[x^{m-1} + P_m + \dots + P_{n-3}](\alpha_1 x + \beta_1 y + 1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + 1) = a_0 n (y + \mu x)^n.$$

L'elemento E_{mn+m+k} determina sulla tangente cuspidale una involuzione ω in cui devono corrispondersi le tracce delle tangenti inflessionali (in flessi di specie $y = x^n$) alle curve approssimanti l'elemento. Punti uniti in ω sono O e un punto O_2 che può assumersi come punto $(0, 1, 0)$. L'elemento E_{mn+q} determina una proiettività π fra le coppie di ω e le rette che da O proiettano i flessi, allineati con O , relative alle tangenti inflessionali uscenti dalle coppie di ω e relative alle curve Γ contenenti l'elemento. Viene in particolare determinata una retta OO_1 , l'omologa

(1) Qui e nel seguito le P_h indicano forme in x, y di grado h . Non ci soffermeremo, per mancanza di spazio, sulle caratteristiche geometriche delle curve Γ .

in π di O_2 . L'elemento E_{mn+n+k} associa ad ogni punto di OO_2 un'involuzione ω' su OO_1 di cui O è sempre punto unito. L'ulteriore punto unito O_1 dell'involuzione ω' corrispondente ad O_2 determina assieme ad O, O_2 un triangolo di riferimento. Le rette che uniscono i punti di OO_2 coi punti uniti, diversi da O , delle involuzioni ω' inviluppano una curva γ contenente la retta OO_2 , che è una *conica* se $2k \leq m$ (può essere $2k = m$ se $k = 1$), una curva molto particolare della quarta classe se $2k > m$. In tutti e due i casi l'elemento E_{mn+n+k} basta a determinare un punto unità.

5. CASO $q = m h + k, h > 2, k < m$. - L'elemento E_δ può approssimarsi con curve Γ del tipo

$$[7] \quad x[x^{m-1} + P_m + \dots + P_{n-h-1}] \prod_1^h (\alpha_i x + \beta_i y + 1) = a_0 n (y + \mu x)^n.$$

L'elemento E_{mn+m+k} determina sulla tangente cuspidale una plurilinearità a cui devono soddisfare le tracce delle h tangenti inflessionali alle curve Γ (nei suoi h flessi di specie $y = x^n$) contenenti l'elemento. Nella plurilinearità sono uniti il punto O e un punto O_2 . L'elemento E_{mn+q-m} determina sulla tangente cuspidale $h-1$ punti, in generale distinti fra loro e da O , aventi O_2 come centro armonico rispetto ad O . Tali punti sono insieme ad O_2 le tracce su OO_2 delle tangenti inflessionali di una curva Γ che contenga l'elemento. L'elemento E_{mn+q} determina una retta uscente da O , la retta su cui stanno gli h flessi delle curve Γ per l'elemento. L'elemento E_{mn+2q} determina sulla detta retta un punto O_1 e quindi altri $h-1$ punti: tracce delle accennate tangenti inflessionali. In relazione al triangolo di riferimento $OO_1 O_2$ si possono fare $(h-1)^2$ scelte del punto unità.

6. CASO $m > 2, q = 1$ ⁽¹⁾. - L'elemento E_δ può approssimarsi con curve Γ del tipo

$$[8] \quad x^m (\alpha x + \beta y + 1) = a_0 n (y + \mu x)^2 \prod_1^{m-1} (y + \mu_i x).$$

L'elemento E_{mn+1} determina nel fascio di centro O una plurilinearità e quindi due rette unite: di esse una è la tangente cuspidale, l'altra OO_1 è il luogo dei flessi (di specie $y = x^n$) delle curve Γ dotate di tale singolarità e passanti per l'elemento. L'elemento E_{mn+n-2} determina $m-1$ rette: le rette che da O proiettano le ulteriori intersezioni delle curve Γ per l'elemento con le relative tangenti nei punti di OO_1 . Tali rette hanno, rispetto alla tangente cuspidale, la retta OO_1 come centro delle medie armoniche.

⁽¹⁾ Il caso $m = 2$ si trova trattato nel lavoro citato all'inizio della Nota. Esso si differenzia da quello qui trattato per il solo fatto che l'elemento E_δ non basta a determinare il punto unità.

L'elemento E_{mn+n-1} determina sulla tangente cuspidale un punto O_2 , traccia delle tangenti nei punti di OO_2 alle curve Γ contenenti l'elemento. Una sola curva Γ contiene l'elemento E_{mn+n} ; essa taglia, fuori di O , la retta OO_1 in un punto O_4 che insieme ad O, O_2 determina un triangolo di riferimento. La conica osculatrice a Γ in O_1 e tangente in O a OO_2 permette, insieme a una delle $m-1$ rette già determinate uscenti da O , di determinare un punto unità. L'elemento E_{mn+n} determina $m-3$ invarianti proiettivi.

7. CASO $m = qh + k, q > 1, k < q$. - L'elemento E_8 può essere approssimato mediante curve Γ del tipo

$$[9] \quad x^{h+1} [x^{m-h-1} + P_{m-h} + \dots + P_{n-h-2}] (\alpha x + \beta y + 1) = \\ = a_0 n (y + \mu x)^{n-h} \prod_1^h (y + \mu_i x).$$

L'elemento E_{mn+q} determina fra le rette uscenti da O una pluri-linearità di cui sono unite la tangente cuspidale e una retta OO_1 . L'elemento E_{mn+qh} determina h rette per O aventi OO_1 come centro delle medie armoniche rispetto alla tangente cuspidale. L'elemento $E_{mn+q(h+1)}$ determina un punto O_2 sulla tangente cuspidale. L'elemento $E_{mn+q(h+2)}$ determina un punto O_4 sulla retta OO_1 e una curva Γ avente O_1 punto $(q-1)$ -plo. Il punto comune a Γ e alla retta OO_1 , fuori di O, O_4 è generalmente distinto da O, O_4 e la tangente u in esso non passa per O_2 . Il triangolo OO_1O_2 e la retta u costituiscono un riferimento completo associato all'elemento $E_{mn+q(n+2)}$.

Il significato geometrico degli elementi introdotti generalizzano fino ad un certo punto quelli relativi al caso precedente e l'abbiamo tralasciato per brevità.

Meccanica. — *Punto materiale orientato*. Nota ⁽¹⁾ di
 UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Applicando a un corpo di dimensioni infinitesime (punto materiale) le equazioni cardinali della dinamica, si è condotti ad associare alla classica equazione vettoriale della dinamica del punto, che esprime la proporzionalità tra forza e accelerazione, essendo il rapporto la massa, un'altra equazione vettoriale che definisce la proporzionalità tra un momento sollecitatorio e l'accelerazione angolare, essendo il rapporto un momento d'inerzia. Si ammette in sostanza che durante il moto del punto materiale questo possa anche ruotare su se stesso, cioè cambiare orientamento; chiamerò questa immagine *punto materiale orientato* ⁽²⁾.

In questa Nota, stabilita la relazione vettoriale fondamentale che caratterizza la rotazione, vengono dedotte alcune delle più immediate conseguenze: la legge d'inerzia polare, il principio di conservazione dell'energia e un teorema sul momento d'impulso.

1. MOTO DI UN SOLIDO SFERICO OMOGENEO. — Le equazioni cardinali della dinamica di un qualsiasi sistema materiale sono notoriamente:

$$[1] \quad \frac{dQ}{dt} = R, \quad \frac{dM^{(a)}}{dt} = M,$$

designando R e M rispettivamente la risultante e il momento delle forze agenti sul sistema e Q e $M^{(a)}$ la risultante e il momento delle quantità di moto. Alla prima delle equazioni su richiamate si può attribuire un altro aspetto se si tiene presente che, P indicando il baricentro e \dot{P} la sua velo-

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ « En même temps qu'il change de position, un point matériel peut tourner et se déformer, mais nous ne nous occuperons ici que de sa position, et non de la manière dont il peut tourner et se déformer ». [P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, V édition, Paris, Gauthier-Villars et C^e, 1926, pag. 92].

cità, risulta $\mathcal{Q} = m\dot{P}$ se m designa la massa totale del sistema; allora la prima delle [1] diviene:

$$[2] \quad \boxed{m\ddot{P} = R},$$

relazione vettoriale che esprime il noto principio del moto del baricentro.

Applichiamo le equazioni [1] a un solido sferico omogeneo; il baricentro P coincide col centro geometrico ed è

$$M(\omega) = I\omega,$$

designando: I il momento d'inerzia del solido sferico rispetto a uno qualunque dei suoi diametri e ω la velocità angolare; con ciò la seconda delle [1] diviene:

$$[3] \quad \boxed{I \frac{d\omega}{dt} = M}.$$

Cosicchè noti: m , I , R e M le equazioni [2] e [3] servono a determinare il moto del centro della sfera e la rotazione della sfera stessa attorno al suo centro — rotazione polare —; in tal modo risulta determinato in modo completo il movimento del solido sferico.

2. PASSAGGIO AL LIMITE: SFERETTA INFINITESIMA. — Le equazioni [2] e [3] continuano a essere valide qualunque sia il raggio della sfera e quindi anche quando il raggio diviene infinitesimo. In queste circostanze la [2] non dice nulla di nuovo; essa va ad esprimere la ben nota proporzionalità tra forza e accelerazione di un *punto materiale*, essendo la massa del punto stesso il coefficiente di proporzionalità. Merita invece particolare riflessione la [3], inquantochè essa esprime la proporzionalità tra un momento di forza e un'accelerazione angolare, essendo il coefficiente di proporzionalità un momento d'inerzia. Questa equazione non viene usualmente introdotta nella meccanica classica nel capitolo relativo alla dinamica del punto materiale, poichè non viene tenuto conto di eventuali rotazioni del punto su se stesso; ma ciò non è sempre lecito: un esempio cospicuo ci è offerto dalla meccanica celeste, in cui notoriamente i corpi celesti vengono assimilati dal punto di vista della configurazione geometrica a semplici punti; in particolare nel moto kepleriano dei pianeti. L'applicazione della [3] a un pianeta, avendosi $M = 0$, porta alla conclusione

$$\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

cioè ω costante, come effettivamente ha luogo.

Altri casi notevoli, in cui può trovare applicazione la [3], si presentano nello studio del moto di un dipolo in un campo magnetico o elettrico. In conclusione la [3] dovrebbe essere associata alla [2] in tutti i casi in cui durante il movimento, o più precisamente lo spostamento, del punto materiale interessa conoscere la sua rotazione intestina.

3. PUNTO MATERIALE ORIENTATO. — È da rilevarsi che mentre nella meccanica classica, che usa solamente la relazione [2], il cosiddetto *punto materiale* è caratterizzato dalla sua posizione geometrica e dalla sua costituzione materiale definita dalla massa m , l'associazione alla [2] della [3] fa intervenire un altro elemento meccanico inerziale: la costante I , che dimensionalmente è un momento d'inerzia, il quale influisce sull'orientamento del punto; per tale ragione il punto in questione si potrebbe denominare *punto materiale orientato*. Concludendo: mentre il classico *punto materiale* è caratterizzato dalla posizione e dalla massa, il *punto materiale orientato*, oltre che da posizione e massa, è determinato dal *momento polare* I .

4. LEGGE D'INERZIA POLARE. — Come abbiamo già fatto notare, se nella [3] si pone $M=0$ scende

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Questa esprime essere $\omega = \text{costante}$: quindi se inizialmente è $\omega = 0$ sarà sempre $\omega = 0$, cioè il moto del punto sarà sempre irrotazionale, oppure la costante non è nulla ed allora la rotazione sarà uniforme: è appunto questo il caso dei pianeti.

5. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA. — Moltiplicando scalarmente i due membri della [3] per ω si ottiene:

$$I \frac{d\omega}{dt} \times \omega = M \times \omega;$$

il primo membro non è altro che

$$\frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{dT_\omega}{dt}, \quad \text{essendo} \quad T_\omega = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

l'energia cinetica dovuta alla sola rotazione del punto materiale orientato, quindi la precedente relazione può essere scritta:

$$[4] \quad \frac{dT_\omega}{dt} = M \times \omega.$$

Com'è ben noto, dalla [2] si ricava, moltiplicando i due membri per $\frac{dP}{dt} = \dot{P}$,

$$m\ddot{P} \times \dot{P} = R \times \dot{P},$$

ed essendo

$$\dot{\mathbf{P}} \times \dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\mathbf{P}}^2}{dt}, \quad \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{R} \times d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

si ottiene

$$\frac{1}{2} m \frac{d\dot{\mathbf{P}}^2}{dt} = \frac{dL}{dt},$$

ovvero, notando che

$$T_0 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{P}}^2$$

è l'energia cinetica dovuta al moto del punto materiale quando $\omega = 0$, cioè quando non è orientato,

$$[5] \quad \frac{dT_0}{dt} = \frac{dL}{dt} \quad \text{ovvero} \quad T_0 - L = E_0,$$

che esprime, nella supposta circostanza $\omega = 0$, il principio di conservazione dell'energia. Sommando [4] e [5] si ottiene:

$$[6] \quad \boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{dL}{dt} + \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}}, \quad \text{essendo} \quad T = T_0 + T_\omega$$

l'energia cinetica del punto materiale orientato. Questa relazione esprime la estensione del principio di conservazione dell'energia per il punto materiale orientato.

6. MOMENTO D'IMPULSO. — Integrando entrambi i membri di [3] tra t_0 e t si ricava:

$$[7] \quad I\boldsymbol{\omega} - I\boldsymbol{\omega}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{M} dt,$$

avendo indicato ω e ω_0 le determinazioni di ω corrispondenti agli istanti t e t_0 . Dalla [7], mediante derivazione, si deduce la [3] e pertanto le due relazioni [3] e [7] sono equivalenti. Il vettore $I\boldsymbol{\omega}$ dimensionalmente è un momento di quantità di moto e si può quindi definire *momento di quantità di moto del punto materiale orientato*.

L'integrale del secondo membro può denominarsi *momento d'impulso* della sollecitazione nell'intervallo di tempo t_0, t : allora la relazione [7] esprime il TEOREMA DEL MOMENTO D'IMPULSO: *il momento d'impulso relativo a un intervallo di tempo è eguale alla differenza dei momenti di quantità di moto nel secondo e nel primo estremo dell'intervallo stesso*.

Meccanica. — *Considerazioni sui moti lenti dei mezzi continui disgregati.* Nota di GINO ARRIGHI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

§ 1. — IL LEVI-CIVITA, in una sua Nota ⁽²⁾, ebbe a porsi il problema generale del moto di materia distribuita con continuità in tutto lo spazio e soggetta unicamente alla propria gravitazione senza intervento di forze molecolari, cioè del, così detto, mezzo continuo disgregato.

Il suo studio dette adito a non poche ricerche che qui non sto a richiamare ma a tutti che io sappia, gli autori ebbe a sfuggire una svista concernente la trattazione i moti irrotazionali lenti che occupa la seconda metà della nota citata.

Non varrebbe ritornare sopra l'argomento se non fosse che in realtà il problema presenta una generalità maggiore, nel senso, come appresso vedremo, che possono presentarsi tre casi, uno dei quali è quello considerato come unico possibile dal LEVI-CIVITA, mentre gli altri due presentano, come da prevedersi, caratteristiche notevolmente diverse.

Nel prossimo paragrafo si ricava la forma esatta della equazione risolvente del nostro problema che, integrata una volta, ci fornisce una relazione differenziale contenente una costante arbitraria la quale secondo la forma trovata da LEVI-CIVITA poteva avere un sol segno mentre ora si prova di essere passibile di uno o dell'altro segno ed ancora di essere nulla.

Uno di questi tre casi si riduce subito a quello considerato per unico nella Nota citata e alla quale si rimanda per la sua visione; mentre gli ultimi paragrafi della presente Nota trattano gli altri due casi che, come precedentemente detto, presentano caratteri diversi dall'altro precedentemente noto.

§ 2. — Il problema del moto irrotazionale lento di un mezzo continuo disgregato, cioè dove è trascurabile il quadrato della velocità e la derivata sostanziale di una qualunque caratteristica è sostituibile con

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1913.

⁽²⁾ T. LEVI-CIVITA, *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo*, in *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, Pavia, 1936, pagg. 161-168.

la derivata locale della medesima è, come trovasi nella Nota citata, retto dalle equazioni

$$[1] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U$$

$$[2] \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \Delta_2 \varphi = 0$$

$$[3] \quad \Delta_2 U = -4\pi f\mu$$

ove φ è il potenziale di velocità, μ è la densità di distribuzione del mezzo, f è la costante di attrazione, V è il potenziale unitario di campo ed è

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Applicando l'operatore Δ_2 ad ambo i membri della [1] e sostituendo mediante la [3] discende

$$[4] \quad \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \varphi = -4\pi f\mu,$$

d'altra parte la [2] può scriversi

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \Delta_2 \varphi = 0$$

e quindi dare

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \varphi = 0;$$

cosicchè, sostituendo in questa mediante la [4], si ricava la

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - 4\pi f\mu = 0$$

che è la *equazione risolvente* scritta nella forma corretta.

Ponendo

$$\mu = \frac{\mu_0}{v^2}, \quad 2\pi f\mu_0 = \omega^2, \quad \tau = \omega t,$$

dove: μ_0 è il valore di μ al tempo $t = 0$, v è una funzione incognita tale che al tempo $t = 0$ sia $v^2 = 1$ ed ω è una costante, alla equazione testè trovata potrà darsi la forma

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} \right) + \frac{1}{v^2} = 0$$

della quale avremo a considerare le soluzioni che per $\tau = 0$ danno $v^2 = 1$.

Moltiplicando ambo i membri per

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau}$$

e integrando otteniamo

$$[5] \quad \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{v^2} = \text{costante},$$

la quale ci mostra che la costante a secondo membro può essere positiva, nulla o negativa avendosi così, corrispondentemente, tre casi contro l'unico caso preso in considerazione nella Nota citata.

Nel caso in cui la predetta costante sia negativa, ed eguale a $-k^2$, la [5] viene ad assumere la forma

$$\left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 = 1 - k^2 v^2$$

sotto la quale è integrata e discussa a pagina 166 e 167 della Nota citata.

Noi qui di seguito discuteremo gli altri due casi che, evidentemente, avranno a presentare carattere completamente diverso.

§ 3. - Consideriamo dapprima il caso in cui la costante a secondo membro della [5] sia nulla; la [5] stessa verrà allora a scriversi

$$\left(\frac{dv}{d\tau} \right)^2 = 1$$

da cui

$$v = \pm \tau + \text{costante}$$

ed, affinchè per $\tau = 0$ si abbia $v^2 = 1$, la costante addittiva dovrà assumersi eguale a ± 1 , cosicchè avremo

$$[6] \quad \mu = \frac{\mu_0}{(\tau \pm 1)^2} = \frac{\mu_0}{(\omega t \pm 1)^2}.$$

Derivando quest'ultima rispetto al tempo e fattovi $t = 0$ si ha

$$\dot{\mu}_0 = \mp 2\omega\mu_0,$$

sempre corrispondendosi i segni, cosicchè supposto, come può sempre farsi $\omega > 0$ si deduce che nel caso in cui inizialmente la densità sia crescente nella [6] dovrà assumersi il segno inferiore in guisa che la considerazione del moto dovrà arrestarsi ben prima del tempo

$$\frac{1}{\omega}$$

in cui la densità, che si è mantenuta sempre crescente, diverrebbe infinita.

Se inizialmente la densità è decrescente nella [6] dovremo assumere il segno superiore e la [6] stessa ci mostra che la densità è sempre decrescente al volgere del tempo presentandosi così una eventualità completamente nuova.

§ 4. - Consideriamo adesso il caso più complesso in cui la costante a secondo membro della [5] sia positiva, eguale a k^2 ; la [5] stessa diviene allora

$$\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 = 1 + k^2 v^2$$

e il suo integrale è

$$kv = \sinh(k\tau + \chi)$$

con χ costante, rispetto al tempo, arbitraria. Ancora, affinché per $\tau = 0$ si abbia $v^2 = 1$, dovrà aversi

$$[7] \quad \sinh \chi = \pm k$$

e si avrà infine

$$[8] \quad \mu = \frac{\mu_0 k^2}{\sinh^2(\chi\tau + \chi)} = \frac{\mu_0 \sinh^2 \chi}{\sinh^2(k\omega t + \chi)}.$$

Derivando quest'ultima rispetto al tempo e fattovi $t = 0$ si ha

$$\dot{\mu}_0 = -2\mu_0 \omega \cosh \chi \frac{k^3}{\sinh^3 \chi};$$

pertanto, supposto ancora $\omega > 0$, quando inizialmente la densità è crescente la costante, rispetto al tempo, χ dovrà trarsi dalla [7] col segno inferiore. La densità risulterà allora sempre crescente sino al tempo

$$-\frac{\chi}{k\omega}$$

(positivo giacchè il seno iperbolico di un certo argomento ha il segno dell'argomento stesso) in cui diverrebbe infinita; cosicchè nella considerazione del moto dovremo arrestarci ben prima del tempo suddetto.

Se inizialmente la densità è decrescente dalla [7] dovrà trarsi χ in guisa da soddisfare al segno superiore e dalla [8] discende allora che quella si mantiene sempre decrescente al volgere del tempo presentandosi ancora una volta una eventualità completamente sconosciuta.

Meccanica. — *Sulla distribuzione e sulle figure delle velocità e delle accelerazioni nel moto rigido piano.* Nota di VITTORUGO FOSCHI, presentata ⁽¹⁾ dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

(CENTRO DELLE ACCELERAZIONI.

Sia definito un movimento piano dal rotolamento di una curva p' su una curva p . Sia I il punto di contatto (centro istantaneo di rotazione) e x la tangente comune alle due polari. È noto che il cerchio dei flessi ha per diametro il segmento a definito dalla relazione

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$$

dove r' e r sono i raggi di curvatura delle due polari presi con i loro segni.

Il cerchio di stazionarietà (cerchio dei punti per i quali l'accelerazione tangenziale è nulla) ha il centro sull'asse x ed ha per diametro il segmento a_1 dato dalla relazione

$$a_1 = a \frac{\omega^2}{\omega'^2}$$

Il punto P ha accelerazione totale nulla.

Si ha

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IC_1}{IC} = \frac{a_1}{a} = \frac{\omega^2}{\omega'^2} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega'}{\omega^2}.$$

Si ha inoltre $IP = IC \sin \alpha$, e quindi le coordinate del punto P di accelerazione nulla sono

$$x_p = a \sin \alpha \cos \alpha = a \frac{\omega^2 \omega'}{\omega^4 + \omega'^2}$$

$$y_p = a \sin^2 \alpha = \frac{a \omega^4}{\omega^4 + \omega'^2}.$$

(1) Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

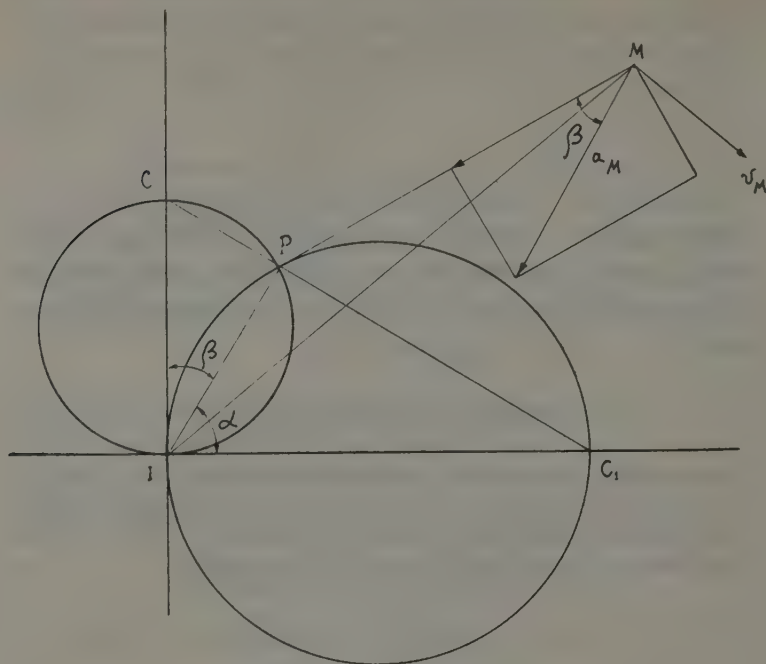


Fig. 1.

VELOCITÀ DEI DIVERSI PUNTI DEL PIANO.

Le velocità dei diversi punti M della figura sono dirette normalmente a IM e sono date in grandezza da ωIM .

Segue che tutti i punti che hanno il vettore velocità parallelo ad una certa direzione si trovano su una retta uscente da I e normale alla direzione stessa. Il luogo dei punti che hanno il medesimo valore della velocità si trovano su una circonferenza di centro I . Il luogo dei punti A per i quali il vettore velocità passa per un punto fisso M è una circonferenza avente per diametro IM .

ACCELERAZIONE DEI DIVERSI PUNTI DEL PIANO.

Per il teorema di RIVALS le accelerazioni dei diversi punti M del piano sono le stesse di quelle che si avrebbero se il piano ruotasse intorno a P con velocità angolare ω e accelerazione angolare ω' : per cui queste accelerazioni avranno due componenti, una $\omega^2 \cdot MP$ secondo la MP ed una $\omega' MP$ secondo la normale a MP . L'accelerazione totale MS è data da $MP \sqrt{\omega^4 + \omega'^2}$ la sua linea fa con la direzione MP l'angolo β .

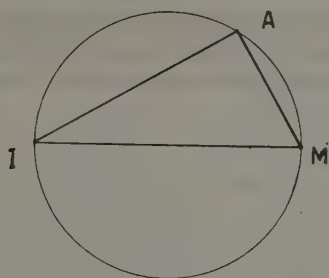


Fig. 2.

Segue che il luogo dei punti per i quali l'accelerazione ha una data direzione è una retta uscente da P e formante l'angolo β con questa direzione. In particolare il luogo dei punti per i quali l'accelerazione è diretta secondo l'asse x è CPC_1 , e il luogo dei punti per i quali l'accelerazione è diretta secondo l'asse y è IP .

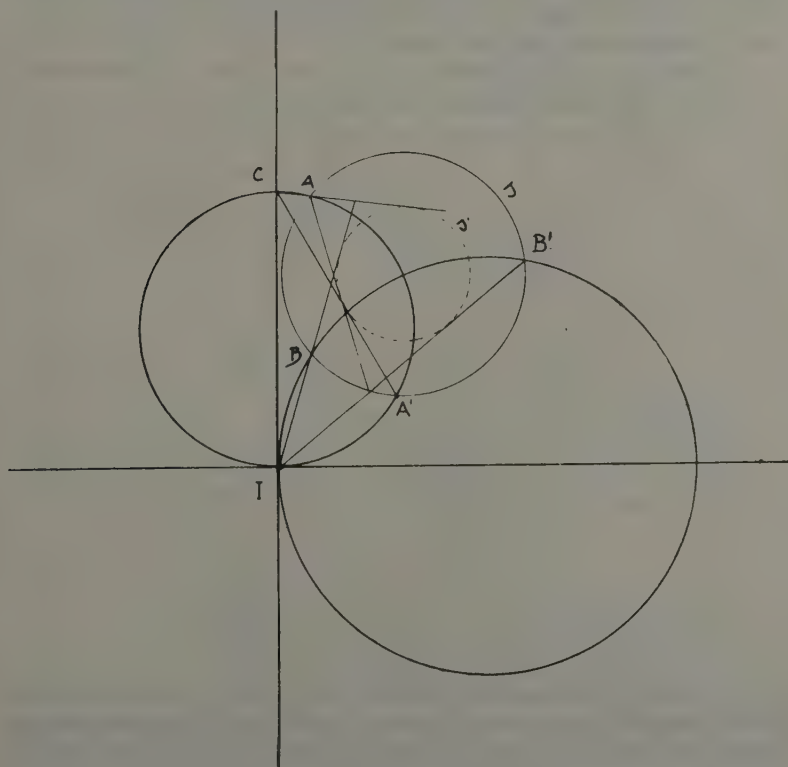


Fig. 3.

Il luogo dei punti per i quali l'accelerazione ha un determinato valore è un cerchio s di centro P . Le accelerazioni di tutti i punti di s sono tangenti ad una circonferenza s' concentrica a s di raggio $r' = r \sin \beta$,

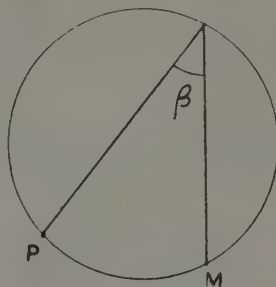


Fig. 4.

se r è il raggio di s . Se A e A_1 sono le intersezioni di s col cerchio dei flessi, per questi due punti le accelerazioni sono dirette secondo AC , e A_1C poichè debbono essere normali ad AI e A_1I .

Le rette AC e A_1C debbono quindi essere tangenti a s' . Analogamente il cerchio s' deve essere tangente alle rette BI e B_1I , se B e B_1 sono

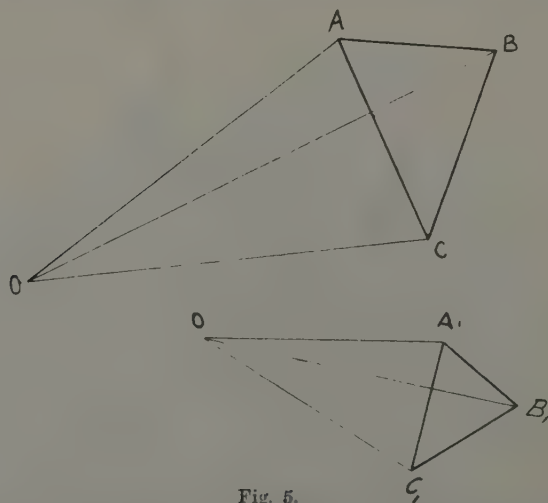


Fig. 5.

le intersezioni di s col cerchio di stazionarietà poichè le accelerazioni di B e B_1 debbono essere dirette secondo le BI e B_1I , poichè è nulla la componente tangenziale di esse, e l'accelerazione si riduce quindi alla sola componente normale.

Il lungo dei punti A per i quali il vettore accelerazione passa per un punto fisso M è un cerchio passante per M e per il polo delle accelerazioni P e tale che dai suoi punti si vede il segmento PM sotto l'angolo β .

FIGURE DELLE VELOCITÀ E DELLE ACCELERAZIONI.

LEMMA. — Dato un triangolo ABC e due punti O e O_1 del piano, se dal punto O_1 si conducono segmenti O_1A_1 , O_1B_1 , O_1C_1 , rispettivamente proporzionali e ruotati del medesimo angolo dei corrispondenti segmenti OA , OB , OC ; il triangolo $A_1B_1C_1$ risulta simile al triangolo di partenza, e poichè una figura piana qualsiasi può essere decomposta in triangoli il medesimo teorema vale per una figura piana qualsiasi.

PRIMA FIGURA DELLE VELOCITÀ.

Le velocità dei punti A , B , C di una figura piana sono proporzionali e normali alle congiungenti i punti stessi col centro istantaneo di rota-

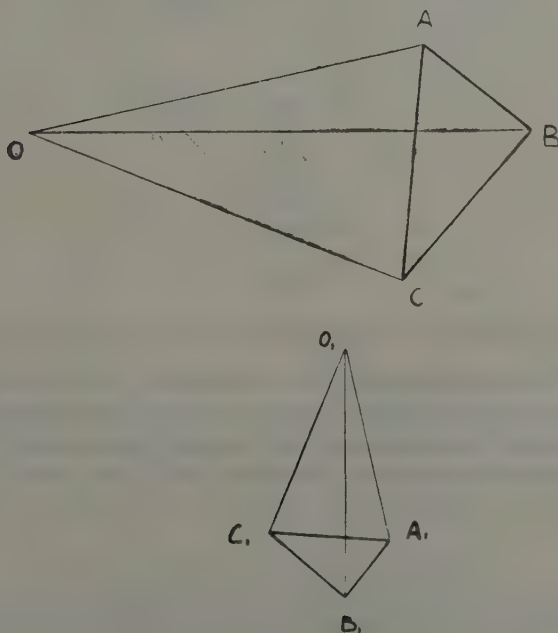


Fig. 6.

zione; quindi se da un punto O si conducono segmenti proporzionali alle velocità dei tre punti ABC gli estremi $A_1B_1C_1$ formano un triangolo simile ad ABC e in questo caso orientato ortogonalmente. E generalizzando

si può concludere che se da un punto qualunque del piano si conducono segmenti proporzionali alle velocità dei punti di una figura piana, gli estremi di questi segmenti formano una figura simile alla figura data e orientata ortogonalmente ad essa.

PRIMA FIGURA DELLE ACCELERAZIONI.

Le accelerazioni dei tre punti ABC sono proporzionali alle distanze PA, PB, PC e formano con le relative rette il medesimo angolo β per cui se da un punto O si conducono segmenti proporzionali alle tre acce-

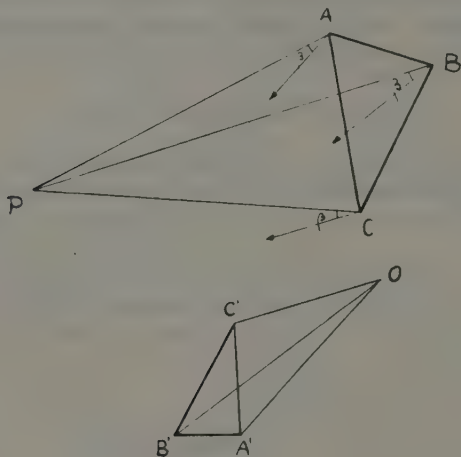


Fig. 7.

lerazioni, gli estremi $A_1 B_1 C_1$ formano un triangolo simile al triangolo dato e ruotato di un angolo β tale che sia, come si è visto, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega'}{\omega^2}$; e in generale se da un punto qualunque del piano si conducono segmenti proporzionali alle accelerazioni dei punti di una figura piana, gli estremi di questi segmenti formano una figura simile alla figura data e ruotata di un angolo β per cui $\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega'}{\omega^2}$.

SECONDA FIGURA DELLE VELOCITÀ.

Ad analoghi risultati si giunge se si conducono a partire da ogni punto del piano segmenti proporzionali alle rispettive velocità e accelerazioni.

Si consideri un punto A , e sia I il centro istantaneo di rotazione. Conduciamo da A il vettore velocità; nella scala ω esso sarà uguale in grandezza a IA e normale a IA . Il suo estremo A_1 disterà da I della quantità $IA\sqrt{2}$ e formerà con IA l'angolo di 45° .

Se si considerano tre punti ABC , i punti corrispondenti $A_1 B_1 C_1$ disteranno da I di segmenti proporzionali a IA, IB, IC e i segmenti IA_1, IB_1, IC_1 saranno ruotati dallo stesso angolo di 45° rispetto ad essi. Il triangolo $A_1 B_1 C_1$, sarà simile ad ABC e ruotato di 45° ; il rapporto di similitudine è $\sqrt{2}$.

Ad un risultato identico si sarebbe giunto se le velocità fossero state portate in una scala qualsiasi, ma in tal caso il rapporto di similitudine e l'angolo di rotazione delle due figure sarebbero stati funzione della scala.

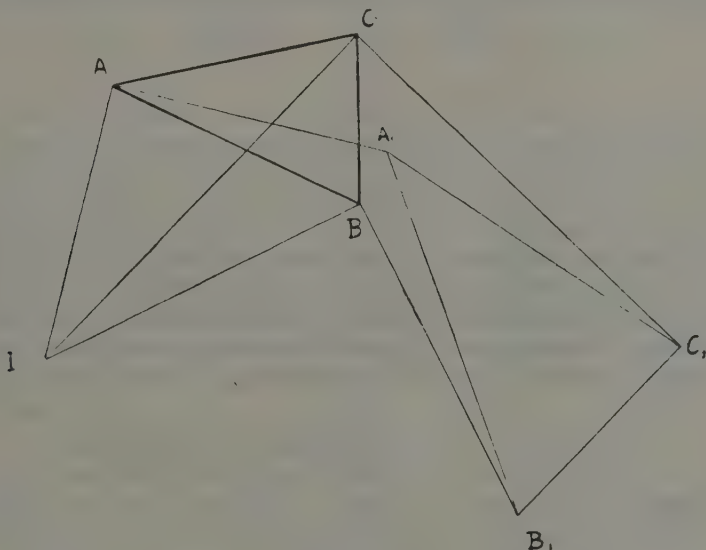


Fig. 8.

Si può concludere in generale che se dai diversi punti di una figura piana si conducono segmenti proporzionali alle velocità dei punti stessi, gli estremi di questi segmenti formano una figura simile alla figura data. Se la scala dei segmenti portati è ω , la figura che risulta è ruotata di 45° rispetto alla data e il rapporto di similitudine è uguale a $\sqrt{2}$.

SECONDA FIGURA DELLE ACCELERAZIONI.

Un analogo teorema si ha per le accelerazioni. Si consideri un punto A e sia P il polo delle accelerazioni. L'accelerazione totale di A sia AS : sappiamo che AS è proporzionale ad AP e forma con AP l'angolo β ; per cui considerando diversi punti A, B, C , i triangoli relativi PAS, PBS_1 , ecc. sono simili. Per cui gli estremi S, S_1 , ecc. che si ottengono conducendo dai diversi punti segmenti proporzionali alle accelerazioni sono gli stessi di quelli che si avrebbero conducendo da P segmenti PS, PS_1 , ecc.,

ancora proporzionali alle accelerazioni e formanti con esse l'angolo γ : per cui i punti S, S_1 ecc. formano una figura simile a quella di partenza.

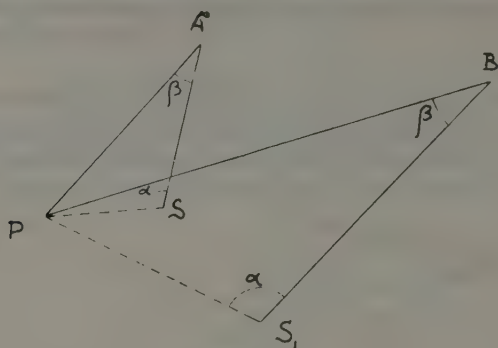


Fig. 9.

Se come caso particolare si prende come scala delle accelerazioni ω^2 , il vettore AS accelerazione di A è tale che PS è normale a PA . In tal caso i punti S si ottengono conducendo da P segmenti proporzionali a PA e diretti normalmente a PA . I punti S formano allora una figura simile alla figura di partenza e orientata ortogonalmente. Segue allora che se

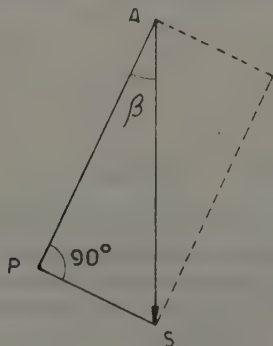


Fig. 10.

dai diversi punti di una figura piana si conducono segmenti proporzionali alle accelerazioni dei punti stessi, gli estremi di essi formano una figura simile alla figura data: se per questi segmenti si adopera come scala il valore ω^2 la figura che risulta è orientata ortogonalmente e il rapporto di similitudine è $\frac{PS}{PA} = \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega'}{\omega^2}$.

Astronomia (Astrofisica). — *Inizio probabile del nuovo ciclo solare* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia e di MARIA VIARO.

Quando si parla del ciclo solare, generalmente s'intende quello undecennale delle macchie contato da un minimo all'altro della loro frequenza. Così inteso il presente ciclo, che ha avuto inizio nel settembre 1933, dovrebbe arrivare, con la durata media di undici anni, fino oltre la metà del 1944. Tuttavia, come si è accennato in una Nota precedente ⁽³⁾, nello scorso anno si sono avuti segni forieri del nuovo ciclo essendo comparse nell'emisfero australe le protuberanze ad alta latitudine che migrano verso i poli. Un segno più manifesto, o per lo meno proprio appartenente al fenomeno delle macchie, si è manifestato nel maggio scorso con la comparsa di un gruppo bipolare ad alta latitudine, che dovrebbe appartenere al nuovo ciclo.

Generalmente gruppi di questo tipo fanno la loro apparizione al minimo o negli anni seguenti, quando la frequenza delle macchie sale rapidamente per arrivare in circa 4,5 anni al suo massimo. La conferma che si tratti di macchie del nuovo ciclo si ha quando è possibile stabilire il segno della loro polarità, la quale com'è noto si inverte passando da un ciclo all'altro ⁽⁴⁾.

Ora, mentre si prevede che il numero caratteristico medio annuale delle macchie debba diminuire ancora nel corso del 1943 e per parte del 1944, appunto perchè non siamo ancora giunti al minimo, il 16 maggio scorso, VIARO osservando all'equatoriale di Amici il disco solare per proiezione, notava la presenza del gruppo bipolare costituito da tre piccole macchie attorniate da una zona facolare abbastanza vivace. La latitu-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

⁽²⁾ Presentata nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽³⁾ *Altezza della cromosfera nel 1942 ed andamento del ciclo solare.* « Rendiconti R. Accademia d'Italia ».

⁽⁴⁾ In corso di stampa rileviamo dalla « Beobachtungs-Zirkular der Astron. Nachr. », n. 12, del 13 giugno 1943, che von KLÜBER a Potsdam ha potuto confermare l'inversione della polarità in questo gruppo.

dine eliocentrica delle due macchie precedenti risultò — 40° e quella della macchia seguente — 43° , alla longitudine media di 38° ovest dal meridiano centrale. Visualmente il gruppo fu seguito fino al suo tramonto, che avvenne il 19 maggio, senza che si siano verificati mutamenti degni di nota, nè protuberanze al momento della sua scomparsa.

Gli spettroeliogrammi presi alla torre solare in luce di calcio e di idrogeno il giorno 14 maggio, non presentavano ancora nè flocculi nè altre perturbazioni a quelle coordinate, il 15 il tempo non permise osservazioni ed il 16 si nota la comparsa di due eruzioni cromosferiche nel luogo occupato dal gruppo. Queste sembrano estendersi e sono vivaci nelle righe K_3 ed H_α il 17, coprendo quasi interamente le macchie; si avvicinano al bordo il 18 e il 19, per sparire il 20 maggio senza manifestazioni di protuberanze notevoli.

Su questi spettroeliogrammi VIARO ha misurato col microfotometro di HARTMANN e con i metodi in uso ad Arcetri, le intensità dei flocculi chiari di calcio e di idrogeno su di essi visibili, confrontandoli con gli analoghi di un gruppo di macchie a $+8^\circ$ di latitudine, piuttosto esteso ed attivo, passato al meridiano centrale del sole il 18 maggio. Assumendo l'intensità della cromosfera in K_3 ed H_α non perturbata uguale ad uno, si sono ottenuti i seguenti risultati:

Intensità dei flocculi chiari.

1943	Gruppo a $+8^\circ$		Gruppo a -41°	
	K_3	H_α	K_3	H_α
16 maggio	—	1.51	—	1.74
17 » 	2.24	1.55	2.51	1.82
18 » 	2.40	1.45	3.23	1.62
19 » 	2.24	—	3.89	—

Si nota che le intensità dei flocculi del gruppo ad alta latitudine sono superiori di quelle del gruppo a bassa latitudine e per K_3 sono andate aumentando dal momento della comparsa del gruppo. Confrontandole con la serie di misure analoghe eseguite in Arcetri⁽¹⁾ per un gran numero di

(¹) COLACEVICH e VIARO, *Fotometria delle perturbazioni solari*. «Pubb. Osserv. Arcetri», fasc. 57, pag. 17 e «Memorie S. A. I.», vol. XII, pag. 119 (1939); VIARO, *Fotometria delle perturbazioni solari in luce di calcio*, «Pubbl. Oss. Arcetri», fasc. 59, pag. 51 e «Memorie S. A. I.», vol. XIII, pag. 271 (1940).

flocculi, si vede che i flocculi K_3 sono fra quelli di media intensità, mentre per H_α le intensità sono superiori alla media. Questo gruppo del nuovo ciclo è notevole perchè raggiunge una fra le più alte latitudini fino ad ora osservate. Scorrendo le osservazioni eseguite dal 1874 all'epoca presente, cioè degli ultimi sei cicli, raramente si trovano gruppi con latitudini superiori a $+38^\circ$, per lo più costituiti da gruppi di piccole macchie che si dissolvono uno o due giorni dopo la loro apparizione. Nel primo ciclo 1878-1889, nel giugno-luglio 1880, quindi due anni circa dopo il minimo, si presentò un gruppo con una macchia piuttosto estesa a $-38^\circ.4$. Nel secondo ciclo 1889-1901 si ebbero parecchi gruppi a $+40^\circ$ circa dal 1889 al 1893, quindi dal minimo a quattro anni dopo di questo; nel terzo ciclo 1901-1913 un gruppo a $40^\circ.9$ nel 1904; nel quarto 1913-1923 un piccolo gruppo nel marzo 1914 a $+45^\circ$, il solo che supera in latitudine quello osservato in quest'anno, sebbene non lo uguagli nell'attività manifestata. Nel quinto ciclo 1923-1933 tre gruppi a $+39^\circ$ circa, rispettivamente nel 1923, 1924 e 1925. Nel sesto ciclo, 1933-1944, si notano due piccoli gruppi, uno australe, l'altro boreale, instabili, che raggiunsero le latitudini di 38° rispettivamente nel 1935 e nel 1936, una macchia evanescente a $+40^\circ$ nell'agosto 1937 ed un gruppo abbastanza esteso fra $+36^\circ$ e $+40^\circ$ nel settembre-ottobre dello stesso anno, cioè quattro anni dopo il minimo. Nel 1938 si ebbero ancora, un gruppo a -41° e due a $+38^\circ$, tutti di poca importanza.

Il gruppo del 1943, oltre alla caratteristica di aver raggiunto una delle più alte latitudini, ha anche l'altra di essersi manifestato un anno circa, per quanto si può prevedere, prima della fine del presente ciclo. Sarà interessante vedere se la perturbazione si ripresenterà al bordo est o se si ripeteranno altre perturbazioni nella stessa zona, in unione o meno con l'attività delle protuberanze.

Astronomia. — *Distribuzione galattica ed orientamento dei piani orbitali delle stelle binarie visuali di tipo spettrale B* ⁽¹⁾.
Nota di ATTILIO COLACEVICH, presentata ⁽²⁾ da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le stelle di tipo spettrale *B* presentano, come è noto, una accentuata concentrazione galattica ed altre caratteristiche quali alta temperatura e grande luminosità. Per questi motivi esse sono state studiate come gruppo a sè stante da diversi punti di vista. In questa Nota si presentano alcuni risultati di una ricerca statistica sulle stelle doppie visuali di tale tipo spettrale; particolarmente quelli riguardanti la loro distribuzione spaziale e l'orientamento dei loro piani orbitali.

La ricerca è stata condotta sul catalogo di stelle doppie di Aitken (*New General Catalogue*) per le stelle a nord del parallelo -30° di declinazione e sul catalogo di Innes per le rimanenti doppie australi. Si sono comprese fra le stelle doppie di tipo *B* tutti i sistemi nei quali il compagno principale è di tipo *O* oppure *B* con le loro suddivisioni. In genere le ricerche statistiche sulle stelle di tipo *B* si limitano alle suddivisioni da *B0* a *B5* come più caratteristiche di questo gruppo di stelle. Nel nostro caso due motivi hanno indotto ad includere una più vasta massa di stelle sotto questa denominazione spettrale. Il primo è che tutte le stelle considerate presentano spiccata concentrazione galattica e il secondo è dato dalla convenienza di includere il massimo numero possibile di stelle per la presente ricerca.

Il numero complessivo di tali sistemi, trovati nei due cataloghi, sale a 1335. Con le tavole di LUND ⁽³⁾ si sono convertite le coordinate equatoriali in coordinate galattiche.

Allo scopo di raggruppare questi presunti sistemi doppi in modo per quanto possibile omogeneo, li abbiamo classificati in quattro suddivisioni. Si indichi con *m* la grandezza apparente visuale del sistema, con Δm

(¹) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(²) Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

(³) «Lund Annals», vol. 3.

la differenza di grandezza tra le due componenti, con ρ la loro distanza in secondi d'arco. I valori di m , Δm e ρ sono quelli dati nei due cataloghi citati. Se il valore di ρ è variabile si è assunto un valore medio. I quattro gruppi risultano allora così definiti:

I gruppo	$m \leq 8.00$	$\Delta m \leq 2.00$	$\rho \leq 5''.00$	$N = 234$
II gruppo	$m > 8.00$	$\Delta m \leq 2.00$	$\rho \leq 5''.00$	$N = 216$
III gruppo		$\Delta m > 2.00$	$\rho \leq 5''.00$	$N = 267$
IV gruppo			$\rho > 5''.00$	$N = 618$

N rappresenta il numero complessivo di doppie nel gruppo relativo. Il numero di doppie ottiche deve essere, in base a considerazioni statistiche ⁽¹⁾, del tutto trascurabile nei primi tre gruppi e non molto rilevante nel quarto, per le doppie incluse nel *New General Catalogue*. Nessuno dei quattro gruppi è osservato in modo completo per diverse ragioni pratiche di osservazione. Ponendo un opportuno limite inferiore per ρ (ad esempio, $0''.2$), il primo gruppo si può ritenere approssimativamente completo.

Bisogna ancora considerare come si possano confrontare i dati estratti dai due cataloghi, di Aitken e di Innes. I criteri di selezione adottati dal primo fanno sì che vi sia da attendersi un maggior numero di stelle nel quarto gruppo nelle zone del catalogo di Innes. Nei primi tre gruppi i criteri di selezione non dovrebbero essere sentiti. Essendo infine le stelle di tipo spettrale *B* particolarmente interessanti, è da ritenersi che la percentuale di doppie scoperta in tutto il cielo sia sufficientemente costante nei primi tre gruppi, specie se si considera il lavoro di osservazione di VOÛTE e DAWSON agli osservatori di Lembang e La Plata per le doppie strette della calotta australe.

Allo scopo di studiare la distribuzione spaziale di questi sistemi di tipo spettrale *B*, si è divisa la sfera celeste in diciotto zone costituite dalle regioni celesti comprese tra 0° e $+20^\circ$ e tra 0° e -20° di latitudine galattica, suddivise in otto zone ciascuna e dalle due calotte polari galattiche rimanenti. Le otto zone sono state contate a partire dalla longitudine galattica di 0° per ogni 45° di longitudine. Per lo studio della distribuzione in longitudine le zone nord e sud vennero fuse insieme. Nella tabella I è dato il numero di stelle contenute in ciascuna zona. Dall'esame di essa risulta una frequenza massima del numero dei sistemi tra le longitudini 180° e 269° e cioè nel terzo quadrante. Osserviamo che in questo predominano i dati ricavati dal catalogo di Innes e quindi per quanto riguarda

(1) ОРИК, «Tartu Publ.», 25. parte 6, pag. 72.

il IV gruppo la differenza può dipendere dai limiti fissati dai compilatori dei cataloghi, mentre per quanto si è detto tale non è il caso per i primi tre gruppi i quali indicano una reale sovrabbondanza di sistemi nelle costellazioni del Cane maggiore e della Croce del Sud. È nota la tendenza delle stelle di tipo *B* a raggrupparsi e così pure una certa asimmetria del gruppo delle stelle *B*, specie di quelle più splendenti, rispetto al piano della Via Lattea. Considerando soltanto i risultati dei primi tre gruppi si nota come questa asimmetria venga confermata e la massima frequenza non si abbia nella direzione del centro della Galassia (longitudine circa 330°), ma bensì a longitudini precedenti di circa un quadrante.

TABELLA I.

l Gruppi	0-44	45-89	90-134	135-179	180-224	225-269	270-314	315-359	Calotte	
									Nord	Sud
I . . .	23	31	18	30	30	30	28	18	8	21
II . . .	11	11	11	19	41	38	34	39	7	8
III . .	18	22	29	29	41	34	26	25	19	20
IV . . .	63	53	49	44	59	104	102	61	19	63
TOTALE	115	117	107	122	171	206	190	143	53	112

È stata investigata anche la distribuzione delle doppie di tipo *B* secondo le latitudini galattiche, che risulta anch'essa anormale. Le stelle esaminate presentano un'eccedenza nell'emisfero australe rispetto al boreale nel rapporto $5/2$ e la massima concentrazione si ha per la latitudine $-0^\circ.5$, mentre il valore medio della latitudine è di $-3^\circ.2$.

Le anomalie trovate nella distribuzione possono essere spiegate, almeno in parte, dalla così detta cintura di GOULD⁽¹⁾. Questo autore infatti discutendo la distribuzione delle stelle più splendenti scrive « sembra una cintura di stelle specialmente cospicue, la quale, cominciando con Orione, include le stelle più lucenti in *Canis major*, *Columba*, *Puppis*, *Carina*, *Crux*, *Centaurus*, *Lupus* e la testa dello Scorpione. Nell'emisfero nord questa cintura è meno pronunciata ed è specialmente indistinta in Ofioco e nell'Ercole; ma la sua direzione generale è indicata dalle stelle più

(¹) БОК-БОК, « The Milky Way », pag. 157.

splendenti in *Taurus*, *Perseus*, *Cassiopeia*, *Cepheus*, *Cygnus* e *Lyra*». Questa cintura è in particolar modo evidente per le stelle di tipo *B*, ma si deve dire che ciò riguarda le stelle più splendenti mentre nulla di simile si rivela per quelle più deboli della quinta grandezza. Le stelle esaminate in questa Nota sono nella grande massa più deboli della quinta grandezza e rivelano una discreta concordanza con la cintura di GOULD. Volendo dare a questa un significato di sistema locale, esso trova quindi conferma nelle anomalie trovate nella distribuzione delle doppie visuali di tipo *B*. Infatti queste stelle sono in media più vicine e quindi hanno maggiore probabilità di quelle lontane di essere scoperte come doppie. Siccome questi sistemi presentano una distribuzione analoga a quella della cintura di GOULD, questa per conseguenza riguarda non solo le stelle più splendenti, ma anche quelle più deboli le quali sono a distanza non grande da noi. Ne deriva quindi un sistema locale di stelle di tipo *B*, comprendente non solo le stelle più splendenti (che sono relativamente vicine) ma in genere tutte le stelle di tipo *B* a noi vicine. A rigore, per poter affermare quanto sopra, bisognerebbe poter condurre una ricerca su tutte le stelle di tipo *B* e non solo sulle doppie. La mancanza ed in genere la poca precisione delle parallassi di queste stelle rende però difficile una soluzione del problema da questo punto di vista.

Passiamo ora allo studio statistico dell'orientamento dei piani orbitali degli stessi sistemi. Questo problema è stato studiato più volte per il complesso delle doppie visuali. I modi di indagine usati seguono due vie distinte. La prima è quella di considerare il gruppo delle doppie visuali per le quali è nota l'orbita. Bisogna tener presente che l'inclinazione dei piani orbitali sul piano normale alla visuale è nota solamente in valore assoluto con conseguente ambiguità sull'orientamento del piano stesso. Essa può venir eliminata con misure di velocità radiale le quali si sono potute eseguire solo in certi casi. Per tale limitato numero di doppie è quindi possibile fare uno studio statistico diretto sull'orientamento dei piani orbitali. Varie ricerche sono state eseguite per questa via; esse hanno in comune il difetto della mancanza di un sufficiente materiale di osservazione. Una delle più recenti di questo tipo è, per esempio, quella dovuta a W. S. FINSSEN ⁽¹⁾, dove vengono considerati ventotto sistemi doppi per i quali è noto anche il segno dell'inclinazione, senza che venga trovata alcuna speciale distribuzione se non dovuta al caso.

Una seconda via di ricerca è quella statistica iniziata da J. M. POOR ⁽²⁾. Questo autore, in dipendenza di particolari orientamenti privilegiati dei piani orbitali, ha stabilito relazioni statistiche tra l'angolo di posizione e la distanza apparente di una coppia nei vari punti del cielo.

⁽¹⁾ « U. O. C. », 90 (1933), pag. 397.

⁽²⁾ « A. J. », 28, 145 (1914).

Supponiamo che tutti i sistemi abbiano i loro piani orbitali orientati secondo una certa giacitura. Conduciamo per l'osservatore un piano parallelo a questa giacitura: esso incontra la sfera celeste secondo un circolo massimo. È evidente che tutti i sistemi i quali si trovano su quel circolo massimo avranno le loro ellissi ridotte ad un segmento rettilineo e quindi l'angolo di posizione potrà avere solo due valori definiti e diversi di un angolo piatto; soltanto al polo di questa giacitura l'ellisse sarà vista nella sua forma reale. Le conclusioni raggiunte secondo concetti statistici di questo ordine risultano contraddittorie.

Ho applicato questi concetti al gruppo delle doppie di tipo *B* nell'intenzione di verificare l'esistenza, o meno, di questi orientamenti privilegiati. A tale scopo tutti gli angoli di posizione dei sistemi esaminati sono stati riferiti al sistema di coordinate galattiche con l'aiuto delle tavole di LUND già citate. Nel caso in cui di un sistema si abbiano vari angoli di posizione, se ne è fatta preliminarmente una media convertita poi in angolo di posizione galattico. Questa conversione è stata fatta con l'intendimento che se esiste una posizione preferita essa si sarebbe manifestata ad un angolo determinato col piano della Galassia: probabilmente sul piano stesso o normale ad esso. Se, ad esempio, la giacitura dei piani orbitali è concorde con quelle della Galassia si sarebbero dovuti di preferenza trovare angoli di posizione attorno a 90° e a 270° . Se l'angolo tra la Galassia e il piano orbitale è diverso da zero, allora l'angolo di posizione dovrebbe variare con carattere sinusoidale entro determinati limiti, variabili a loro volta in funzione della longitudine galattica. Si capisce che, dato il carattere statistico della relazione cercata, la ricerca consiste nello studio della frequenza dei vari angoli di posizione; tale frequenza dovrebbe poi essere interpretata nel modo accennato.

L'esame della distribuzione dei vari angoli di posizione nelle varie longitudini galattiche non può essere fatto in dettaglio per mancanza di dati sufficienti. Raccogliendo gli angoli di posizione per i quattro quadranti si ha in genere per le varie longitudini galattiche una deficienza di valori nel quadrante 135° - 224° . L'entità di questa è però piccola e non permette di giungere ad una definita conclusione.

Nell'ipotesi che la distribuzione degli angoli di posizione sia indipendente dalla longitudine galattica, si sono raggruppati tutti i dati in modo da seguire solo l'andamento della frequenza dei valori degli angoli di posizione, senza tenere conto di quella. Questa semplificazione non porta alcuna conseguenza se la giacitura presupposta è parallela al piano della via Lattea; per angoli con la via Lattea crescenti fino a 90° si ha una dispersione crescente dei dati e quindi una maggiore difficoltà di ottenere dallo spoglio dei dati, qualche conclusione. D'altra parte questa era la unica via con la quale si poteva continuare la ricerca con i dati oggi disponibili. Il risultato di tale esame è dato nella parte superiore della tabella II.

TABELLA II.

<i>P</i> Gruppi	0-44	45-89	90-134	135-179	180-224	225-269	270-314	315-359
I	37	34	28	26	22	32	20	35
II	29	31	21	31	21	26	33	23
III	31	31	50	24	30	37	41	38
IV	81	75	66	86	69	83	69	88
I	10	12	9	7	6	8	5	13
II	2	9	7	2	6	3	3	2
III	11	7	14	10	10	9	9	8
IV	30	26	27	30	36	28	25	35
I + II + III .	23	28	30	19	22	20	17	23
	27	32	26	32	16	22	23	22

Anche in questo modo non si rileva alcun andamento statistico, se non si vuol tener conto di una certa deficienza di dati del terzo quadrante per i primi tre gruppi. Si è ripetuto l'esame limitandolo ai tipi spettrali *O* e *B0* a *B5* incluso. I risultati sono contenuti nella seconda parte della tabella II. Per la scarsità dei dati si sono riuniti quelli dei primi tre gruppi, come compare nella stessa tabella II. Anche qui nulla di specifico da segnalare, salvo un minimo di frequenza per questi primi tre gruppi verso 270° con frequenza in genere più bassa tra 135° e 314° da ricollegarsi a quanto si è detto sopra. Il IV gruppo presenta minori variazioni. Infine si è voluto, per maggiore conferma, esaminare il complesso dei dati per quei sistemi che presentano tracce palesi di moto orbitale e cioè forti variazioni in angolo di posizione o in distanza; di questi ne abbiamo raccolti 200 il risultato è contenuto nell'ultima riga della tabella II ed anche in questo caso si nota una certa deficienza nel terzo quadrante.

La conclusione di questa parte della ricerca è quindi essenzialmente negativa, dato che poco significato si può dare alla presunta deficienza riscontrata nel terzo quadrante. Si deve quindi concludere che i sistemi doppi visuali di tipo spettrale *B* non presentano un particolare orientamento dei loro piani orbitali rispetto al piano della Galassia.

Si è voluto pure investigare se esista o meno una certa tendenza dell'osservatore, quando le due componenti sono dello stesso splendore, a scegliere come angolo di posizione un certo valore o quello differente di 180° , con l'idea che ove ciò si riscontrasse si potrebbe spiegare la lieve presunta deficienza nel terzo quadrante. A questo scopo si sono estratti dal catalogo di Aitken circa 240 stelle doppie (senza badare al tipo spettrale) le cui componenti sono di ugual splendore e si è studiata la frequenza dei vari angoli di posizione (in coordinate equatoriali) senza riscontrare alcuna sensibile anormalità dei diversi valori.

Se si vuol dare un significato alla presunta deficienza degli angoli di posizione nel terzo quadrante, si potrebbe pensare che essa sia dovuta ad un particolare orientamento dei periastro, per cui il compagno rimane per un tempo minore in una particolare regione dello spazio. L'abbondante materiale raccolto nei cataloghi di stelle doppie dovrebbe permettere di arrivare ad una qualche conclusione in proposito, quando si consideri come un tutto unico il complesso dei sistemi binari visuali senza discriminazione di tipo spettrale.

Astronomia. — *Sull'epoca del possibile distacco del pianeta Plutone dal sistema di Nettuno.* Nota II di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Nella Nota I dal titolo *Sulla possibilità dell'appartenenza del pianeta Plutone al sistema di Nettuno* ⁽²⁾ ho mostrato che la questione della possibile appartenenza del nuovo pianeta Plutone al sistema di Nettuno, come un antico satellite sfuggito all'attrazione del pianeta principale, non poteva essere affrontata in modo « realistico » senza considerare le perturbazioni secolari dei principali pianeti (Nettuno, Urano, Saturno e Giove) sopra gli elementi dell'orbita di Plutone.

In effetti, essendo l'orbita di Plutone fortemente ellittica e la sua distanza perielica sensibilmente uguale a 30 unità astronomiche, e cioè proprio alla distanza media di Nettuno, la cui orbita è quasi circolare, appare che un grande avvicinamento (che per brevità diremo « incontro ») dei due pianeti può avvenire solo nelle prossimità di un perielio di Plutone, purchè (essendo diversi i piani delle due orbite) tale perielio si verifichi in prossimità della linea d'intersezione delle due orbite stesse. E viceversa, un distacco di Plutone dal sistema di Nettuno, se di questo esso faceva parte come antico satellite, può essere avvenuto soltanto nell'epoca in cui — partendo dagli attuali elementi orbitali di Plutone e relative variazioni secolari, e rimontando a ritroso nei secoli — i due pianeti si sono trovati a sufficiente vicinanza l'uno dall'altro.

Nella I Nota ho calcolato le perturbazioni secolari (del 1° ordine) degli elementi dell'orbita di Plutone per effetto di ognuno dei quattro pianeti Nettuno, Urano, Saturno, Giove, assumendo come riferimento l'eclittica e l'equinozio medio fissi del 1930,0. Ho inoltre riferiti gli elementi e le perturbazioni secolari di Nettuno (già calcolati da LE VERRIER e GAILLOT come « tropici », cioè con riferimento all'equinozio e eclittica mobile della data) alla medesima eclittica ed equinozio fissi del 1930,0.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ Questi « Rendiconti », vol. II.

In questa II Nota, servendomi dei valori della longitudine del nodo e della longitudine del perielio e delle loro variazioni secolari prima calcolate, determino la posizione della mutua intersezione delle orbite dei due pianeti, il suo movimento secolare, e poi l'epoca in cui la linea degli apsidi dell'orbita di Plutone, per effetto della sua retrogradazione, è venuta a incontrare tale linea dei nodi. Ho trovato precisamente che tale « incontro » è avvenuto per l'ultima volta 13.000 anni fa.

2. Sia sulla sfera celeste (v. fig. 1) $\Omega'\Omega$ l'eclittica del 1930,0; $\Omega'N$ l'orbita di Plutone; ΩN quella di Nettuno (che assumiamo come

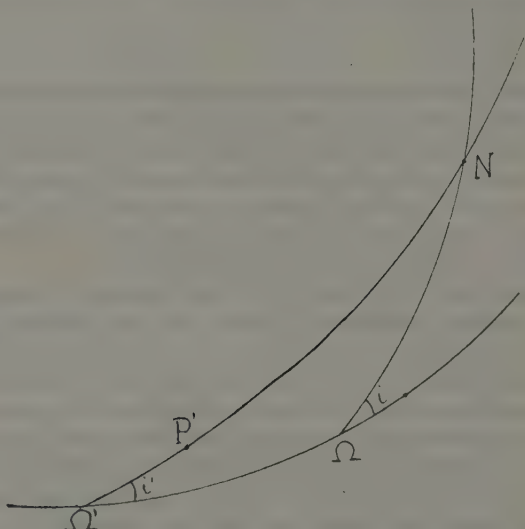


Fig. 1.

circolare). Se P' è il perielio di Plutone e N un nodo delle due orbite (in figura N rappresenta il nodo ascendente dell'orbita di Nettuno su quella di Plutone), per risolvere il problema occorre determinare l'epoca in cui P' coincideva con N (o col nodo opposto). Naturalmente ciò che a noi interessa è il *più recente* incontro in ordine di tempo avvenuto nel passato.

Per questo consideriamo il triangolo sferico $\Omega'\Omega N$, di cui si conoscono il lato $\Omega'\Omega$ e gli angoli in Ω' e in Ω . Nella Nota precedente ho trovato per le longitudini dei nodi di Nettuno e Plutone e per le loro variazioni secolari i valori seguenti:

Plutone $\Omega' = 109^{\circ} 21' 38'',9 - 95'',3 t$

Nettuno $\Omega = 131^{\circ} 00' 39'',9 - 25'',2 t$

essendo t secoli giuliani a partire dal 1930,0. Risulta quindi il lato $\Omega'\Omega$ espresso da:

$$\Omega - \Omega' = 21^{\circ} 39' 01'',0 + 70'',1 t.$$

Gli angoli in Ω' e Ω sono rispettivamente i' e $180 - i$, dove i' e i sono le inclinazioni delle due orbite e cioè:

$$\text{Plutone} \quad i' = 17^{\circ} 06' 50'',8$$

$$\text{Nettuno} \quad i = 1^{\circ} 46' 45'',3$$

le quali — è noto — al pari delle eccentricità non hanno perturbazioni secolari.

Ciò posto, cominciamo col trovare il valore del lato $\Omega'N = u$. Applicando il teorema delle cotangenti risulta:

$$[1] \quad \text{ctg } u = \text{ctg } (\Omega - \Omega') \cos i' - \frac{\text{ctg } i \sin i'}{\sin (\Omega - \Omega')}.$$

Ponendo per un momento:

$$\Omega - \Omega' = \alpha + \beta t \quad ; \quad m = \cos i' \quad ; \quad n = \text{ctg } i \sin i'$$

la [1] si scrive:

$$[2] \quad \text{ctg } u = m \text{ctg } (\alpha + \beta t) - n \text{cosec } (\alpha + \beta t).$$

Essendo β assai piccolo, sviluppiamo in serie i termini che contengono t ; conservando i termini di 1° grado in t , avremo:

$$\begin{aligned} \text{ctg } (\alpha + \beta t) &= \text{ctg } \alpha - \beta t \cdot \text{cosec}^2 \alpha \\ \text{cosec } (\alpha + \beta t) &= \text{cosec } \alpha - \beta t \cdot \cos \alpha \text{cosec}^2 \alpha \end{aligned}$$

da cui risulta facilmente:

$$[3] \quad \text{ctg } u = m \text{ctg } \alpha - n \text{cosec } \alpha - \text{cosec}^2 \alpha \cdot (m - n \cos \alpha) \cdot \beta t$$

che si può scrivere:

$$[4] \quad \text{ctg } u = u_0 + u_1 t$$

essendo:

$$\begin{aligned} u_0 &= m \text{ctg } \alpha - n \text{cosec } \alpha \\ u_1 &= \beta \cdot (n \cos \alpha - m) \cdot \text{cosec}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici e fatti i calcoli, risulta in definitiva:

$$\begin{aligned} m &= 0,95572 & u_0 &= -23,39139 \\ n &= 9,51831 & u_1 &= +0,01963 \\ \beta &= 0.000339 \text{ (in radianti)}. \end{aligned}$$

Onde:

$$[5] \quad \text{ctg } u = -23,39139 + 0,01963 \cdot t.$$

3. L'angolo cercato u si può scrivere sotto la forma:

$$[6] \quad u = u'_0 + u'_1 \cdot t$$

in cui u'_0 rappresenta il valore del lato $\Omega'N$ (distanza dell'intersezione comune delle orbite di Plutone e Nettuno dal nodo di Plutone con l'eclittica) corrispondente all'anno 1930,0 (origine dei tempi); mentre u'_1 è la variazione secolare di u .

u'_0 si trova subito, facendo in [5] $t = 0$, e si ha:

[7]

$$u'_0 = 177^\circ 33' 07'',3$$

Per trovare poi u'_1 notiamo che dalla [4] risulta:

$$u'_1 = \left(\frac{du}{dt} \right)_{t=0} = -u_1 \sin^2 u'_0.$$

Fatti i calcoli, si ottiene:

$$u'_1 = +7'',39$$

ossia, in definitiva:

[8]

$$u = 177^\circ 33' 07'' + 7'',4 t$$

dove, al solito, t sono secoli giuliani a partire dal 1930,0.

4. D'altra parte, sull'orbita di Plutone, si conosce la posizione del perielio P' e la sua variazione secolare (vedi Nota I). Precisamente la longitudine del perielio di Plutone è espressa da:

[9]

$$\pi' = 113^\circ 08' 00'',5 + 82'',6 t.$$

Com'è noto, è: $\pi' = \Omega' + \Omega'P'$. Risulta quindi:

[10]

$$\Omega'P' = \pi' - \Omega' = 3^\circ 46' 21'',6 + 177'',9 t$$

e ancora:

$$NP' = u - \Omega'P' = 173^{\circ} 46' 46'' - 170'',5 t$$

Se diciamo poi N' l'altro nodo delle due orbite di Plutone e di Nettuno (in figura nodo discendente dell'orbita di Nettuno su quella di Plutone), risulta:

$$P'N' = 180^{\circ} - P'N = 6^{\circ} 13' 14'' + 170'',5 t$$

E cioè, rappresentando la fig. 2 l'orbita di Plutone corrispondente all'inizio dei tempi (1930,0), l'angolo $P'SN = 173^{\circ} 46' 46''$ *diminuisce* di

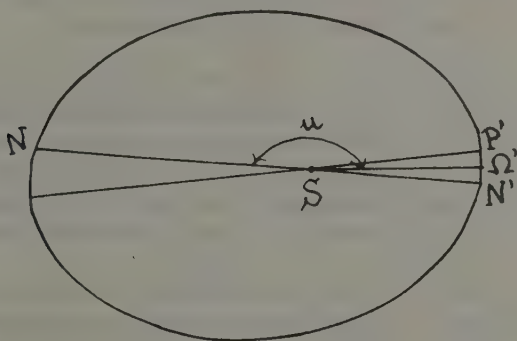


Fig. 2.

$170'',5$ per secolo, mentre l'angolo $P'SN' = 6^{\circ} 13' 14''$ *aumenta* della medesima quantità. Pertanto il perielio di Plutone P' ha incontrato l'orbita di Nettuno (su cui la posizione del perielio si può considerare del tutto indifferente, essendo assai piccola l'eccentricità dell'orbita stessa) *per l'ultima volta* allorchè l'angolo $P'SN'$ si è annullato; e questo è accaduto un numero n di secoli fa, essendo:

$$n = \frac{6^{\circ} 13' 14''}{170'',5}$$

e cioè $n = 131$ secoli giuliani prima dell'attuale. Si può concludere, quindi, che - se Plutone ha appartenuto al sistema di Nettuno come un antico secondo satellite - il distacco è avvenuto almeno 131 secoli or sono, e perciò può essere anche recentissimo. Diciamo però «almeno» giacchè tale distacco potrebbe essere avvenuto in anteriori coincidenze del perielio con la linea dei nodi.

Astronomia. — *Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari.* — V. La cometa Whipple-Fedtko (1942 g). Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I. — INTRODUZIONE E GENERALITÀ.

1. Questa cometa, l'ultima comparsa nel 1942, è stata vista per la prima volta in Europa da C. FEDTKE all'Osservatorio di Königsberg la sera dell'11 dicembre, mentre era un oggetto con nucleo, della grandezza complessiva 8^m e si trovava nella costellazione del Cancro ⁽²⁾. Tre giorni prima, e cioè l'8, essa era stata scoperta da WHIPPLE a Oak Ridge in America, e poi ritrovata dallo stesso WHIPPLE su precedenti lastre fin dal 12 novembre 1942, mentre era di 12^m ⁽³⁾.

All'Osservatorio di Monte Mario la notizia della scoperta pervenne solo la sera del 14, e ne iniziai le osservazioni la notte medesima, stimandone la grandezza complessiva di circa 7^m. Dal 15 al 22 dicembre il cielo a Roma è stato sempre coperto ed eccezionalmente piovoso impedendo ogni osservazione; la sera del 22 ho ricercato accuratamente l'astro, senza riuscire a vederlo data la forte luminosità del cielo per la Luna piena. Il tempo nuovamente cattivo me ne ha ancora proibito ogni osservazione fino al 4 gennaio 1943, dopodichè esse sono continuate abbastanza regolarmente fino alla metà dell'aprile. L'astro era animato da moto abbastanza rapido verso le regioni nord-est del cielo, onde è passato successivamente nelle costellazioni del Leone, dell'Orsa Maggiore, dei Cani da Caccia, conservando cioè un'ottima posizione in cielo. Il passaggio al perielio è avvenuto il 6 febbraio alla distanza di 1,34 unità astronomiche e quello al perigeo il 26 gennaio a 0,44 unità astronomiche.

Ho eseguito le osservazioni fotometriche, di cui dò conto nel presente lavoro, con l'equatoriale medio di mm. 155 di apertura e 2240 di focale

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ « B. Z. », 24, 127.

⁽³⁾ « Circ. Copenhagen », n. 941, 16 marzo 1943.

e fotometro a cuneo di Toepfer, misurando le variazioni della luminosità del nucleo sia in luce normale e sia a mezzo di filtri per la determinazione dell'indice di colore.

2. L'astro è rapidamente aumentato di splendore divenendo anche visibile ad occhio nudo verso la metà di gennaio. Dopo il passaggio al perielio la sua luminosità è andata poi decrescendo, ma il 23 febbraio la cometa ha subito un inaspettato notevole aumento di splendore, che l'ha portata a divenire assai bene visibile ad occhio nudo, mentre si trovava tra le stelle γ e δ dell'Orsa Maggiore, con grandezza complessiva di circa 3^m.5. Tale aumento era già cominciato, ma in misura assai minore, il giorno precedente 22. Esso dipendeva non tanto dal nucleo, quanto dalla chioma assai più grande, e dalla lunga coda, che il giorno precedente era del tutto insignificante. Il 23 febbraio, nel cannocchiale, il diametro della chioma (rotonda, bianca, brillante) era di 20'-25'; la coda, diritta, a pennacchi, era lunga oltre 2°, arrivando al di là della γ *Ursae Maioris*. La luminosità della cometa si è mantenuta tale per un paio di giorni, e poi è andata lentamente scemando di nuovo. La sera del 28 febbraio la coda era quasi scomparsa del tutto, mentre il nucleo si era spostato nella regione anteriore della testa, non più rotonda, ma di forma parabolica. La sera successiva, 1° marzo, la coda è ricomparsa, di più che 1° di lunghezza, sempre diritta e sottile.

Notiamo che nei giorni 22-23 febbraio si è avuta una improvvisa notevole attività solare, con comparsa di un cospicuo gruppo di macchie, che proprio in quei giorni è passato al meridiano centrale del Sole. Tali mie osservazioni sono state confermate anche dal prof. ABETTI, direttore dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, dove il giorno 22 febbraio alla torre solare sono state rilevate appunto notevoli eccezionali emissioni ed eruzioni cromosferiche.

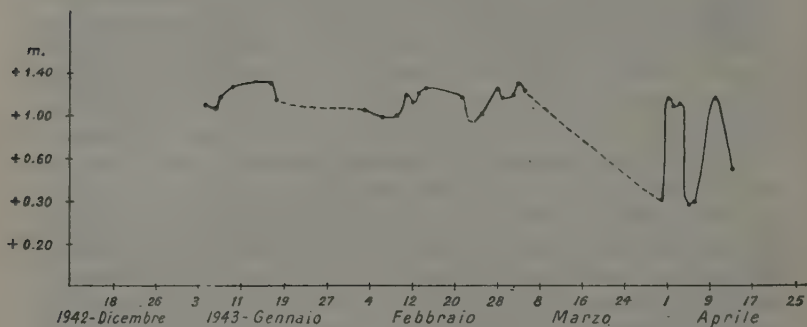
Poichè, com'è noto, la luminosità della chioma e della coda delle comete dipende in parte da fenomeni di fluorescenza ⁽¹⁾, si potrebbe mettere in relazione l'improvviso aumento di splendore della presente cometa, a tanta distanza dal perielio, con questa improvvisa notevole attività del Sole, di cui l'emissione di violente scariche di corpuscoli elettrizzati potrebbe aver prodotto, con fenomeni analoghi a quelli delle

(1) Sembra, invero, che si debba appunto a tali fenomeni l'origine degli spettri diversi da quelli di tipo solare, che si osservano nelle comete; onde - come dice il Bobrovnikoff - in ultima analisi le comete dipendono per la loro luminosità dal Sole, e sono da considerarsi intrinsecamente come dei « corpi oscuri » (nel qual senso deve naturalmente intendersi l'espressione « corpi neri » da me adoperata nella precedente Nota IV come traduzione di *dark bodies* del Bobrovnikoff).

aurore polari della Terra, il formarsi o l'illuminarsi delle regioni cometarye, così come è stato osservato.

Quest'interessante cometa ha presentato ancora altri singolari fenomeni, come, ad esempio, un probabile sdoppiamento avvenuto — secondo osservazioni fotografiche di S. AREND a Uccle — il 28-29 marzo ⁽¹⁾, e un

Indici di colore.



Grandezze osservate.

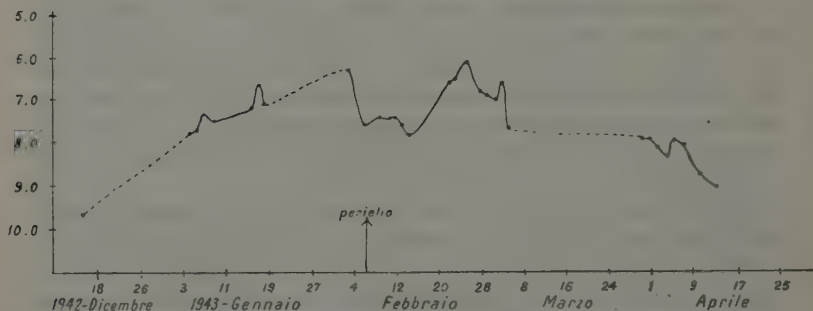


Fig. 1. — Cometa WHIPPLE-FEDTKE (1942 g). — Grandezze apparenti e indici di colore del nucleo.

frantumarsi del nucleo verso il 25 gennaio, come da rilievo di E. MADLOW a Berlin-Treptow ⁽²⁾. Dello sdoppiamento osservato a Uccle non è stata

⁽¹⁾ « B. Z. », 25, 61.

⁽²⁾ « B. Z. », 25, 33.

però trovata alcuna traccia cinque giorni dopo, secondo la comunicazione del medesimo Osservatorio di Uccle (¹).

II. - FOTOMETRIA VISUALE DEL NUCLEO.

3. La cometa è stata da me osservata sempre molto alta in cielo, molte volte quasi allo zenit; tuttavia le stelle di confronto sono state sempre accuratamente scelte nelle sue immediate vicinanze e in modo che fossero generalmente del medesimo splendore. Tuttavia in qualche serata questo non è stato possibile in modo completo, a causa di nubi o per qualche altra ragione, come era già avvenuto anche per qualcuna delle precedenti comete. Gli scarti di grandezza hanno raggiunto talora valori sensibili; ciò non ostante le osservazioni non sono state rigettate (come la prima del 15 dicembre), perchè mi è sembrato utile conservarle, anche se la loro precisione è stata minore che nelle serate normali; tanto più che le misure fotometriche dei nuclei cometari - analogamente a quanto ha fatto notare anche STEBBINS per gli ammassi globulari di stelle - presentano delle difficoltà notevoli, che producono alla loro volta sensibili dispersioni tra i valori ottenuti.

Il confronto è stato sempre fatto con immagini extra-focali delle stelle, ricoprenti all'incirca un'area uguale a quella del nucleo. La tabella I contiene l'elenco delle stelle, adoperate per questi confronti, con le rispettive grandezze nella scala di HARVARD (R. H. P.)

(¹) « Circ. Copenaghen », n. 947.

Questa Nota era già stata presentata all'Accademia quando ci sono pervenute le seguenti altre notizie.

Il giorno 29 marzo W. BRUNNER-HAGGER di Zurigo ha rilevato (« B. Z. », 25, 77) la formazione di un nodo brillante nella chioma e poi nella coda della cometa, nodo che si è andato allontanando dalla testa cometaria per effetto della pressione di radiazione. L'epoca dell'origine dell'oggetto osservato (28, 5 marzo) coincide con quella dell'oggetto Arend. Secondo il BRUNNER-HAGGER questo fenomeno sarebbe stato causato da radiazione corpuscolare proveniente dal Sole, la medesima che avrebbe provocato sulla Terra l'aurora boreale del 27 marzo, osservata anche a Zagabria da ST. MOHOROVIČIĆ. Dal tempo trascorso fra l'arrivo dei corpuscoli sulla Terra e sulla testa della cometa si ricava come velocità dei corpuscoli stessi quella di una unità astronomica per 30 ore; in base a questa velocità, l'eruzione del Sole sarebbe avvenuta il 26, 5 marzo. In effetti, fin dal 25 marzo era stata rilevata una forte attività solare in prossimità del meridiano centrale.

Già precedentemente a Zurigo era stata fotografata da BRUNNER-HAGGER e J. P. BLASER (« B. Z. », 25, 78) la comparsa e l'evoluzione di un cospicuo filamento luminoso e di un nodo brillante nell'epoca fra il 28 febbraio e il 4 marzo. Il nodo fu specialmente notevole il 2 marzo. Entrambi gli oggetti si spostavano con l'apparente velocità di 2°, 4 al giorno nella direzione della coda della

TABELLA I.
Stelle di confronto.

N.	*	Mag.	Sp.	N.	*	Mag.	Sp.
1	Boss Gen. Cat. 10948	6 ^m .06	Ao	10	Boss G. C. 15594	7 ^m .18	Fo
2	57 Cancri	5 .60	Ko	11	Boss G. C. 15485	6 .34	F2
3	Boss G. C. 12594	6 .33	F2	12	B. D. + 55° 1468	6 .49	K
4	Boss G. C. 12803	6 .84	G5	13	66 Ursae Maior.	5 .93	Ko
5	Boss G. C. 13221	4 .99	Ko	14	1CVen = 1UMaj	6 .26	Ko
6	Boss G. C. 13227	6 .56	F2	15	Boss G. C. 16767	6 .00	K2
7	Boss G. C. 14936	6 .72	K0	16	Boss G. C. 17287	6 .94	A2
8	Boss G. C. 14937	6 .58	Ko	17	Boss G. C. 17332	7 .19	K2
9	Boss G. C. 15372	6 .60	A5	18	Boss G. C. 17365	7 .90	F8

4. La tabella II contiene poi i risultati delle osservazioni, presentati al modo consueto.

5. Per costruire la curva di luce del nucleo cometario, ho proceduto, al solito, ad una opportuna perequazione dei valori bruti delle osservazioni, raggruppando, ove possibile, i valori delle medie serali ed ottenendo, per le date indicate nella prima colonna della tabella III, le *grandezze apparenti perequate* m_p . Con questi valori ho costruito la curva di luce riportata in fig. 2 nella linea a tratto marcato. Da notare che questa cometa, per la sua favorevole posizione in cielo, si è potuta osservare per un considerevole periodo di tempo, e — quel che più conta — per un lungo intervallo dopo il passaggio al perielio, come giammai finora mi era stato possibile.

cometa, a cui corrispondeva la velocità spaziale di 89 km/sec. Anche questi fenomeni sarebbero dovuti a radiazione corpuscolare emanata dal Sole, di cui la velocità sarebbe stata — secondo il BRUNNER-HAGGER — di una unità astronomica per 26-30 ore, e cioè in buon accordo con quella già trovata da HALE per la radiazione corpuscolare provocante le aurore polari sulla Terra.

La presente cometa, pertanto, sembra abbia mostrato sicuramente che il flusso delle particelle elettrizzate che si parte dal Sole in occasione di eruzioni e perturbazioni cromosferiche può avere un effetto direttamente osservabile anche su altri corpi celesti, oltre che sul nostro pianeta.

TABELLA II.

Fotometria visuale del nucleo della cometa Whipple-Fedtke (1942 g).

Data 1942-43	t_s	T. U.	*	Cfr.		Lecture fotometro		Δm	Mag. nucle	MEDIE	Note
				*	○	*	○				
Dicembre 15	8h 55m	2h 10m	1	6	6	65.90	44.13	3m.61	9m.67	9m.67	nubi va- ganti
Gennaio 4	4 53	20 55	2	12	12	63.99	50.47	2 .24	7 .84	7 .84	
6	5 40	21 17	2	12	12	63.57	50.59	2 .15	7 .75	7 .75	
7	5 21	21 22	3	8	8	51.60	45.39	0 .97	7 .39	7 .39	nubi
9	4 35	20 31	4	8	8	52.74	48.64	0 .68	7 .52	7 .52	
16	6 00	21 28	5	4	8	62.58	50.59	1 .97	6 .96	7 .22	
16	6 00	21 28	6	4	8	56.15	50.59	0 .92	7 .48		
17	5 45	21 07	5	4	8	60.87	50.56	1 .70	6 .69	6 .64	
17	5 45	21 07	6	4	8	50.72	50.56	0 .03	6 .59		
18	5 30	20 52	5	6	12	63.22	49.49	2 .27	7 .26	7 .15	
18	5 30	20 52	6	6	12	52.35	49.49	0 .47	7 .03		
Febbraio 3	6 12	20 28	7	6	12	51.37	54.14	0 .46	6 .26	6 .33	
3	6 12	20 28	8	6	12	53.12	54.14	0 .18	6 .40		
6	7 10	21 15	7	8	8	54.07	48.60	0 .91	7 .63	7 .63	
9	7 00	20 54	9	12	12	55.99	50.84	0 .85	7 .45	7 .45	
11	7 03	20 45	10	6	6	48.60	49.22	0 .10	7 .28	7 .49	⊙ bassa
11	7 03	20 45	11	6	6	57.34	49.22	1 .35	7 .69		
12	7 12	20 53	9	8	8	52.47	47.43	0 .84	7 .44	7 .44	⊙ bassa
13	6 35	20 15	12	8	8	51.82	45.03	1 .13	7 .62	7 .62	⊙
14	6 31	20 10	12	9	9	54.13	45.82	1 .38	7 .87	7 .87	⊙
22	7 05	20 07	13	12	12	58.70	54.68	0 .67	6 .60	6 .60	⊙ bassa
23	7 30	20 30	13	8	8	61.13	57.50	0 .60	6 .53	6 .53	
25	7 28	20 20	13	6	6	55.61	56.45	0 .13	6 .16	6 .16	
28	8 00	20 42	13	8	8	58.82	53.13	0 .94	6 .87	6 .87	
Marzo 10	7 20	19 55	14	12	12	57.21	53.17	0 .67	6 .93	6 .93	
3	7 45	20 15	14	6	12	53.98	49.34	0 .77	7 .03	7 .07	
3	7 45	20 15	15	6	12	56.18	49.34	1 .12	7 .12		
4	8 55	21 20	14	8	8	57.80	55.68	0 .35	6 .61	6 .61	

Segue: TABELLA II.

Data 1943	t_s	T. U.	κ	Cfr.		Letture fotometro		Δm	Mag. nucleo	MEDIE	Note	
				κ	∞	κ	∞					
Marzo . .	5	8h 52m	21h 10m	14	8	8	57.20	48.42	1m.46	7m.72	7m.72	nubi; stima
	31	10 05	20 45	16	10	10	47.87	54.25	1 .06	8 .00	8 .00	
Aprile . .	1	9 25	20 00	16	4	4	55.7	45.0	1 .1	8 .0	8 .0	
	2	9 34	20 05	16	10	10	61.35	53.92	1 .23	8 .13	8 .13	
	3	9 30	19 57	16	12	12	58.58	49.88	1 .44	8 .38	8 .38	
	5	9 35	19 55	17	6	12	52.12	46.45	0 .94	8 .13	7 .97	
	5	9 35	19 55	18	6	12	45.87	46.45	0 .09	7 .81		
	7	9 35	19 45	17	10	10	50.20	44.57	0 .93	8 .12	8 .12	
	10	9 55	19 52	17	6	12	54.17	44.82	1 .55	8 .74	8 .85	
	10	9 55	19 52	18	6	12	51.28	44.82	1 .07	8 .97		
	13	9 51	19 38	18	6	6	45.17	34.45	1 .17	9 .07	9 .07	©

Note. — Dicembre 15: cometa molto distinta con grande testa tondeggiante; nucleo centrale diffuso; piccola coda. — Gennaio 4: cometa magnifica; nucleo stellare molto netto, circondato da un'ampia testa rotonda; piccola coda di 20'; colore della cometa biancastro, del nucleo giallastro. — Gennaio 7: cometa più debole e meno grande; nucleo meno vivido. — Gennaio 16: cometa ben visibile nonostante il notevole chiarore lunare; nucleo grande, un po' diffuso. — Gennaio 17: cometa più brillante, con nucleo stelliforme più vivo. — Gennaio 18: nucleo piccolo, ma brillante come una stella, nonostante il forte chiarore lunare. — Febbraio 6: nucleo più piccolo e meno luminoso, azzurro; chioma molto tenue e sfumata; coda distinta. — Febbraio 11: nucleo meno vivido, diffuso, non puntiforme. — Febbraio 13: cometa meno luminosa; nucleo grande e diffuso. — Febbraio 14: nucleo stelliforme. — Febbraio 22: chiarore lunare; cometa più vivida con nucleo grande, vivido, stelliforme, luminoso. — Febbraio 23: cometa assai luminosa; nucleo grande, vivido, stelliforme; coda lunga, diritta, come un pennacchio fusiforme. — Febbraio 28: cometa un po' più piccola; si vede sempre bene ad occhio nudo; ha perduto gran parte della coda; il nucleo si è spostato nella regione anteriore della testa. — Marzo 1°: nucleo più brillante, vivido, azzurro; testa non tanto grande, allungata; ricomparsa la coda, lunga più di 1°, diritta, come un pennacchio. — Marzo 3: cometa notevolmente meno luminosa; nucleo distinto, ma non stelliforme, nè vivo; piccola chioma di 5'-7' di forma irregolare, sfilacciata ai margini; breve coda diritta, filamentosa. — Marzo 4: cometa con piccola testa sfilacciata e chioma irregolare; coda diritta, filiforme; nucleo assai brillante. — Marzo 5: nucleo più diffuso. — Marzo 31: dopo molti giorni di cattivo tempo e di indisposizione da parte mia: cometa sempre abbastanza luminosa; nucleo ben distinto; piccola chioma. — Aprile 1°: cometa meno luminosa di ieri; nucleo diffuso. — Aprile 2: cometa un po' più luminosa; piccola chioma sfrangiata, un po' allungata da una parte; nucleo sempre diffuso, ma più brillante di ieri. — Aprile 5: cometa piccola; chioma ovaliforme; nucleo ben distinto, stelliforme. — Aprile 7: nucleo vivido, puntiforme. — Aprile 10: cometa più piccola, ma con nucleo sempre stelliforme e abbastanza vivo. — Aprile 13: chiarore lunare; cometa assai piccola e debole, come una leggera nebulosità con una piccola condensazione centrale appena appena distinta. Misure assai difficili, specie con i filtri. — Dopo, periodo ininterrotto di parecchi giorni di cielo nuvoloso. La cometa è scomparsa al mio cannocchiale.

Ciò fatto, ho rinnovato le ricerche intese a determinare la legge secondo cui, quando si prescinda dalle improvvise variazioni di splendore, si può considerare sia variata la luminosità del nucleo col variare delle distanze eliocentriche e geocentriche della cometa. Per questo ho calcolato i valori teorici che avrebbe assunto (per ognuna delle date della prima colonna

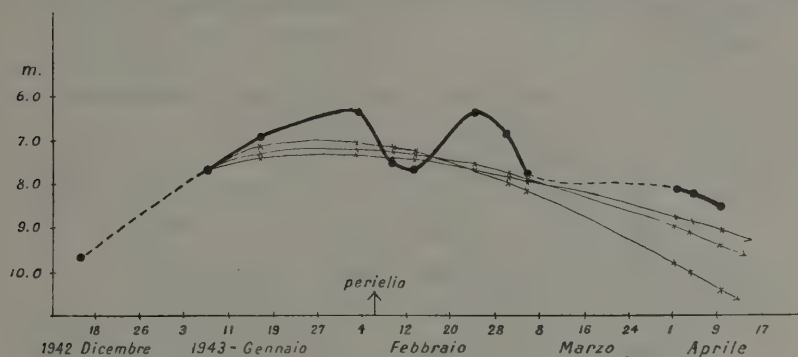


Fig. 2. — Cometa WHIPPLE-FEDTKE (1942 g.). — Curve di luce: osservate e teoriche.

della tabella III) la sua intensità luminosa, se per le sue variazioni vallessero le leggi:

$$i = \frac{k}{r^{2n} \Delta^2} \quad (\text{per } n = 1, 2, 3)$$

(r distanza della cometa dal Sole, Δ quella dalla Terra), a cui corrispondono le grandezze teoriche:

$$M_n = m_0 + 5 \log (r^n \Delta) \quad (\text{per } n = 1, 2, 3)$$

in cui per m_0 deve assumersi un valore costante (per ciascuna legge), convenientemente scelto. Così, per ottenere che le curve di luce teoriche passino tutte per un punto iniziale corrispondente al valore della seconda osservazione del 7 gennaio 1943, per m_0 si debbono prendere, per ognuna delle tre leggi considerate, i valori rispettivi:

$$m_0 = 8^m.44 \quad \text{per la legge } i = \frac{k}{r^2 \Delta^2}$$

$$m_0 = 7^m.68 \quad \text{» } \text{» } i = \frac{k}{r^4 \Delta^2}$$

$$m_0 = 9^m.27 \quad \text{» } \text{» } i = \frac{k}{r^6 \Delta^2}$$

TABELLA III.

Data 1942-43 T. U.	m_p	Quantità calcolate				
		r	Δ	M_1	M_2	M_3
Dicembre 15,09	9 ^m .67	1.56	0.66	—	—	—
Gennaio 7,37	7 .63	1.43	0.48	7 ^m .63	7 ^m .63	7 ^m .63
17,88	7 .00	1.39	0.44	7 .37	7 .33	7 .12
Febbraio 3,84	6 .33	1.36	0.44	7 .33	7 .22	7 .07
9,53	7 .52	1.36	0.45	7 .37	7 .28	7 .12
13,84	7 .63	1.36	0.47	7 .47	7 .38	7 .32
24,18	6 .43	1.38	0.51	7 .67	7 .57	7 .67
Marzo 2,85	6 .87	1.40	0.54	7 .85	7 .81	8 .07
5,88	7 .72	1.41	0.55	7 .89	7 .87	8 .17
Aprile 1,84	8 .04	1.56	0.73	8 .73	8 .92	9 .82
4,83	8 .17	1.59	0.75	8 .82	9 .07	10 .02
9,33	8 .49	1.63	0.80	9 .01	9 .32	10 .42

I valori di r e Δ sono stati ricavati dalle effemeridi di E. RABE (« B. Z. » 24, 131), di L. OTERMA (« B. Z. » 25, 9), di M. PROTICH (« B. Z. » 25, 15) e di E. RABE (« B. Z. », 25, 45), extrapolando per il valore del 15 dicembre 1942.

Le curve di luce teoriche corrispondenti a queste leggi sono rappresentate in figura a tratto sottile. Si vede subito come le variazioni osservate si scostano molto da quelle teoriche, che prevederebbero tutte un più lieve aumento prima del perielio e una assai più rapida diminuzione di luminosità dopo (anche prescindendo naturalmente dall'improvviso aumento della fine febbraio). Si potrebbe pensare che dette variazioni siano avvenute secondo una legge in cui all'esponente di r si dovrebbe assegnare un valore superiore a sei; questo importerebbe però una ancora più rapida discesa della luminosità; la legge di variazione è in sostanza molto complessa, si da sfuggire ad uno schema analitico.

TABELLA IV.

Effetto di fase e grandezze ridotte.

Data 1942-43 T. U.	m_p	α	$\varphi(\alpha)$	m'_p	H_1	H_2	H_3
Dicembre 15.09	9 ^m .67	22° 8	0 ^m .08	9 ^m .59	9 ^m .52	8 ^m .57	9 ^m .46
Gennaio 7.37	7 .63	17 .8	0 .05	7 .58	8 .39	7 .63	9 .22
17.88	7 .00	19 .6	0 .06	6 .94	8 .01	7 .29	9 .09
Febbraio 3.84	6 .33	27 .0	0 .11	6 .22	7 .33	6 .68	8 .42
9.53	7 .52	29 .5	0 .13	7 .39	8 .36	7 .77	9 .54
13.84	7 .63	31 .7	0 .15	7 .48	8 .45	7 .78	9 .43
24.18	6 .43	32 .5	0 .16	6 .27	7 .04	6 .38	7 .87
Marzo 2.85	6 .87	33 .4	0 .17	6 .70	7 .29	6 .57	7 .90
5.88	7 .72	32 .9	0 .16	7 .56	8 .10	7 .37	8 .64
Aprile 1.84	8 .04	30 .8	0 .14	7 .90	7 .61	6 .66	7 .35
4.83	8 .17	28 .5	0 .12	8 .05	7 .67	6 .66	7 .30
9.33	8 .49	27 .7	0 .11	8 .38	7 .81	6 .74	7 .23

6. Per completare la ricerca ho voluto vedere anche se parte almeno delle variazioni di luminosità osservate si possa imputare a eventuali effetti di fase (nell'ipotesi — certamente discutibile — che il nucleo cometario sia sferico o costituito da elementi sferici). L'angolo di fase α è stato da me ricavato con la formula:

$$\cos \alpha = \frac{r^2 - \Delta^2 - R^2}{2 r \Delta}$$

(R distanza della Terra dal Sole); e la corrispondente funzione di fase $\varphi(\alpha)$, espressa notoriamente da:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha}{\pi},$$

quando si assuma la legge di Lambert. l'ho ricavata dalle apposite tabelle calcolate da E. SCHÖENBERG nell'*Handbuch der Astrophysik (Theoretische Photometrie, band II 1, 2ª parte)*. Questi elementi sono riportati nella tabella IV, in cui ho dato anche le grandezze osservate perequate, corrette dell'effetto di fase [$m'_p = m_p + \varphi(\alpha)$], nonchè i valori H_1 , H_2 , H_3 delle *grandezze ridotte* del nucleo cometario, ricavate dalle formule:

$$H_n = m'_p - 5 \log(r^n \Delta) = m_p + \varphi(\alpha) - 5 \log(r^n \Delta) \quad (\text{con } n = 1, 2, 3).$$

TABELLA V.

Indici di colore del nucleo della cometa Whipple-Fedtko (1942 g).

Data 1943	t_s	T. U.	LG	LV	$LG-LV$	K	Stelle di confronto	C	Note	
Gennaio .	4	4h 38m	20h 45m	43.46	39.18	4.28	+ 0m.250	14-15-16-17-18	+ 1m.09	
	6	6 08	22 15	44.07	40.10	3.97	+ 0 .269	12-16-17	+ 1 .07	
	7	5 44	21 43	39.86	35.17	4.69	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .17	
	9	5 10	21 05	44.34	37.75	6.59	+ 0 .193	20-21	+ 1 .27	
	16	6 18	21 46	45.20	39.98	5.22	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .30	
	17	6 08	21 33	47.95	43.34	4.61	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .15	
Febbraio	3	6 55	21 11	48.30	44.45	3.85	+ 0 .268	11-12-16-17	+ 1 .03	
	6	7 25	21 30	43.82	40.17	3.65	+ 0 .268	11-12-16-17	+ 0 .98	
	9	7 25	21 19	48.25	44.23	4.02	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .00	
	11	7 28	21 13	44.03	38.30	5.73	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .19	
	12	6 54	20 35	41.03	36.50	4.53	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .13	C bassa
	13	6 52	20 31	41.52	36.63	4.89	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .22	C
	14	6 50	20 26	41.42	36.35	5.07	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .26	C
	22	7 22	20 25	50.13	44.52	5.61	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .17	C bassa
	23	8 25	21 20	50.25	46.83	3.42	+ 0 .268	11-12-16-17	+ 0 .92	C sorge
	25	6 55	19 47	45.95	41.97	3.98	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 0 .99	
	28	7 45	20 25	49.10	43.02	6.08	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .26	
Marzo .	1	7 40	20 15	47.00	42.41	4.59	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .14	
	3	8 10	20 39	45.23	39.52	5.71	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .19	
	4	8 47	21 12	49.60	43.35	6.25	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .30	
	5	8 40	21 00	45.57	39.72	5.85	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .22	
	31	10 05	20 45	38.62	36.72	1.90	+ 0 .113	3-5-6	+ 0 .21	
Aprile .	1	9 10	19 45	43.52	37.92	5.60	+ 0 .208	19-20-21	+ 1 .16	nubi sparse
	2	9 24	19 55	45.17	40.83	4.34	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .09	
	3	9 42	20 07	44.22	39.78	4.44	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .11	
	5	9 45	20 03	37.62	36.06	1.56	+ 0 .113	3-5-6	+ 0 .18	
	7	9 20	19 30	38.82	37.15	1.67	+ 0 .113	3-5-6	+ 0 .19	
	10	10 15	20 13	38.14	33.50	4.64	+ 0 .250	14-15-16-17-18	+ 1 .16	
	13	9 45	19 31	29.23	26.56	2.67	+ 0 .188	5-6-7	+ 0 .50	C; difficile

Evidentemente, se una di queste leggi fosse rigorosamente valida, dovrebbe la corrispondente grandezza ridotta essere sensibilmente costante. Ma si vede subito, in primo luogo, che l'effetto di fase è di entità pressochè trascurabile; in secondo, che le grandezze ridotte non sono costanti, e nemmeno composte di gruppi di valori sensibilmente costanti, se non per brevi intervalli di tempo. Il che conferma la natura singolare delle variazioni luminose osservate in questa cometa, e già messe in evidenza nella ricerca diretta.

III. — INDICI DI COLORE.

7. Nelle medesime serate delle osservazioni fotometriche in luce normale ho proceduto alla determinazione degli indici di colore del nucleo cometario, adoperando gli strumenti e i metodi già altre volte descritti. La tabella V contiene i risultati di tali misure. Essi sono riportati in diagramma nella fig. 1 (in alto).

In questa cometa è da rilevare che il colore del nucleo, variato fra i valori estremi di $+1^m.30$ e $+0^m.18$ (sempre nella scala di HARVARD, con equazione $gKo - A_0 = +1^m.30$), non ha subito notevoli oscillazioni nel periodo tra il 15 dicembre e il 15 marzo, comprendente il passaggio al perielio e le più notevoli variazioni della luce normale. L'indice di colore medio in tale periodo è stato $+1^m.15$, a cui corrisponde il tipo spettrale G6, un po' più avanzato che in tutte le comete che ho avuto fin qui occasione di esaminare. Invece nel periodo successivo, mentre la luce normale andava regolarmente smorzandosi, l'indice di colore ha avuto variazioni improvvise, anche da una sera all'altra, di più che una grandezza stellare.

Per quel che riguarda, infine, le relazioni tra queste variazioni del colore e le variazioni della luminosità in luce normale, esse non sono state così cospicue come in alcune delle altre comete precedenti. Tuttavia in alcuni periodi si nota chiaramente la validità della *legge di similitudine*, secondo cui ad un aumento della grandezza stellare apparente del nucleo cometario (ossia diminuzione della luminosità) corrisponde una diminuzione dell'indice di colore, e viceversa (¹). Questo è notevole specialmente

(¹) Nella precedente Nota IV (cometa Whipple-Bernasconi-Kulin), nella formulazione di questa legge è occorsa una facile svista, per cui si era parlato di « luminosità » anzichè di « grandezza stellare ». Ma tale fortuito scambio di termini non poteva dar luogo a confusione alcuna. A buon conto ripetiamo qui gli enunciati di entrambe le leggi:

nel periodo di fine febbraio-marzo, in corrispondenza delle maggiori variazioni di luce.

1° *legge di similitudine*: ad un aumento della grandezza stellare (diminuzione di luminosità) del nucleo cometario corrisponde una diminuzione dell'indice di colore (azzurramento), e a una diminuzione della grandezza stellare (aumento di luminosità) corrisponde un aumento dell'indice di colore (arrossamento).

2° *legge di inversione*: ad un aumento della grandezza stellare (diminuzione di luminosità) corrisponde un aumento dell'indice di colore, e a una diminuzione della grandezza stellare (aumento di luminosità) corrisponde una diminuzione dell'indice di colore.

Fisica. — *Il fenomeno Kerr nei metalli non ferromagnetici.*
Nota ⁽¹⁾ di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una precedente Nota ⁽²⁾, ho riferito su talune ricerche che mi hanno permesso di osservare l'effetto KERR (riflessione della luce su specchi di ferro magnetizzati), con una sensibilità assai superiore all'ordinario. Conchiudevo tale mia comunicazione, osservando che, grazie alla grande sensibilità del metodo da me realizzato, sarebbe stato interessante esaminare se anche i metalli non ferromagnetici potessero presentare lo stesso effetto, sia pure in misura ridottissima.

Ricordo inoltre, che un simile programma di lavoro si riferisce esclusivamente al caso in cui il campo magnetico sia parallelo al raggio luminoso che colpisce perpendicolarmente lo specchio metallico in esame.

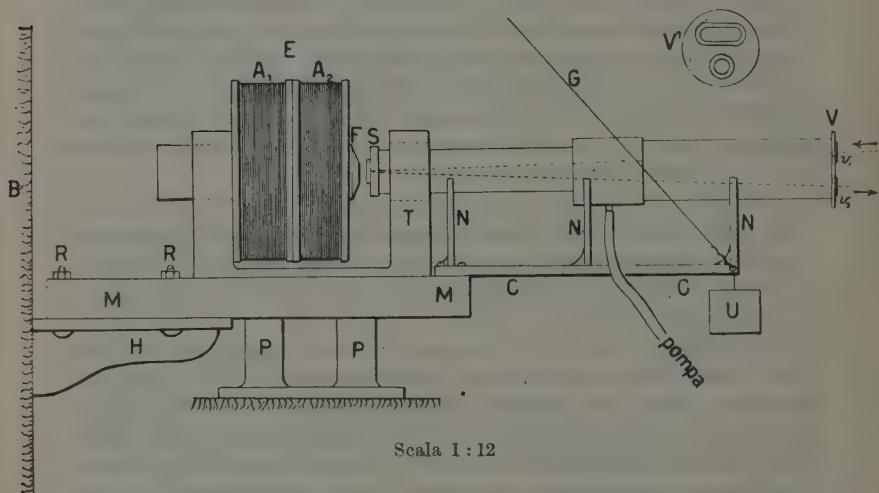
Negli ultimi mesi, ho proseguito tali ricerche, e dò ora relazione dei risultati sinora ottenuti.

Il dispositivo usato è, in principio, lo stesso di quello descritto nella Nota citata. Come già accennavo, sperimentando con tale dispositivo, rilevai già allora quali difficoltà si opponevano ad osservazioni ancora più precise di quelle riportate. Esse dipendevano da certe cause perturbatrici, che solo recentemente ho potuto eliminare quasi completamente. Una prima perturbazione corrispondeva alla manifestazione di effetto FARADAY nell'aria prossima allo specchio, e feci vedere come ci si possa render conto della misura di un'azione del genere, col togliere l'aria dalle immediate vicinanze di quello. Ciò avevo ottenuto usando un tubo di vetro lungo circa 30 cm., come è indicato nella fig. 3 della Nota richiamata. Ma un simile artificio, se veniva ad eliminare la perturbazione FARADAY prodotta dall'aria, ne introduceva un'altra dello stesso tipo, prodotta dalla lastra di vetro, necessaria a chiudere anteriormente il detto tubo. Per vero, si può, con opportune esperienze, già da me indicate, discriminare l'effetto dell'aria, da quello del vetro. Ma ho ritenuto opportuno, per la maggior evidenza degli effetti osservabili, eliminare, per quanto possibile, anche l'azione del vetro, o per lo meno ridurla di molto.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽²⁾ Seduta del 19 febbraio 1943.

Per ottenere questo risultato, il dispositivo già descritto è stato modificato come indica la figura di questa Nota. Le modificazioni introdotte si riferiscono però quasi esclusivamente all'elettromagnete, restando inalterate le altre particolarità. Ciò dicasi, tanto per quanto concerne la parte ottica, quanto quella elettrica e magnetica. L'elettromagnete, E , qui usato è del tipo Weiss, nel quale i due avvolgimenti A_1, A_2 sono stati accostati verso la sinistra. Inoltre, è stato tolto dall'apparecchio il nucleo di ferro cilindrico di 10 cm. di diametro, di destra. Con ciò, un osservatore, che si trovi lungo la direzione SV , vede la faccia anteriore F dell'altro nucleo, rastremato in una superficie piana circolare di 35 mm di diametro;



ciò avviene attraverso la staffa di ferro T , il cui foro, che era destinato a contenere il nucleo eliminato, rimane così del tutto libero. Con questo artificio, non solo il campo magnetico generato dall'elettromagnete nella prossimità di F rimane accresciuto (per la parziale chiusura del circuito magnetico, operata dalla staffa T), ma, inoltre, quello lungo la visuale TV rimane alquanto affievolito. È da dire peraltro, che, essendo, appunto, assai imperfetta quella chiusura, lungo TV , il campo, sia pur debole, continua ad avere il senso imposto dalla polarità di F , od anche dalla corrente circolante in A_1 ed A_2 . Così, se questa ha l'intensità massima di circa 20 A, nelle immediate vicinanze di F , il campo risulta di 6700 oersted, e va affievolendosi progressivamente verso T , e molto più, procedendo verso V . In questa località, che trovasi a circa 1 m. da F , esso ha il valore soltanto di circa 1,2 oersted.

L'elettromagnete E è sostenuto dal suo piede PP , che appoggia in qualche modo sul pavimento del laboratorio. Intorno alla base di E , è inoltre situata un'armatura orizzontale di legno MM , di cui nella figura si scorge solo un lato, e che è fissata mediante bulloni di ottone RR , su di una mensola di marmo H , sporgente dal muro maestro B . L'armatura MM , che non tocca in alcun punto l'elettromagnete ed il suo sostegno, si prolunga in un'assicella pure di legno CC , destinata a sorreggere un tubo di vetro che va da S a V , di diametro progressivamente crescente da cm. 9 ad 11; e ciò mediante tre supporti N . Data la lunghezza di MM e CC (complessivamente essa raggiunge m. 1,50), la rigidità del congegno è migliorata mediante due fili di ottone che in figura si sovrappongono in G , che costituiscono due tiranti, fissati in alto del muro maestro e tesi da un peso di piombo U . Con questi artifici, il tubo di vetro SV , viene ad essere sostenuto in modo del tutto indipendente dall'elettromagnete E . Non sono così a temersi, in questo tubo, scosse meccaniche, dovute a magnetostrizione, o simili, per l'eccitazione di E . Al più, si possono manifestare lievissime azioni, dipendenti dal probabile diamagnetismo del materiale con cui è costituito il tubo SV , i suoi accessori ed il suo sostegno. Di tali azioni sarà detto in seguito. Il tubo SV è chiuso a sinistra dallo specchio in esame, di solito costituito da una lastra di vetro di un paio di millimetri di spessore, ricoperta da uno strato metallico; a destra, da una lastra di ottone che porta due finestre v_1, v_2 , su cui sono masticiate due lastrine di vetro di 1,2 mm. di spessore. Queste servono, rispettivamente per l'entrata e l'uscita del raggio luminoso, il cui cammino esterno è lo stesso di quello spiegato nella Nota citata. Le forme delle due finestre, dipendono da quelle di tali due raggi; esse sono indicate in V' . Lo spessore delle dette due lastrine è sufficiente a resistere alla pressione atmosferica, quando si pratica il vuoto nel tubo. Questo ha una lunghezza notevole (circa 1 m.), perchè le lastrine vengano a trovarsi in una località discosta da E il più possibile. Comunque della traccia di fenomeno FARADAY in esse manifestantesi ad elettromagnete eccitato, si può tener conto nelle singole osservazioni. Essa, in ogni modo è di un ordine di grandezza assai piccolo. Lo specchio S , con la superficie riflettente rivolta verso destra, smerigliato sull'altra faccia, è fissato al fondo di sinistra del tubo mediante sottili guarnizioni di gomma strette da viti di ottone, su di un anello adattato a smeriglio sul tubo. Tutto il tubo può farsi scorrere alquanto longitudinalmente, al fine di avvicinare più o meno S ad F .

Il dispositivo descritto nella Nota precedente presentava, inoltre, l'inconveniente di una grande instabilità nelle deviazioni del suo galvanometro. L'indice luminoso di questo subiva accidentali, bruschi o lenti spostamenti, in un senso o nell'altro, che talvolta si opponevano alla lettura di un effetto dell'ordine del centimetro. Ho eliminato in gran parte tali inconvenienti, con l'adoperare una batteria di accumulatori

al nichel di grande capacità (circa 400 amperora); la lampada ad incandescenza e l'accensione indiretta del pentodo, non richiedendo che 5 A a 6 V, sui 60 A che la batteria avrebbe potuto fornire, al massimo. Oltre a ciò, sono state rimosse, nei vari circuiti, le più lievi incertezze di contatto metallico, come quelle che di solito esistono nei comuni portalam-pade, ecc. Tali accorgimenti sono stati necessari, data la grande sensibilità del metodo di osservazione, che dovrebbe svelare, come già dissi, variazioni dell'ordine del centomillesimo, della intensità di luce in esame. A proposito di tale sensibilità, aggiungo che la cellula fotoelettrica dà una corrente dell'ordine del microampere, amplificata dal pentodo, in circa un milliampere.

Dirò ora, del modo di procedere alle singole osservazioni. È stato ricercato l'effetto tipo KERR per i metalli: Ag, Au, Pt, Al, Bi, opportunamente preparati (via chimica, precipitazione catodica, distillazione nel vuoto, laminazione meccanica). Nel caso di metalli stesi in sottili strati su lastrine di vetro, mi sono assicurato della perfetta opacità alle radiazioni che possono impressionare la cellula fotoelettrica. Comunque, la smerigliatura posteriore di quelle lastrine, a cui ho già accennato, avrebbe lo scopo di non lasciar tornare indietro alcuna traccia concorde di luce, passata prima per trasparenza nel metallo.

Fissato lo specchio *S* come si è detto, si fa il vuoto a meno di 1 mm. di mercurio, mediante una pompa rotativa GAEDE, che è bene lasciare in funzione durante le singole esperienze. Le osservazioni non vengono iniziate che due o tre ore dopo aver acceso la lampada ad incandescenza ed il riscaldatore del pentodo. Posti i due nicol, come già indicato, non all'oscurità, ma facenti tra loro, rispetto a tale posizione, un angolo da 15° a 30°; compensata la corrente fotoelettrica mediante il circuito sussidiario già descritto; si determina anzitutto la sensibilità del dispositivo alle piccole rotazioni del piano di polarizzazione della luce, che perviene sulla cellula. Tale sensibilità, oltre che dipendere dalla scelta di quell'angolo, può variare (a parità di incandescenza della lampada) col potere riflettente dello specchio in esame. Si disse che il valore massimo di tale sensibilità può essere di circa 60 cm. per minuto primo di rotazione. Ma raramente ho mantenuto un sì alto valore. Al fine di conseguire una maggiore stabilità delle deviazioni galvanometriche, la sensibilità è stata talvolta ridotta persino a solo 8 o 10 cm. Ciò si ottiene riducendo le tensioni del pentodo, o il riscaldamento del suo filamento.

Si iniziano a questo punto le osservazioni vere e proprie, inviando di colpo o meglio attraverso una resistenza rapidamente portata a zero, la corrente (massima di 20 A, data da batteria a 120 V), nell'elettromagnete, in un certo senso; si osserva la deviazione del galvanometro; si rovescia poi il senso della corrente, rilevando così la deviazione in senso contrario; si ripetono una quarantina di volte tali letture; si fanno le me-

die, come nell'uso di una comune bilancia. La differenza delle due medie rappresenta, evidentemente, un effetto doppio. Il senso di tale effetto si deduce dall'esame del verso delle deviazioni (accrescimento o diminuzione di luce). Successivamente, si ripetono tutte le dette osservazioni, dopo aver ruotato uno dei nicol rispetto all'altro, in modo che lo scelto angolo fra 15° e 30° sia contato in senso inverso. Si ha così una nuova determinazione del doppio effetto. Ma tali due determinazioni non sono di solito eguali; esse differiscono talvolta persino del 30 % circa. La causa di ciò si deve ricercare, in gran parte, in un'azione meccanica del campo magnetico sulle armature di sostegno del tubo, su questo, e su i suoi accessori; ciò in conseguenza, come già si è accennato, di probabile diamagnetismo di tali parti. Infatti, l'indice del galvanometro è sensibile alle deformazioni anche minime di una parte qualsiasi del dispositivo ottico; queste possono generare lievissime deviazioni del fascio di raggi, il che è tanto più facile, in quanto che esso va e viene, attraverso una distanza di circa 6 m.; a tali deviazioni debbono corrispondere variazioni dell'intensità complessiva della luce cadente sulla cellula. Ora, un errore di tal genere appare verosimilmente eliminabile, prendendo la media delle determinazioni fatte, con le due posizioni reciproche inverse dei nicol; corrispondendo ad una di esse accrescimento di luce, ed all'altra diminuzione. Evidentemente la causa perturbatrice intravista deve dare, nei due casi, effetti dello stesso senso, ed essa viene, così, eliminata.

Viene in tal modo, osservato il ricercato effetto. Esso consiste in una rotazione angolare del piano di polarizzazione della luce riflessa dai vari metalli esaminati, che si è, sinora, sempre manifestata come *positiva*, cioè secondo il senso amperiano della corrente generante il campo. L'intensità usata di questo, H , è stata di solito la massima ottenibile coll'elettromagnete descritto, e cioè di circa 6600 oersted, quando lo specchio S è quasi addossato senza toccarlo ad F , e la corrente inviata è di circa 20 A. Supponendo in prima indagine, che la osservata rotazione α sia proporzionale ad H , ho determinato ogni volta il valore di $K = \alpha/H$, cioè la costante del nuovo effetto, nelle condizioni di esperimento indicate (natura della sorgente luminosa, tipo di cellula fotoelettrica usata), per unità di campo magnetico.

Senza riportare le singole letture più volte ripetute, indico nella seguente tabella, in ordine decrescente, i valori di K per i metalli con cui si è sperimentato, espressi in minuti primi, per oersted:

Platino	+ 0,0000130
Oro	+ 0,0000095
Argento	+ 0,0000085 \pm 0,0000017
Alluminio	+ 0,0000031 \pm 0,0000007
Bismuto	+ 0,0000018

Questi valori sono da me ora dati in modo provvisorio. Essi potranno con una certa probabilità, subire qualche variazione, in seguito a ulteriori perfezionamenti del dispositivo, del metodo di osservazione ed a più accurata determinazione del valore del campo magnetico. Per Ag ed Al, ho dato anche gli errori probabili delle determinazioni, perchè queste sono le medie di osservazioni molto più numerose che per gli altri metalli.

I riportati valori sono inoltre corretti dalla piccola perturbazione FARADAY, dovuta ai vetri delle due finestre v_1 e v_2 . Con preliminari controlli ho verificato che per il campo massimo di 6700 oersted, essa corrisponde a circa $1/100$ di $1'$ d'arco.

Come controllo della reale esistenza del descritto fenomeno, accenno ancora alla seguente esperienza. Determinato il valore di K per un dato metallo, quando questo trovasi nella immediata vicinanza della espansione polare F , spostato poi il tubo SV verso destra, in guisa da affievolire di molto il campo agente sul metallo. In corrispondenza, l'effetto osservato si affievolisce anch'esso e può del tutto sparire. Ciò non può spiegarsi in altra guisa, all'infuori di ammettere un'azione diretta del c. m. sul metallo, giacchè non può pensarsi che l'eseguito spostamento, necessariamente verificatosi anche per i due vetri v_1 e v_2 , abbia portato ad un sensibile affievolimento del campo in cui essi si trovano. Questo campo infatti, oltre ad essere lì assai debole, ha gradiente circa nullo, per la notevole distanza dei vetri dall'elettromagnete.

Il possibile ritorno di luce, attraverso la lastrina sostenente la pella metallica, perchè riflessa dalla faccia opposta di essa è da escludersi, per quanto ho già detto.

Tutto ciò considerato si osserva infine, che una prova ulteriore della esistenza del fenomeno è data dalla diversità dei valori di K , ottenuti per i vari metalli.

AmMESSO dunque il manifestarsi di un effetto del genere, può essere interessante confrontare con i valori su riportati, quelli della costante di KERR, per qualche metallo ferromagnetico. Per esempio, per il ferro elettrolitico, e per una $\lambda = 5300 \text{ \AA}$, $K = -0,0135/\text{oersted}$. (¹). Per cui, l'effetto osservato, rispetto al ferro, è di un ordine di grandezza circa 1000 volte minore. È però da rilevare che l'effetto KERR, nelle sostanze ferromagnetiche, per la facilità con cui lo si osserva, è riferito ad una determinata λ ; mentre il nuovo effetto corrisponde alla promiscua azione di tutto lo spettro della comune lampada ad incandescenza, sia pure ridotto, per il limitato potere riflettente dei singoli metalli. Questi possono sottrarre di preferenza, per esempio la parte *u. v.*, come fa l'argento; oppure

(¹) *Critical Tables*, vol. VI, pag. 435. ..

rifletterla bene, come fa l'alluminio, ecc. Ed infine, si può considerare l'importanza che deve avere nel risultato di queste ricerche, l'uso di una cellula fotoelettrica piuttosto che di un'altra. Nel caso delle mie esperienze, essendomi servito di una cellula al sodio, la banda di sensibilità di questa si estende verso le parti più refrangibili dello spettro, alle quali vanno, in certo modo, riferiti i valori di K , su riportati.

Da tutto ciò risulta dunque, che molte delle intime modalità del trovato fenomeno meritano ancora ulteriore accurato studio. Ciò vale particolarmente, per la sua dipendenza dai valori della intensità del campo magnetico agente (probabilmente vige al riguardo la legge della proporzionalità diretta, provvisoriamente ammessa) e dai valori delle lunghezze d'onda della luce usata. Questo secondo problema, appare per ora di più difficile risoluzione.

Ma intanto, può dirsi che il fenomeno della rotazione del piano di polarizzazione della luce riflessa dai metalli, sottoposti ad un campo magnetico, costituisce una proprietà generale di questi. Esso, come era già noto sin dal 1876, è relativamente intenso e *negativo* (in generale) per i metalli e corpi ferromagnetici; mentre ora lo si può riscontrare anche per i metalli non ferromagnetici sempre col segno *positivo*, ma in misura circa 1000 volte minore.

Chimica. — *Su un metodo di determinazione dei calori di fusione dalle curve di raffreddamento.* — I. Calori di fusione di La, Ce, Pr e Al ⁽¹⁾. Nota di UMBERTO CAVALLARO, presentata ⁽²⁾ da LUIGI ROLLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È noto che il calore di fusione di una sostanza può essere determinato in base alla sua curva di raffreddamento. Il primo che si occupò della questione fu il TAMMAN che eseguì il calcolo con metodi di confronto, e, più direttamente, con l'equazione

$$\lambda = K\tau \frac{dT'}{dt'}$$

che lega il calore di fusione λ (riferito al grammo di una sostanza) con la durata dell'arresto τ e con la velocità di raffreddamento prima dell'arresto (espressa come rapporto tra il salto di temperatura dT' e l'intervallo di tempo dt' in cui esso si è verificato); K è una costante di proporzionalità ⁽¹⁾.

Successivamente il ROOS ⁽²⁾ ritornando sul problema emise un'altra formula abbastanza simile ottenendo risultati soddisfacenti.

Alcuni metodi più o meno diretti sono inoltre noti; tra essi, quelli che si riferiscono all'abbassamento crioscopico, sono stati sovente impiegati.

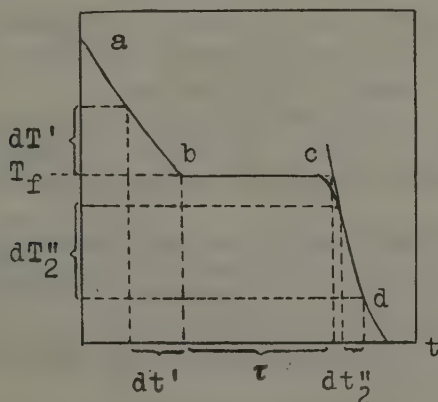
Nell'intento di dare un'interpretazione meno empirica di tutta la curva di raffreddamento intorno alla temperatura di fusione, e principalmente di trovare un sistema che permetta di determinare il calore di fusione da una curva qualsiasi ed in qualsiasi condizione presa (senza cioè esigere assoluta identità sperimentale in ogni caso) venne studiato il sistema che verrà ora descritto.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

METODO DI DETERMINAZIONE DI λ .

Sia $abcd$ una curva di raffreddamento qualsiasi; in essa possono essere distinti tre tratti: quello prima dell'arresto (ab) che riguarda il raffreddamento del liquido, l'arresto stesso (bc) e infine il tratto successivo (cd) che rappresenta il raffreddamento del solido. Dato che durante tutto l'arresto la temperatura non varia, si può ritenere che tutto il calore disperso dal sistema crogiolo + sostanza sia rimpiazzato dal calore di fusione che si svolge.



Quindi se g sono i grammi di sostanza che solidificano e Δ la dispersione media (nell'unità di tempo) che si ha durante l'arresto, vale la equazione

$$[1] \quad \lambda g = \tau \Delta.$$

Dalla [1], ricavando λ , si ha:

$$[2] \quad \lambda = \frac{\tau \Delta}{g}$$

che contiene solo Δ da conoscere. Il calcolo di Δ si può fare pensando che essa sarà in media eguale alla media tra le 2 dispersioni Δ' e Δ'' prima e dopo l'arresto

$$[3] \quad \Delta = \frac{\Delta' + \Delta''}{2}$$

Δ' e Δ'' si possono ora calcolare dal primo e terzo tratto della curva di raffreddamento. Infatti si può pensare che tutto il calore che vien

disperso dal sistema crogiolo + sostanza in un certo tempo dt' e dt'' (con gli apici ' e '' si indica se si tratta di prima o di dopo l'arresto), ossia $\Delta' dt'$ e $\Delta'' dt''$, siano eguali ai prodotti $C' dT'$ e $C'' dT''$ delle capacità termiche totali del sistema con gli abbassamenti registrati nei tempi stessi

$$[4] \quad \Delta' dt' = C' dT'$$

$$[5] \quad \Delta'' dt'' = C'' dT''.$$

Ricavando ora le dispersioni cercate si ha:

$$\Delta' = \frac{C' dT'}{dt'} \quad \text{e} \quad \Delta'' = \frac{C'' dT''}{dt''}.$$

Le due ultime equazioni significano che le dispersioni cercate sono eguali al prodotto delle capacità termiche totali prima e dopo l'arresto con le rispettive velocità di raffreddamento.

Le capacità termiche totali del sistema si calcolano sommando le capacità parziali del crogiolo e della sostanza. È necessario quindi conoscere i calori specifici veri (c_w) della sostanza intorno alla temperatura di fusione.

Le velocità di raffreddamento vanno prese naturalmente subito prima e subito dopo l'arresto. A tale riguardo occorre però distinguere i due casi. Infatti, mentre nel tratto ab il raffreddamento è omogeneo e la curva regolare, nel tratto cd si ha una differenza di temperatura, tra il crogiolo e il forno, che va diminuendo continuamente, dato che tende a stabilirsi il dislivello normale.

In conseguenza di ciò il rapporto dT'/dt' è facile a calcolarsi con esattezza; invece questo non si può fare nel caso del rapporto dT''/dt'' dato che occorrerebbe poter considerare quel trattino del flesso immediatamente dopo la fine dell'arresto, dove la curva precipita essendo cessato lo sviluppo del calore di fusione. Essendo impossibile fare tale considerazione, si è girata la difficoltà con l'ipotesi che il rapporto cercato sia proporzionale allo stesso rapporto dT_2''/dt_2'' preso nel pezzo di curva seguente; ossia, alla misura della velocità di raffreddamento nell'istante successivo al termine dell'arresto si sostituisce la velocità di raffreddamento che si ha in un certo tempo, abbastanza esteso per permettere una misura precisa

$$[6] \quad \frac{dT''}{dt''} = K \frac{dT_2''}{dt_2''}$$

Sostituendo in definitiva i valori trovati per Δ' e Δ'' nelle [2] e [3] si ha la formula finale che ci dà λ :

$$[7] \quad \lambda = \frac{\tau}{g} \frac{C' \frac{dT'}{dt'} + C'' K \frac{dT_2''}{dt_2''}}{2}.$$

Tale equazione è indipendente da ogni condizione particolare di esperienza, e pertanto è teoricamente prevedibile e sperimentalmente constatato che essa rimane valida in ogni caso, anche variando i forni, i crogioli, la quantità dei metalli, ecc.

PARTE SPERIMENTALE.

La costante K che compare nella [6] è ormai l'unica incognita da determinare. Essa venne calcolata dalle curve di raffreddamento di metalli che avessero dei valori termici noti con sufficiente sicurezza. Essa risultò in media, seguendo certe regolarità che verranno dette appresso,

$$K = 1,94$$

Le regolarità seguite nel calcolo di K prima e dei calori di fusione poi sono le seguenti:

1° Come unità di tempo nel tracciare le curve di raffreddamento si è preso il quarto di minuto.

2° Il rapporto dT'/dt' si è calcolato dando a dt' il valore costante di 10 unità, corrispondenti a 2' e 30'', e rilevando il salto corrispondente di temperatura.

3° Il rapporto dT_2''/dt_2'' si è calcolato dando a dt_2'' il valore di 5 unità, eguale a 1' e 15'', cominciando la misura esattamente dopo la fine dell'arresto.

Le condizioni precedenti sono convenzionali ed hanno valore per il corrispondente valore di K ; variandole, il sistema non perde la sua validità, salvo che muta K .

Sono invece da rispettarsi, onde ottenere risultati soddisfacenti, le seguenti regole:

4° Il crogiolo deve essere riempito con la sostanza in esame (sino all'incirca mm. 1 dall'orlo) ad evitare che, data la piccola conducibilità della porcellana, il pezzo in più calcolato per C' e C'' , non alteri il reale valore di tali capacità totali.

5° L'ambiente in cui si raffredda il crogiolo deve essere abbastanza largo da assicurare un raffreddamento regolare e omogeneo e un'arresto rettilineo; in genere è sufficiente uno spazio tra forno e crogiolo di mm. 4-5.

Seguendo tali regolarità sono stati calcolati, a controllo della teoria, i calori di fusione di sostanze con dati abbastanza precisi. I risultati, raccolti nella acclusa tabella I, mostrano un buon accordo con i valori già noti.

Nella tabella anzidetta oltre alla temperatura di fusione, comprendente il campo tra 200° e 1000°, e ai calori di fusione trovati con la [7] e

quelli già noti, vengono riportati i dati di calcolo. Nell'ultima colonna è raccolta la bibliografia dei calori specifici impiegati per i vari metalli. Come calore specifico dei crogioli si sono presi i valori relativi alle diverse sostanze di cui questi erano costituiti; in genere tali valori per la porcellana, oscillano intorno a 0.2. La variazione che tale cifra può subire a temperature alte non dà una variazione eccessiva nei risultati totali del calcolo di λ .

TABELLA I.

N.	Metallo	T_f	λ trov.	λ noti	Dati di calcolo					
					gr. metal.	gr. crog.	τ	$\frac{dT'}{dx}$	$\frac{dT''}{dx''}$	c_w
1	Sn	232°	14,44	14,6-14,6-14,06-14,2	94,4	8,48	74	1,05	1,6	(3)
2	Bi	267°	13,46	13-12,84-12,64 12,4 12,4-12,24-10,24	95,2	6,12	63	1,7	3,7	(4)
3	Tl	302°	5,28	5,12-5,04 5,8 4,2-3,67- 7,2-7,4	169,3	8,515	34	1,5	2,7	(5)
4	Cd	321°	12,9	13,1-13,4-13,66-11,1- 10,81	74,8	6,585	41	2,0	2,9	(6)
5	Pb	327°	6,0	6,45-5,65-5,47-5,54- 5,5-5,37-5,37-5,32	101,8	6,305	30	1,9	3,1	(7)
6	Zn	420°	28,67	27,46-28,14 28,29 28- 27-26,6-29,86-28,4 24,6-24 23,42-22,6- 22,6-23,01	100,4	8,36	45	2,25	3,7	(8)
7	Sb	630°	39,4	39,8-38,4 40,75-24,2- 24,3	71	6,26	33	5,8	13	(9)
8	Ag	961°	24,15	24,7 26,01 20,37 21,07	84,8	6,58	11,2	14,3	17,4	(10)

Una volta determinata l'applicabilità del metodo, con le esperienze anzidette, si è passati ad applicarlo ad un primo gruppo di metalli aventi il calore di fusione incerto o del tutto sconosciuto. I metalli esaminati in questa prima parte sono i tre elementi delle terre rare La, Ce e Pr e in più l'Al.

Cerio, Lantanio e Praseodimio.

Nessun dato mi risulta attualmente esistere sopra i calori di fusione dei tre suddetti metalli. È noto solo qualitativamente, a coloro che hanno eseguite curve di fusione di questi elementi, che essi debbono avere un

basso valore di λ data la brevità degli arresti, che spesso si riducono a un flesso.

Questa stessa brevità, unita al altre ragioni che verranno appresso dette, è causa di una certa incertezza nel calcolo normale del calore di fusione.

I principali ostacoli che si incontrano nell'esatta valutazione di λ sono, nel caso delle tre terre rare, i seguenti:

1° Quantunque i tre elementi siano inizialmente allo stato di notevole purezza, nel corso della fusione essi attaccano sempre il crogiolo, dando luogo a siliciuri.

2° Le fusioni vanno fatte sotto KCl e NaCl; anche questa condizione può dar noia, essendo incerti i valori di c_w ad alta temperatura per questi sali.

3° I soli dati, sopra i calori specifici ad alta temperatura di La, Ce e Pr che si conoscano sono quelli di JAEGER (11) che risultano soltanto approssimati.

Per le ragioni anzidette, a differenza in genere da tutti gli altri casi, i valori di λ che vengono dati per le tre terre rare, potranno subire qualche piccola variazione quando si potranno eliminare le cause d'incertezza descritte.

I metalli impiegati per la determinazione dei calori di fusione erano tutti e tre notevolmente puri; in particolar modo il Cerio, gentilmente fornito dal prof. L. Mazza, che non conteneva oltre il 0,2 % di impurezze; negli altri due elementi il percento di impurezze era al massimo di circa 1.

I risultati delle determinazioni eseguite sono, per il Ce e il Pr:

TABELLA II.

Elemento	λ trovato	gr. elem.	gr. erog.	τ	$dT'/d\tau$	$dT''/d\tau''$
Ce	5,5	45	6,45	3	11	9,4
Pr	3,1	75	7,95	4	6,1	3,7

Per il La si può valutare un calore di fusione intorno a 5.

Alluminio.

Si ritenne interessante trovare anche il calore di fusione dell'alluminio dato che per tale elemento i dati attualmente noti nella bibliografia, benchè circa una ventina, sono estremamente disparati ed oscil-

lano tra 70-100. Questa strana variabilità di risultati è inspiegabile anche tenendo conto della diversa purezza del metallo impiegato.

L'alluminio da me usato era il prodotto Merck in lastra.

Dalle curve di raffreddamento eseguite tanto in forno Tamman come in forno a resistenza, si ottenne concordemente per λ il valore di 81.5. Confrontando tale valore con quelli della letteratura si rimarcava una buona concordanza con i risultati di ROOS (2) e di PIONCHON (12), nonché con quelli di UMINO.

I valori adottati per c_w sono quelli di WUST, MEUTHEN e DURRER (13).

Ringrazio sentitamente il prof. L. ROLLA e il prof. IANDELLI per l'interessamento dimostrato a questo lavoro.

BIBLIOGRAFIA

- (1) TAMMAN, « Z. f. Phys. Ch. », 85, 273.
- (2) ROOS, « Zeit. f. Anorg. Ch. », 94 (1916), 329.
- (3) IITAKA, 8 (1919), 99 « Sci. Rep. Tôhoku ».
- (4) WUST, MEUTHEN e DURRER, « Forschung sarb. Gebiete Ingenieurwesen », Heft 204 (1918), 42.
- (5) MILLS, « J. phys. Chem. », 24 (1917), 357; SEEKAMP, « Zeit. f. Anorg. Ch. », 195 (1931), 303.
- (6) WUST, MEUTHEN, DURRER, *id.*
- (7) KLINKHARDT, « Ann. Physik », 84 (1927), 167.
- (8) IITAKA, « Sci. Rep. Tôhoku » (1), 8 (1919), 99.
- (9) UMINO, « Science Rep. Tôhoku », 15 (1926), 597.
- (10) PIONCHON, *cfr. Trattato del Mellor*, vol. III, pag. 327.
- (11) JAEGER, « Proc. Acad. Sci. Amsterdam », 40. 481 (1937) e 39 (1936), 912.
- (12) PIONCHON, « C. r. », 115 (1892), 162.
- (13) WUST, MEUTHEN, DURRER, *id.*

Geologia. — *Sul Lias superiore di San Polo dei Cavalieri (Preappennino romano)* ⁽¹⁾. Nota di CARMELO MAXIA, presentata ⁽²⁾ da GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Da qualche tempo, per incarico avuto dal Comitato geologico del Consiglio Nazionale delle Ricerche, ho intrapreso studi geologici sul territorio montuoso di Tivoli, di San Polo dei Cavalieri e di Marcellina, compreso nelle tavolette dell'I. G. M. di Palombara Sabina e di Vicovaro (foglio n. 144) e in quelle di Tivoli e di Castelmadama (foglio n. 150).

Più precisamente la regione che forma l'oggetto delle mie ricerche costituisce l'estrema appendice sudoccidentale dei Monti Sabini, che è anche conosciuta con il nome di Monti Lucretili o Lucani ⁽³⁾ ⁽⁴⁾.

Questo settore del Preappennino romano, il cui rilievo più elevato è il Monte Zappi o Gennaro (m. 1271), è prevalentemente costituito di calcari giurassici, i quali degradano verso sud e sud-est, nella valle dell'Aniene, attraverso quattro distinte superfici orizzontali, poste rispettivamente intorno ai m. 1200 (Monte Gennaro-Monte Guardia), sugli 800-1000 metri (Monte Arcaro-Monte Morra), sui 600-650 metri (Colle Lecinone-Colle Piano-Colle Lucco), sui 350-450 metri (Monte Catillo-Colle Vescovo), mentre scendono piuttosto rapidamente verso ovest nell'ampia valle di Marcellina.

In via preliminare dò notizia in questa Nota dei risultati stratigrafico-paleontologici riguardanti il Lias superiore tra San Polo dei Cavalieri e la Fontana Longarino, i cui fossili non mi risulta siano stati ancora segnalati.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto geo-paleontologico dell'Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

⁽³⁾ ABBATE E., *Guida della provincia di Roma*, 2 vol., Roma, 1894.

⁽⁴⁾ Verso nord si fa rientrare nel gruppo dei Monti Lucretili il Monte Zappi; ad ovest il limite è dato dalla valle di Marcellina; a sud è bene marcato dalla valle dell'Aniene; più incerti sono i confini orientali, che potrebbero coincidere con la valle della Licenza.

* * *

Alle conclusioni a cui mi hanno condotto gli studi di campagna e di laboratorio faccio precedere sommarie notizie sulla letteratura geologica dei Monti Lucretili, i quali, nonostante la loro vicinanza alla Capitale, sono rimasti uno dei settori del Lazio meno studiati: ciò che si deve principalmente alla scarsità dei fossili che vi si trovano.

Le conoscenze stratigrafiche sui terreni mesozoici di questa regione si può dire si siano arrestate a quelle indicate dal rilevamento eseguito nel periodo 1879-83 da P. ZEZI, L. BALDACCI, E. CORTESE, E. PERRONE e P. MODERNI dei fogli n. 144 (Palombara Sabina) e n. 150 (Roma) della Carta d'Italia al 100.000, edita dal R. Ufficio geologico e alle Note di CANAVARI ⁽¹⁾ e CORTESE ⁽²⁾, del 1878-81, che tengono conto anche dei cenni fatti dal GIORDANO ⁽³⁾ e dal MANTOVANI ⁽⁴⁾. Due Note di CLERICI ⁽⁵⁾ e VERRI ⁽⁶⁾, del 1907, che confermano i risultati delle ricerche fatte da CANAVARI e CORTESE a nord di Tivoli, sono importanti anche per la segnalazione di fossili che verranno elencati più avanti. Nella *Guida della provincia di Roma* dell'ABATE ⁽⁷⁾, del 1894, vengono pure riportate notizie geo-paleontologiche riguardanti questa regione, basate principalmente sugli scritti degli autori sopracitati.

Per la regione posta immediatamente a N dei Monti Lucretili si ha un recente studio di U. LOSACCO ⁽⁸⁾, nel quale viene segnalato il Lias superiore in alcuni punti più meridionali delle tavolette di Orvinio e di Montelibretti, tra Montefalco e il Colle le Mollie, stabilito per la presenza

⁽¹⁾ CANAVARI M., *Di alcuni ammoniti del Lias superiore raccolti nelle vicinanze di S. Antonio, nel gruppo montano di Tivoli.* « Atti Soc. tosc. sc. nat. Proc. verb. », I, pag. 109, Pisa, 1878-79.

⁽²⁾ CANAVARI M. e CORTESE E., *Sui terreni secondari dei dintorni di Tivoli.* « Boll. R. Com. geol. d'It. », XII, Roma, 1881.

⁽³⁾ GIORDANO F., *Cenni sulle condizioni fisico-economiche di Roma.* Firenze, Tip. Civelli, 1871.

⁽⁴⁾ MANTOVANI P., *Descrizione geologica della Campagna romana.* Torino, 1874.

⁽⁵⁾ CLERICI E., *Ricerche microscopiche sui calcari liassici di Tivoli.* « Boll. Soc. geol. it. », XXVI, Roma, 1907.

⁽⁶⁾ CLERICI E. e VERRI A., *Escursione a Tivoli.* « Boll. Soc. geol. it. », XXVI, Roma, 1907 (pag. xxxiv).

⁽⁷⁾ Vedi nota ⁽³⁾, pag. 1.

⁽⁸⁾ LOSACCO U., *Un nuovo genere aaleniano di Aviculidae della Sabina.* « Riv. it. di paleont. », XLVIII, Milano, 1942.

di fossili aaleniani (*Fimbriltocheras lineatum* SCHLT. e *Fimbr. lineatum opalinum* QUENST.) e contenente anche il nuovo genere e nuova specie *Posidonotis Dainellii* LOSACCO.

Per i dintorni di Tivoli e di San Polo dei Cavalieri, fra quelli sopra-indicati, il lavoro più importante è rappresentato dalla Nota di CANAVARI e CORTESE, dove la serie stratigrafica, dei terreni mesozoici dei monti a nord di Tivoli, è basata, oltre che sui caratteri litologici (specialmente in rapporto alle analoghe formazioni dell'Appennino centrale), anche sulla presenza di fossili dei tre principali piani del Lias.

Nella serie proposta da questi autori, osservata tra il Monte Sterparo e il Colle Monitola (a nord-est di Tivoli), vengono distinti i seguenti orizzonti litologici e stratigrafici, così ripartiti e aggruppati dal più recente a quello più antico:

		calcare marnoso dal caratteristico colore giallo smorto, con frequenti vene calcitiche (ad est e a nord-est di Tivoli); calcari omogenei, compatti, a frattura concoide o scagliosa (cime di monte Catillo, di colle Vescovo, ecc.), talora contenenti lenti di selce di aspetto oolitico (Monte Rampino) o grossi rognoni di selce (cascate di Tivoli);
TITONICO		

Le località fossilifere e le specie liasiche fossili indicate da CANAVARI e CORTESE e da CLERICI e VERRI, sono le seguenti:

1. *S. Antonio*, poche centinaia di metri a nord di Tivoli, sulla destra dell'Aniene. Nei calcari marnosi, grigi o giallastri della parte superiore del Lias medio: *Terebratula* cfr. *spheroidalis* MGH., *Phylloceras tenuistriatum* MGH., *Lytoceras* sp., *Aegoceras Dacoei* SOW., *Harpoceras radians* REIN., *Harp.* cfr. *Levesquei* D'ORB., *Harp. boscense* REIN., *Stephanoceras Mortilleti* MGH., *Coeloceras crassum* Y. e B., *Rhynchoteuthis liasina* ZITTEL, *Aulacoceras orthoceropsis* MGH., *Belemnites elongatus* MILL. (CANAVARI e CORTESE); inoltre: *Koninckella fornicata* CAN, *Terebratula Renieri* CAT., *Millericrinus Hausmanni* ROEM., *Pentacrinus jurensis* QUENST., *Pent. pentagonalis* GOLDF., *Rhacophyllites libertus* GEMM., *Rhac. erimius* HAUER ?, *Phylloceras Nilssoni* HÉB. (CLERICI e VERRI).

2. *Casale S. Angelo*, a nord-est di Tivoli. Nelle marne argillose, grigiastre o giallastre, friabili, associate ai calcari marnosi rossi, a Fucoidi, della parte superiore del Lias superiore: *Phylloceras Nilssoni* HÉB., *Phyll. Capitani* CAT. ?, *Harpoceras discoides* ZIET., *Harp.* cfr. *falcifer* SOW., *Stephanoceras* cfr. *subarmatus* Y. e B., *Aptychus* sp., *Fucoides* sp. ind. (CANAVARI e CORTESE) e, poco a nord della stessa località, nel calcare eeroide compatto della parte superiore del Lias medio: *Cidaris Terrenzii* PAR., *Atractites italicus* MICH. (= *Aulacoceras orthoceropsis* MGH.) (CLERICI e VERRI).

3. *Monte Rampino*, a circa metà strada fra Tivoli e San Polo dei Cavalieri. Nei calcari marnosi rosso scuri, grossolani, della parte inferiore del Lias superiore: *Terebratula cerasulum* ZITTEL (CANAVARI e CORTESE), inoltre: *Rhacophyllites lariensis* MGH. (CLERICI).

4. Tra *Monte Rampino* e *Colle Lucco*, in punti imprecisati, nei calcari marnosi, grigiastri o giallastri, della parte superiore del Lias medio: *Terebratula Renieri* CAT., *Pentacrinus jurensis* QUENST. (CANAVARI e CORTESE).

5. Tra *Monte Rampino* e *Colle Lecinone*, in punti imprecisati, nei calcari marnosi a Fucoidi del Lias superiore: *Posidonomya Bronni* GOLDF. (CLERICI e VERRI).

6. *Vallone dell'Obaco*, a nord di Tivoli, in alcuni punti dell'alta e media valle. Nei calcari cristallini passanti a calcari marnosi della parte inferiore del Lias medio: *Pentacrinus moniliformis* MUNST., *Pent. pentagonalis* GOLDF., *Pent. jurensis* QUENST., aculei di Echinidi

(CANAVARI e CORTESE); presso la Fontana vecchia, nel calcare marnoso colore cenere, del Lias superiore: *Posidonomya Bronni* GOLDF., un piccolo *Pecten*, *Aptychus lamellosus* (CLERICI e VERRI); presso la Sorgente Bologna, nei calcari rossicci con Fucoidi del Lias superiore: *Lima* (*Plagiostoma*) sp., *Rhacophyllites lariensis* MGH. (CLERICI e VERRI) e, nei calcari a Crinoidi del Lias medio: *Cidaris Terrenzii* PAR. (CLERICI e VERRI).

7. Tra *San Polo dei Cavalieri* e *Colle Pietro*, in punti imprecisati, nelle lenti di calcari marnosi, grigiastri, associati ai calcari rosso scuri marnosi, grossolani, con macchie verdastre, della parte inferiore del Lias superiore: *Hammatoceras insigne* SCHÜBL., *Stephanoceras* aff. *annulatum* SOW. (CANAVARI e CORTESE).

Come risulta dalla precedente esposizione le località fossilifere più importanti finora note dei Monti Lucretili sono situate nelle vicinanze di Tivoli. Le specie fossili indicate, ma non ancora illustrate, in tutto una trentina, distribuite tra il Lias medio e il Lias superiore, sono prevalentemente localizzate a S. Antonio, con 20 specie, in massima parte tipiche del Domeriano, con qualche forma toarciana e aaleniana e a Casale S. Angelo, con 8 specie, in gran parte toarciane e qualche forma domeriana.

Nei Monti Lucretili i giacimenti fossiliferi più settentrionali si trovano ad ovest di San Polo dei Cavalieri, dove sono state indicate alcune ammoniti toarciane, mentre non si ha nessuna traccia di segnalazione di località fossilifere a nord di quest'abitato, dove è appunto situata la Fontana Longarino.

Dai Monti Lucretili e Cornicolani provengono anche numerosi esemplari di fossili, specialmente di Cefalopodi liasici, che si trovano conservati nel Museo paleontologico dell'Università romana, dei quali ho quasi ultimata la revisione, che verrà pubblicata, unitamente alla illustrazione dei fossili da me raccolti nella stessa regione. Tra gli esemplari ripresi in studio, quelli più numerosi provengono dai Monti Cornicolani, specialmente dalla località « il Notaro » e appartengono quasi tutti alla collezione PONZI, ad eccezione di qualche aptico raccolto dall'abate RUSCONI.

Pochissimi sono invece gli esemplari fossili che provengono dai Monti di San Polo dei Cavalieri e soltanto per uno di essi, un *Hammatoceras Meneghinii* Bon., raccolto da G. DE ANGELIS D'OSSAT, si legge in schedis la notazione « Fontana Longarino ».

Per quante altre ricerche abbia fatte nell'abbondante letteratura geologica laziale non mi risulta che i fossili di Fontana Longarino siano stati mai segnalati. Questa località è però distinta sulla carta geologica ufficiale con il colore del Lias superiore e aveva già fornito alcuni fossili al Canonico di San Polo dei Cavalieri, Mons. ANGELO METTICI, il quale mi

ha anche accompagnato gentilmente in una escursione al detto giacimento.

Durante le escursioni da me fatte a Fontana Longarino ho potuto raccogliere circa una sessantina di esemplari di ammoniti e qualche aptico, rappresentanti una ventina di specie, ormai quasi tutte determinate.

* * *

La Fontana Longarino trovasi a poco meno di due chilometri a nord nord-est di San Polo dei Cavalieri, a circa 700 metri sul livello del mare, alla sommità di una valle appiattita compresa tra il Monte Arcaro (944 m.) e la q. 832.

L'affioramento liasico di questa località è inciso dalle acque raccolte dal fosso Peschiogrosso, che scende verso ovest, in un alveo profondamente incassato, nella valle plio-pleistocenica di Marcellina.

La formazione in parola è costituita da straterelli di calcari marnosi, rossicci, a macchie giallastre o verdastre, a tessitura compatta, scistosa o fogliettata oppure grossolana, nodulosa, ai quali sono associati o intercalati straterelli e lenti di calcari marnosi grigiastri, talora verdastri, piuttosto induriti, compatti o brecciati, più sviluppati nella parte superiore. Gli strati marnosi hanno direzione predominante nord-est sud-ovest e pendenza di circa 60°-70° verso nord-ovest.

Specialmente i calcari marnosi rossi, per azione degli agenti esogeni, sono fortemente disfatti in superficie e trasformati in una coltre di terriccio grossolano, nerastro.

I calcari marnosi di Fontana Longarino si immergono verso nord-ovest sotto una potente pila di calcari ceroidi, di colore giallo miele, contenenti abbondanti filettature calcitiche, dai quali sono separati da strati discontinui costituiti di una vera brecciola calcarea. Questa formazione, per i suoi caratteri litologici del tutto simili a quelli ben noti del Neocomiano, è specialmente sviluppata negli arrotondati dossi e nell'ampia cima di Monte Arcaro.

Presso la Fontana Longarino, nei calcari marnosi rossi, sono relativamente abbondanti i modelli di ammoniti, i quali, però, sono in generale male conservati; mentre nel calcare marnoso più duro questi fossili sono di solito conservati allo stato di impronte oppure di modelli difficilmente separabili dalla roccia.

Per la facile disagregabilità a cui vanno incontro i calcari marnosi varicolori, numerosi esemplari di ammoniti si possono raccogliere, specialmente dopo le piogge, pochi metri a monte della sorgente, lungo una piccola incisione torrentizia.

I calcari marnosi varicolori del Lias superiore si seguono, salvo rare interruzioni, fino a poche centinaia di metri a nord dell'abitato di

San Polo dei Cavalieri, dove passano, inferiormente, al Lias medio, che è qui rappresentato da calcari marnosi, bianchicci o grigiastri, duri, qualche volta di aspetto ceroidi, ma generalmente a grana fina, con intercalazioni di straterelli di selce di colore rosa di 2-5 centimetri di potenza. Presso l'abitato questi calcari, si presentano in strati di 15-20 centimetri di potenza, molto pieghettati e minutamente fratturati, con abbondanti litoclasti normali ai piani di stratificazione, riempite di calcite. La loro direzione si conserva in generale da est nord-est a quella nord-est.

A partire da San Polo dei Cavalieri e andando verso la Fontana Longarino, i calcari varicolori ammonitici del Lias superiore si incontrano abbastanza frequentemente, lungo la mulattiera, in vari punti che non sono indicati sulla carta geologica.

Il primo affioramento si trova poche centinaia di metri a nord del villaggio, nel fianco ripido del primo tratto est-ovest della mulattiera, prima di giungere alla q. 696, dove ho potuto raccogliere anche alcune ammoniti, fra le quali qualche *Lytoceras*.

I calcari marnosi del Lias superiore riaffiorano, con direzione circa est-ovest e con pendenza di 45° a sud, poco prima di giungere alla q. 723, a circa 70 metri dopo il bivio. Sul fianco destro (sud) della mulattiera, nelle testate degli strati, aventi una potenza complessiva di 3-6 metri, si possono raccogliere grossi ammoniti, difficilmente specificabili per il loro cattivo stato di conservazione. In questo stesso punto i calcari marnosi rossi sono alternati a straterelli marnosi verdicci, compatti e duri o fogliettati, più sviluppati inferiormente.

* * *

Riporto ora l'elenco delle specie provenienti da Fontana Longarino, da me raccolte e determinate:

1 - <i>Phylloceras heterophyllum</i> Sow.	Lias superiore
2 - » <i>Doederleinianum</i> CAT.	» »
3 - » <i>Capitanioi</i> CAT.	» »
4 - » <i>Nilssoni</i> HÉB.	» »
5 - <i>Lytoceras velifer</i> MGH.	Toarciano
6 - » <i>cornucopia</i> Y. e B.	»
7 - <i>Hammatoceras Meneghini</i> BON.	Toarciano superiore
8 - » <i>costulosus</i> MERLA	» »
9 - <i>Denckmannia erbaensis</i> HAUER	» »
10 - <i>Phymatoceras pulcher</i> MERLA	» »
11 - <i>Mercaticeras Mercati</i> HAUER	Toarciano inferiore
12 - » <i>hellenicum</i> RENZ	» »

13 - <i>Hildoceras sublerisoni</i> FUC., var. <i>ravicostata</i> MITZ.	Toarciano
14 - <i>Hildoceras semipolitum</i> BUCK	Toarciano superiore
15 - <i>Harpoceras subplanatum</i> OPP.	" "
16 - <i>Coeloceras (Dactyloceras) Ghinii</i> MITZ.	Toarciano

Per una più dettagliata ripartizione in zone del giacimento ammonitifero di Fontana Longarino si può seguire la scala cronologica proposta dal BUCKMAN ⁽¹⁾ e adottata dal MERLA ⁽²⁾ nello studio delle ammoniti dell'Appennino centrale, riportata nel seguente specchietto, e che, nelle linee generali, concorda con quella stabilita dal BONARELLI ⁽³⁾ fin dal 1893:

TOARCIANO SUPERIORE (<i>jurensis</i> -zona) (<i>pars</i>) .	$\left\{ \begin{array}{l} \textit{rudis}$ -zona $\textit{Lilliae}$ sp.-zona
TOARCIANO INFERIORE (<i>falciferum</i> -zona) . . .	$\left\{ \begin{array}{l} \textit{bifrons (Mercati)}$ -zona $\textit{serpentinum}$ -zona

Delle sedici specie di ammoniti di Fontana Longarino due di esse: *Mercaticeras Mercati* HAUER e *Merc. hellenicum* RENZ, caratterizzano la parte superiore del Toarciano inferiore (*bifrons (Mercati)*-zona), mentre le seguenti tre specie: *Denckmannia erbaensis* HAUER, *Phymatoceras pulcher* MERLA e *Hildoceras semipolitum* BUCK. sono esclusive della parte inferiore del Toarciano superiore (*Lilliae*-sp. zona).

Delle rimanenti specie, la maggior parte di esse sono forme che hanno vissuto durante tutto il Toarciano, prevalentemente nei livelli inferiori e medi del Toarciano superiore (*jurensis*-zona), mentre i *phylloceras* da me determinati si trovano in tutto il Lias superiore, specialmente nel Toarciano.

L'assenza di forme caratteristiche delle rimanenti zone toarciane, specialmente di quella basale (*serpentinum*-zona) non autorizza però, anche per il ristretto numero dei fossili-guida da me posseduto, a una distinzione paleontologica molto sottile. È tuttavia probabile che, data la limitata potenza dei calcari marnosi di Fontana Longarino, immediatamente coperti, con l'intermediario di una brecciola calcarea trasgressiva, dai calcari attribuibili al Neocomiano siano assenti, nella detta località, la parte superiore e media del Toarciano, a cominciare dai livelli più

⁽¹⁾ BUCKMAN S., *Inferior Oolite Ammonites*. P. X, pag. VI, « Pal. Soc. », 1898.

⁽²⁾ MERLA G., *Ammoniti giuresi dell'Appennino centrale. I: Hildoceratidae*. « Pal. it. », XXXIII, pag. 4, 1932.

⁽³⁾ BONARELLI G., *Osservazioni sul Toarciano e l'Aleniano dell'Appennino centrale*. « Boll. Com. geol. d'Ital'a », XXII, Roma, 1893.

elevati della *jurensis*-zona (cioè della *rudis*-zona, nel significato del BUCKMAN e del MERLA).

Si può quindi concludere che le ammoniti di Fontana Longarino rappresentino il Toarciano, il quale si potrebbe dividere in due livelli paleontologici: uno, inferiore, corrispondente alla *bifrons*-zona; l'altro, superiore, alla *Lilliae* sp.-zona; mentre non pare sia possibile una distinzione stratigrafico-litologica, poichè i calcari marnosi varicolori del Toarciano sono eteropici fra di loro.

È sperabile che lo studio già molto avanzato dei fossili dei monti di San Polo dei Cavalieri e della restante parte dei Monti Lucretili possa permettere una datazione più dettagliata del Lias superiore di tutta la regione da me presa in esame.

COMMEMORAZIONE DI CAMILLO GOLGI (1843-1926)

Tenuta ⁽¹⁾ dall'Accademico PIETRO RONDONI

È grandemente opportuno che l'Accademia d'Italia, il più alto Consesso culturale dell'Italia d'oggi, ricordi nel centenario della nascita (Corteno, provincia di Brescia, 1843) quel grande biologo che fu CAMILLO GOLGI; forse non è altrettanto giusto che il commemorante sia io, che non fui suo allievo e nessuna dimestichezza ebbi con Lui, se anche fino dai primi giorni della iscrizione come studente nella Facoltà di medicina io, come tutti quelli che si avviano per tale genere di studi, appresi a venerare il suo nome, legato a fondamentali osservazioni in alcuni importantissimi campi del sapere medico-biologico. Tuttavia la commemorazione di uno scienziato, fatta da un estraneo alla sua scuola ed alla sua vita privata e di laboratorio, guadagna forse in obiettività ciò che perde in tono affettuoso ed in aneddotica personale, è atta quindi a mettere in luce più i valori intellettuali anziché i tratti caratterologici e quindi piuttosto eleva, disumanizzandola in parte, la figura di un grande artefice del pensiero.

GOLGI proveniva da modesta famiglia artigiana: oggi che sono in onore gli studi genealogici a scopo di indagine biologica sarà utile ricordare che il nonno paterno, MICHELE GOLGI, cappellaio, ebbe 8 figli, di cui l'ultimo, Alessandro, nacque a Pavia nel 1814 e, dotato di buon ingegno, studiò ivi medicina e si recò poi in condotta nel suddetto paese del Bresciano, ove gli nacque il figlio Camillo. Da notare, per eventuali considerazioni di genetica umana, che la moglie del medico condotto e madre del Nostro era figlia di un CAMILLO GOLGI, falegname, ed era cugina del marito. Così il Nostro proviene (pare come terzo di quattro figli) da un matrimonio fra consanguinei, a prova che tale endogamia, se pericolosa nei casi in cui nel comune ceppo familiare esistono tare ereditarie (mutazioni a carattere recessivo), non ha di per sé una influenza fatalmente dannosa sulla discendenza, che può contenere uomini di genio e

(1) Nell'Adunanza del 4 giugno 1943.

di lunga e vigorosa vitalità come fu CAMILLO GOLGI. Questi si laureò a Pavia nel 1865 con una dissertazione di laurea sulle cause somatiche delle malattie mentali, nella quale (pubblicata nel 1869) analizzava con acume e precisione i fattori eziologici delle psicosi, mettendo in particolare luce quelli organici. Dal 1865 al 1872 fu assistente nell'Ospedale di S. Matteo in Pavia, frequentando contemporaneamente il modestissimo Istituto di patologia generale dell'Università sotto la guida di due Maestri degni di essere ricordati: uno fu PAOLO MANTEGAZZA, la cui opera precorritrice e brillante nello studio dei trapianti di organi era con fervida ammirazione ricordata da GOLGI anche nei suoi tardi anni (così in un discorso all'Istituto Lombardo del 1919), quel MANTEGAZZA che poi si dette alla antropologia ed etnografia ed acquistò larga fama come elegante volgarizzatore e scrittore; l'altro fu GIULIO BIZZOZERO (di cui doveva poi sposare una nipote), patologo eminente, autore di ricerche fondamentali di ematologia, morto in ancor giovane età. Sono di questi anni uno studio sugli *psammomi*, tumori che GOLGI descrive con criteri ancor oggi utilizzabili (1869), uno sui linfatici cerebrali, nel quale precisa il comportamento delle guaine avventiziali, ed uno sulla fine struttura della nevroglia, di cui ben riconosce la funzione non solo meccanica e di sostegno ma anche trofica per i centri nervosi. Nel 1872 egli, sospinto da umili ma imperiose esigenze economiche, lasciò Pavia e l'Istituto di patologia generale per coprire un posto di primario in un Ospizio di cronici ad Abbiategrasso: ormai innamorato della ricerca, egli sistema come laboratorio la cucinetta del modesto alloggio assegnatogli nell'Ospizio e qui si mette a studiare con minuziosa pazienza quell'apparato organico così complesso e misterioso, che lo aveva interessato profondamente fino dai suoi primi passi in quella scienza allora in rapida evoluzione che era la istologia: il sistema nervoso. Qui nel 1873 nacque la *reazione nera*, frutto in fondo non di precise nozioni chimiche (ancor oggi incomplete in questo argomento) ma di un intelligente empirismo istologico, guidato da un acuto spirito di osservazione e sorretto da una tenacia eroica. Facciamo una breve parentesi: GOLGI trovò ed applicò la reazione nera che permise a Lui e a tanti altri di chiarire moltissime questioni di anatomia del sistema nervoso, lavorando in una povera cucina: CLAUDE BERNARD, grande fisiologo, lavorava in un sottoscala; PASTEUR in un granaio od in una soffitta; e cento altri fondatori delle nostre scienze hanno fatto scoperte in ambienti e con mezzi modestissimi. Ciò non deve però servire di pretesto per limitare, *oggi*, i mezzi di ricerca; perchè la ricerca è negli ultimi 50-60 anni immensamente progredita, quello che è facilmente indagabile con mezzi semplici è ormai largamente chiarito ed i nuovi e sempre più vasti e complessi problemi richiedono sempre più complicate attrezzature strumentali e sempre più perfetta organizzazione di laboratori. Sarebbe oggi impossibile fare nuove scoperte sulla

fine struttura del sistema nervoso col primitivo microscopio e coi pochi reattivi di GOLGI, come far progredire l'astronomia col canocchiale di GALILEO o la chimica coi fornelli e le storte di LAVOISIER. Quindi i facili critici e gli avari amministratori della scienza moderna non prendano a comodo pretesto la miseria dei Grandi del passato, cui la natura poteva rivelare i suoi segreti per vie sempre ardue e nuove ma più dirette, mentre oggi, dissodato largamente il terreno, si deve scavare in profondità e l'acume dell'artefice esige una sempre più difficile e costosa integrazione di mezzi materiali. Proprio i lavori fatti ad Abbiategrasso, se anche non del tutto compresi nella loro portata, davano al GOLGI una chiara fama di istologo, per cui egli nel 1875 veniva chiamato a Pavia come professore straordinario di istologia e nel 1876 vinceva il concorso per la cattedra di anatomia a Siena eppoi a Torino; ma la Facoltà pavese non voleva perdere il giovane e valoroso professore e così gli offriva l'ordinariato di istologia. Nel 1876 il GOLGI assumeva anche l'incarico dell'insegnamento della patologia generale; e nel 1881 passava a coprire questa cattedra come ordinario, mantenendo però l'incarico della istologia. Nella vecchia e gloriosa Università pavese il GOLGI restò fino al termine legale della attività di insegnante (1918): il suo laboratorio, prima consistente in uno stanzone presso l'Orto botanico, poi sistemato decorosamente e via via arricchito di mezzi di ricerca, diventò il più importante vivaio di studiosi e di professori per alcuni decenni: di lì sortirono valorosissimi allievi, dei quali ricordo qui solo GIOVANBATTISTA GRASSI (che fu il primo in ordine cronologico), grande nome legato alla scoperta della eziologia della malaria, ed ADELCHI NEGRI, che occupa una posizione centrale nella dottrina dei virus filtrabili colla scoperta degli inclusi cellulari nella rabbia, che di Lui portano il nome (*corpi di Negri*).

Ma veniamo ad un breve commento dell'opera personale del GOLGI e cominciamo dalla *reazione nera* già ricordata: essa consiste nel trattamento prolungato dei pezzi con bicromato di potassio, seguito da passaggio in una soluzione di nitrato di argento; la reazione è poi stata variamente modificata dal GOLGI stesso e da altri, comunque permette di vedere singole cellule o gruppi di cellule nervose per intero, con tutti i loro prolungamenti seguibili anche a grande distanza, fortemente e massivamente impregnate in nero. Il metodo del GOLGI, da lui stesso per primo applicato allo studio della corteccia cerebrale, del cervelletto, dei bulbi olfattori, ha rivoluzionato lo studio del sistema nervoso centrale; ed insieme col metodo di NISSL per i corpi cellulari, con quello di WEIGERT per le guaine mieliniche e col metodo detto fotografico di RAMON Y CAJAL ha costituito la base per le nostre odierne conoscenze sulla struttura e distribuzione dei centri nonchè sul decorso delle vie nervose. Infatti, mentre altri metodi vecchi e nuovi permettono di riconoscere molti più particolari interni nelle cellule nervose (basta pensare a tutti quelli

neurofibrillari, di BETHE, DONAGGIO, BIELSCHOWSKY, ecc.), nessuno assolutamente consente una visione completa dell'elemento cellulare in tutta la sua estensione; quindi *nessuno* si presta così bene per lo studio dei rapporti delle cellule nervose fra di loro. GOLGI distinse notoriamente due tipi di cellule nervose, appoggiandosi proprio alle risorse del suo metodo: cellule del I tipo, con prolungamento nervoso che si porta lontano, diventando il cilindrasse di una fibra di moto e altresì fornendo collaterali; e cellule del II tipo, il cui cilindrasse si suddivide nel territorio circostante e che forse (ma qui GOLGI fu con ragione molto riservato) hanno funzione di senso: oggi si pensano soprattutto come elementi associativi, il che in fondo risulta anche dalle molto prudenti conclusioni del Nostro. Si riconnette qui la grossa questione, da GOLGI sollevata, della *rete nervosa diffusa*, in contrapposizione alla dottrina del *neurone*, prima formulata da WALDEYER eppoi diventata guida e fondamento del pensiero neurologico. GOLGI ha ammesso che le collaterali del prolungamento nervoso delle cellule del I tipo, le arborizzazioni del prolungamento nervoso di quelle del II tipo, ramificazioni terminali o collaterali di fibre nervose afferenti ed efferenti costituiscano un finissimo intreccio, che stabilisce una vera solidarietà funzionale fra molte cellule nervose. Pur ammettendo che a queste vanno attribuite le funzioni specifiche dei centri nervosi, ritiene probabile che questa diffusissima, delicata e fitta rete interstiziale partecipi pure alle più delicate funzioni. In fondo GOLGI ha precorso concezioni svolte da APATHY nelle classiche ricerche sul sistema nervoso degli irudinei (ma proprio su questi animali vertono le ricerche di GIULIO ASCOLI, svolte sotto GOLGI e da questo largamente valutate a pro' delle sue concezioni) e le ricerche di BETHE, che più o meno fanno risaltare la continuità dei sistemi fibrillari entro e fuori delle cellule, ammettono, almeno negli invertebrati, una rete diffusa (detta *Punksubstanz* o *neuropilo*) nei gangli e tendono, andando ben oltre il pensiero equilibrato del Nostro, a svalutare il significato delle cellule. C'è un contrasto così netto fra la concezione di GOLGI, così bene difesa anche in base ad osservazioni personali più recenti da un eminente allievo, il PENSA, e quella teoria del neurone, che fornisce, bisogna riconoscerlo, lo schema fondamentale oggi al ragionamento dei clinici e fino ad un certo punto anche dei fisiologi? Un valoroso neurologo sottratto prematuramente dalla morte alla scienza italiana, OTTORINO ROSSI, dice giustamente che la prima parte della teoria del neurone, che considera la unità fondamentale della cellula coi suoi prolungamenti e sostiene la polarizzazione dinamica di questi di fronte allo stimolo, è largamente accettata ed ha sicuramente avuto grande valore euristico; la seconda parte invece, che tende a riconoscere solo rapporti di *contiguità* fra le unità neuroniche e nega ogni continuità, è tutt'altro che confermata e, come nota anche PENSA, presenta punti in contraddizione con alcune

ben precise osservazioni di GOLGI e di altri dopo di lui: ed è qui che ancor oggi merita ogni attenzione la acuta, solida, pacata critica di GOLGI, che non voleva ad esempio riconoscere le *placas del alma* (placche dell'anima) del suo grande collega spagnolo, RAMON Y CAJAL, per stabilire i contatti, puri contatti senza trapasso di sostanza, fra arborizzazioni terminali di fibre e corpi cellulari. Del resto GOLGI è stato anche qui molto prudente: quando parlava di rete centrale diffusa non asseriva la vera e costante anastomosi fra le fibrille; e non era alieno da ammettere anche un semplice intreccio con contatti fra le fibrille permettenti per così dire il salto degli stimoli nervosi in vari sensi da una fibrilla all'altra. Oggi queste questioni si sono complicate per le nuove osservazioni su base fisiologica e biochimica, oltre che finemente istologica. Si è imparato a conoscere la rete nervosa diffusa di diversi visceri, veri sistemi locali autonomi a struttura sinciziale, e così a distinguere due tipi di tessuti nervosi: quelli a struttura neuronica e quelli a struttura reticolo-sinciziale, che possono anche chiamarsi rispettivamente sistemi *sinaptici* e sistemi *asinaptici*, di cui i secondi offrono trasmissione dello stimolo in tutti i sensi, come ammetteva GOLGI per la sua rete diffusa. Certamente nei centri del neurasse vediamo oggi a prevalenza dei sistemi sinaptici, ma il concetto di sinapsi non implica una discontinuità vera e propria, bensì dei contatti attraverso un materiale interposto, la cui polarizzazione può variare secondo gli stati funzionali. Avvenga la trasmissione interneuronica centrale dello stimolo ad opera di *mediatori chimici* a tipo di acetilcolina oppure in virtù di potenziali di azione, una qualche controllata continuità risulta e fa pensare ad un lavoro per così dire cooperativo dei neuroni, alla attività nervosa come qualche cosa di superneuronico e, anche per funzioni molto semplici, più o meno plurineuronico.

L'unità anatomica e la sinergia funzionale del sistema nervoso venivano da GOLGI sostenute contro una eccessiva tendenza localizzatrice che dominava 50-60 anni fa ed era a sua volta una reazione alle idee solidaristiche e antilocalizzatrici di FLUORENS e del GOLTZ. Come in tanti altri campi, gli studiosi hanno seguito anche qui idee diverse ed opposte, tesi ed antitesi si sono battute in una dialettica Hegeliana per ricomporsi in una sintesi più o meno comprensiva. GOLGI, che rivendica energicamente la priorità del nostro BARTOLOMEO PANIZZA (contro FRITSCH e HIRTZIG) nella scoperta delle localizzazioni cerebrali, fu in mezzo a queste dispute e probabilmente col suo profondo spirito di osservazione vide più chiaro e meglio di tutti, riconoscendo il vero significato dei *centri nervosi* di moto e di senso, come di zone la cui lesione produce con più frequenza e precisione disturbi determinati, come di punti focali in prevalente comunicazione - ma non esclusiva - con certi apparecchi periferici, come di porta di accesso di stimoli destinati ad irradiarsi largamente su larghi complessi cellulari o di egresso di stimoli che da larghi complessi

provengono, per modo che può dirsi che il processo più elementare (movimento, sensazione, ecc.) implica la messa in funzione di larghe pleiadi cellulari e forse di ampie zone di quel reticolo diffuso che domina attraverso alle sinapsi le correnti nervose, le blocca o le avvia in un senso o nell'altro.

Il GOLGI in quegli anni fecondi analizzava anche la struttura dei nervi periferici e delle fibre nervose e scopriva quelle strutture di sostegno che si conoscono col nome di *imbuto di GOLGI*. Si deve a Lui la scoperta e lo studio come sempre approfondito di organi compresi fra muscolo e tendine (*corpuscoli muscolo-tendinei*) con significato di ricettori e segnalatori della tensione nel muscolo; e di altri tipi di espansioni nervose periferiche, in seno al connettivo (*corpuscoli di Golgi-Mazzoni*).

Non mancano osservazioni importanti nel campo più strettamente neuropatologico: è del 1874 uno studio sulla corea cronica in cui sono messe in luce lesioni dei corpi striati, antevendo così la mole dei lavori successivi; e venne assai più tardi, nel 1894, uno studio sulle alterazioni del sistema nervoso nella idrofobia, con rilievi ancor oggi perfettamente apprezzabili.

Ma un'altra scoperta deve essere brevemente commentata: quella che si riferisce ad un reperto citologico, la così detta *rete interna* o *apparato di GOLGI*, illustrato prima entro le cellule nervose, poi da lui e da molti altri, nel suo laboratorio ed in tutto il mondo, in moltissimi altri elementi cellulari, tanto che sistema del condrioma da un lato e apparato di GOLGI dall'altro si possono oggi considerare come formazioni endocellulari di costante presenza e di sicuramente importante funzione nelle cellule dei metazoi e probabilmente anche dei protozoi (apparato lipidale di escrezione di NASSONOV, forse corrispondente all'apparato di GOLGI). L'apparato reticolare interno è stato seguito nel corso di modificazioni funzionali ed anche di alterazioni patologiche delle cellule. Esso ha rappresentato un oggetto di fervide discussioni in parecchi congressi internazionali: non sono mancati precursori, come lo stesso compianto PERRONCITO, allievo carissimo e congiunto del GOLGI, rileva, per esempio, nelle descrizioni di così detti pseudocromosomi, ma nessuno come il GOLGI e la sua Scuola ha stabilito i caratteri precisi e l'universalità del reperto. Oggi taluno, come RIES, è incline a derivare la rete interna o la *sostanza osmofila di GOLGI*, che la rappresenta in certi invertebrati, da un sistema speciale di granuli di natura lipoproteica, i *lipocondri*, anch'essi differenziabili dal condrioma vero e proprio. I reperti citologici diversi dipendono molto dalle tecniche adottate; ma che la rete di GOLGI non è un puro artefatto o, come molti altri particolari citologici osservati su materiale fissato, è un artefatto che corrisponde a qualcosa di realmente esistente e funzionalmente modificabile, lo dimostra il fatto che anche a fresco e su cellule vive formazioni peri- o paranucleari corrispon-

denti all'apparato di GOLGI si vedono pure, eppoi, come ben nota PERONCITO, il fatto che con metodi diversissimi di colorazione o impregnazione si mette in evidenza la stessa struttura e se ne seguono le fasi di evoluzione. Dal punto di vista fisiologico si può oggi affermare l'esistenza di strutture peri- o paranucleari, ricche in lipoidi e secondo le larghissime osservazioni di CASPERSSON contenenti, in combinazione colle proteine, dell'acido nucleico (a. ribosio-nucleico); a tali strutture potendosi probabilmente attribuire somma importanza per i processi di sintesi e di elaborazione nel citoplasma. Anche secondo le recentissime osservazioni di SANZ IBÁÑEZ la sostanza di GOLGI è uno stadio od un aspetto di un materiale altamente reagibile destinato alla elaborazione di secreti.

Così la scoperta di GOLGI ha potentemente contribuito, con mezzi finemente morfologici, a documentare questi particolari strutturali e funzionali, radicati in meno accessibili fattori ultrastrutturali, ed ha avuto come tutte le vere scoperte un notevole valore euristico, qualunque sia la definitiva sistemazione dei reperti nel quadro d'insieme della intima architettura cellulare, derivante da osservazioni molteplici colle tecniche le più svariate.

Ma il GOLGI fu grande non solo nella istologia: egli fu anche un vero patologo generale, conforme al titolo definitivo della sua cattedra. Troviamo qui anzitutto le ricerche sulla malaria, che collocano il nome del GOLGI insieme a quelli di LAVERAN, GRASSI, MARCHIAFAVA, CELLI fra i fondatori della dottrina eziologica e patogenetica della malaria. È del 1886 il primo lavoro in questo campo sotto forma di una lettera ai professori MARCHIAFAVA e CELLI, pubblicata nel glorioso « Archivio per le scienze mediche » ancora sopravvivenza alla inondazione di nuove e spesso inutili Riviste mediche: ivi il GOLGI, che ebbe fino agli ultimi anni un reparto di ammalati nell'Ospedale di S. Matteo di Pavia e che fu anche ottimo medico, sebbene costantemente rifiutasse qualsiasi forma di esercizio professionale, riporta le osservazioni fatte su 40 ammalati di malaria e stabilisce già il nucleo di quella che può chiamarsi *legge di GOLGI*, ossia il rapporto fra fase evolutiva del parassita e accesso febbrile. In questo primo lavoro fu studiata la febbre quartana, in cui l'accesso occorre ogni terzo giorno, dopo due di apiressia: durante quest'ultima GOLGI seguì il progressivo maturarsi dei parassiti (schizonti) nei globuli rossi, il loro arricchirsi in pigmento a spese della emoglobina di questi, poi, all'avvicinarsi dell'accesso, il disporsi del pigmento al centro e l'avvicinamento alla formazione delle note rosette o forme di divisione. L'accesso occorre all'atto della divisione o schizogonia, quando le forme giovani si disperdono nel plasma sanguigno; durante l'accesso forme adulte, *corpi pigmentati*, come GOLGI li chiamava, non se ne vedono più, perchè appunto ha avuto luogo la sporulazione. Bensì comincia tosto una nuova generazione parassitaria, coll'invasione di nuovi globuli per parte delle forme

giovani, generazione che impiega tre giorni a maturare e portare al nuovo accesso. Dunque il ritmo degli accessi è espressione del ritmo moltiplicativo dei parassiti nel sangue. Si noti che a quell'epoca da poco tempo LAVERAN aveva visto e la scuola romana aveva studiato a fondo i parassiti malarigeni; e si discuteva ancora se esistesse come forma a sè una febbre *quotidiana*. GOLGI dimostrò che nel sangue possono svolgersi contemporaneamente ma in fase diversa parecchie generazioni di parassiti e nella congerie di forme a vario stadio di sviluppo che si vedono nel sangue del paziente in tali casi seppe discernere e differenziare le varie generazioni parassitarie e concludere così che anche forme terzane e quotidiane di febbre possono dipendere da due o tre generazioni di parassiti quartanari, che vengano a sporulare ciascuna in giorni diversi: quartane doppie e triple, quest'ultime a carattere quotidiano. Si noti anche che il Nostro esaminava preparati a fresco di sangue; e si ammira la sagace, mirabile attitudine ad osservare e distinguere. Poco dopo, in una nuova memoria, il GOLGI espone i suoi studi sulla terzana, conferma ivi la sua legge, dimostra l'esistenza di terzane doppie, con due generazioni parassitarie, maturanti ciascuna in 48 ore ma a giorni alterni, in modo che il carattere clinico della febbre risulta quotidiano. Meno studio dedicò GOLGI alle forme estivo-autunnali, o terzana maligna, per ovvie ragioni di ambiente, che nella bassa Lombardia ne presentava scarsa casistica; però egli in un lavoro del 1889 sulle febbri che chiamava a lunghi intervalli ed in una lettera a GUIDO BACCELLI pubblicata nella « Gazzetta medica » di Pavia nel 1893 esprimeva idee ben chiare su queste febbri più gravi, a decorso più irregolare, con presenza delle così dette *semilune* nel sangue, che dovevano poi essere meglio lumeggiate da KOCH nel 1898 e da numerosi studi della scuola romana. Ma il GOLGI, che in un soggiorno presso la Clinica del BACCELLI a Roma ebbe occasione di studiare questa forma di malaria, nella suddetta lettera applica anche qui con esatta comprensione la sua legge e mostra di ben apprezzare le generazioni parassitarie « che si trovano nei parenchimi degli organi in diversa fase di sviluppo e « danno origine a gettate o colonie di giovani forme che in quantità grande « o piccola o insignificante possono venire versate nel sangue ». Nella malaria GOLGI studiò anche i fenomeni di fagocitosi con concetti ancor oggi degni di essere seriamente ripresi in considerazione. L'opera malariologica di GOLGI è ammirata in tutto il mondo; ed è forse quella che ha dato meno luogo a controversie, obiezioni e denegazioni; è un monumento di chiarezza, obiettività ed acutezza tutte italiane.

Il fulgore delle scoperte di GOLGI nel campo neurologico e malariologico ha lasciato un po' nell'ombra alcune opere minori: eppure si tratta di brillanti manifestazioni dell'ingegno di questo indefesso ricercatore, le quali portano contributi spesso veramente sorprendenti anche oggi per la originalità e la freschezza. Si rilegga il lavoro del 1880 sulla isto-

logia dei muscoli volontari, ove la descrizione dei fenomeni rigenerativi (meno secondari dettagli) è quale può darla un moderno trattato; od un lavoro sulla pseudoipertrofia muscolare progressiva o quello sulle alterazioni muscolari in un caso di tetano, in cui è espressa nettamente l'opinione della azione tossica dei prodotti di disintegrazione della sostanza muscolare; od un lavoro sulle alterazioni del midollo osseo nel vaiolo; o quelli, in parte in collaborazione con BIZZOZERO, sulla trasfusione endoperitoneale di sangue: voi trovate sempre lo stesso spirito critico, ma non ipercritico, sereno ma netto nelle affermazioni, scrupoloso ma non prolisso nelle descrizioni.

Così GOLGI occupa una posizione veramente centrale nelle scienze medico-biologiche della seconda metà del secolo passato e dei primi due decenni di questo: il premio Nobel conferitogli nel 1906 è il più giusto ed unanime riconoscimento dell'opera sua. In quell'anno un altro italiano ebbe l'alto onore dell'ambito premio internazionale per la letteratura: GIOSUÈ CARDUCCI. I nostri due Grandi, così diversi per la forma dell'attività e per la struttura mentale, il Biologo ed il Poeta, avevano pure ambedue qualche tratto a comune, soprattutto la profonda onestà e probità, la grande e non finta modestia. Racconta un biografo del CARDUCCI e precisamente il nostro eminente Presidente LUIGI FEDERZONI, illustrando stupendamente CARDUCCI nella scuola, che il Poeta mai recitava i suoi versi davanti agli studenti. Anche GOLGI mai parlava delle sue scoperte in lezione, considerava la scuola e la ricerca come una sacra missione, cui si deve obbedire in umiltà di cuore e non come uno strumento per la conquista della fama e degli onori. Anch'Egli era, come l'Altro, anzitutto un galantuomo; ed io ritengo che non si può essere grandi Scienziati e neppure veramente grandi Poeti, assertori dello spirito sulla materia, eroi del pensiero nel senso di CARLYLE, profeti di nuove verità, se non si è anzitutto degli uomini sinceri e probi. Non è vero che GOLGI fosse ostile per principio alle ipotesi: egli si disse anzi intimamente convinto della necessità di esse, perchè l'ipotesi, indirizzando allo studio, costituisce un metodo di ricerca; solo che « essa deve prendere le mosse da fatti rigorosamente dimostrati e scaturire dal cozzo delle conoscenze bene accertate » (1914). Sono sue parole anche queste: « Alla conquista delle più sicure conoscenze scientifiche si arriva non coi voli della fantasia che possono solo condurre ad una parvenza di progresso, ma col lavoro minuto, metodico, quotidiano, che, conducendo al sicuro possesso del fatto singolo, crea le incrollabili conoscenze delle leggi della vita ». Principi questi eminentemente educativi per i giovani che si avviano per l'arduo cammino della ricerca scientifica, il quale non sempre conduce a mete gloriose, dà spesso disillusioni e sconcerti ma dà sempre la pura e nobile soddisfazione della coscienza serena e del distacco dalle aspirazioni volgari e dagli interessi materiali.

È stato detto che GOLGI fu esclusivamente un morfologo: ma anzi tutto gli anni della sua più fervida attività giovanile corrispondevano ad un intenso e necessario sviluppo dell'indirizzo morfologico in biologia, senza il quale non si sarebbe potuta edificare la moderna biologia pur colle sue superbe costruzioni chimiche e fisiche. Neppure oggi è morto e mai morrà un sano indirizzo morfologico, sia pure avvivato dal metodo sperimentale e rinforzato dalle conoscenze biochimiche. « Il progresso sicuro e costante della scienza » – diceva GOLGI (1919) – « che è coefficiente principale del cammino ascendente della umanità, è sempre il risultato della armonica cooperazione di tutte le branche del sapere. Lungi dai pretenziosi esclusivismi, io sto per dire che tutti gli indirizzi quando siano fondati sull'osservazione e sull'esperimento, hanno importanza in quanto, per vie diverse, possono contribuire al progresso, purchè diretti da una intelligenza che non si fermi al puro e semplice riconoscimento dei fatti, ma sappia coordinarli ed interpretarli e valersene come base di indagini ulteriori; senza dimenticare però che anche semplici fatti, ben raccolti ed ordinati, possono rappresentare un prezioso materiale per altri studiosi dalla mente meglio indirizzata alle interpretazioni ed alle sintesi ». Non amava gli inni di vittoria nella scienza, perchè giustamente pensava che l'inneggiare sovente – e non solo in scienza – addormenta quell'ansia di perfezionamento e quell'autocritica che sono arra sicura di progresso. Amò profondamente l'alma mater pavese, la sua Università di cui fu più volte Rettore zelante e sempre protettore efficace, ed amò appassionatamente la grande patria italiana, da cui ebbe ben meritati riconoscimenti, principale fra tutti la nomina a Senatore nel 1900.

La ricerca scientifica non gli fece trascurare alcuni importanti problemi sociali e patriottici: siano ricordati qui gli studi sulle condizioni igieniche dei lavoratori in risaia, le campagne antimalariche, la fervida opera a pro' dei mutilati nella guerra 1914-1918 colla istituzione di un Centro nevrologico specializzato presso l'Ospedale militare al Collegio Borromeo di Pavia. GOLGI, già più che settantenne, presiedette a questo Centro e fece opera oltremodo benefica: l'uomo di grande ingegno, ovunque si trovi, sa affrontare per lui nuovi problemi e svolgere ben ordinata ed efficace attività. Dal 1911 al 1926 GOLGI fu apprezzato consulente dell'Istituto Sieroterapico Milanese. In un mirabile discorso alla Società italiana per il progresso delle Scienze nel 1916 – mentre la guerra infuriava – propugnò l'organizzazione scientifica dell'industria italiana, portando ad esempio proprio il nemico di allora, la Germania. Nel 1919 il Nostro, in un discorso tenuto in occasione della inaugurazione della *Fondazione CAMILLO GOLGI* prò orfani dei medici, pronunciava delle nobilissime parole, che svelavano tutto il suo geloso e profondo amore di patria, un po' chiuso come tutti gli affetti sinceri: Egli esprimeva la fiducia che l'Italia assurga al posto che le spetta fra le Nazioni più progredite: la

sua fiducia non era affievolita — egli afferma — nell'ora grigia dei dubbi e dei disinganni, nè era offuscata dalla visione delle difficoltà derivanti al nostro Paese dagli amici di allora; e la più grande speranza gliela davano i giovani, che tornavano silenziosi dalle trincee e riprendevano con coraggio il loro lavoro. I giovani Egli amò moltissimo: lo prova fra l'altro un suo discorso al Senato nel 1913 (nell'alto Consesso parlò sempre poco e solo su argomenti di sua competenza e sulla protezione ed assistenza degli invalidi di guerra). Quell'anno Egli parlò sopra al problema degli assistenti universitari: è un discorso che è di viva attualità anche oggi dopo ben 30 anni, poichè il problema dell'assistentato non è stato risolto affatto. Anche GOLGI e così il ministro CREDARO che gli risponde, ed il Senatore DINI dal primo menzionato, parlavano — proprio come se ne parla ora — di riforma universitaria; e GOLGI insiste perchè la carriera universitaria, anche nell'interesse dello Stato, non sia privilegio di classe ma vi possano accedere i più degni e non già quelli finanziariamente meglio situati. GOLGI ricordava forse la sua faticata gioventù ed aveva presente anche, sebbene sempre dignitosamente abbia taciuto su questo, la sua povertà costante, cui portò qualche lenimento negli ultimi anni il premio Nobel (diviso coll'illustre suo emulo spagnolo RAMON Y CAJAL). Non si può dire che sia giusto un ordinamento sociale finchè è ammesso che uno scienziato come GOLGI conduca una vita modesta di piccolo borghese (e si noti che non ebbe figli), mentre degli abili professionisti di valore scientifico di gran lunga inferiore e, peggio ancora, dei trafficanti ed affaristi semianalfabeti accumulano grandi ricchezze. È vero d'altra parte che lo scienziato e l'artista godono della ricchezza interiore dello spirito più di quanto possa il ricco epulone gustare le sue materiali dovizie. E difatti GOLGI provava il fascino inesauribile della ricerca e non conobbe riposo e seguì a lavorare in istologia anche dopo che la legge dei limiti di età, allora al 75° anno, lo aveva ciecamente colpito: sono dell'ottantenne scienziato alcune fini osservazioni sulle strutture interne del globulo rosso. Noi ricordiamo questo gigante del pensiero biologico in un momento certamente grave della vita nazionale: questa rievocazione serva di esempio a noi, che dobbiamo sentire il sacro dovere di perpetuare la tradizione Gorgiana, fatta di severa osservazione e di onesta considerazione di tutti gli indirizzi e di tutti gli studiosi seri; serva anche di base ad una fulgida speranza negli immancabili destini della Patria ed altresì di fiero monito a chi ci osserva, amico o nemico, che un paese che ha dato uomini come questo, di seguito a tanti altri grandi in tutti i campi del pensiero, ha diritto di vivere e di prosperare, per il bene dell'umanità ed in nome di quella unità dello spirito, che è l'affermazione di Dio.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALLA REALE ACCADEMIA D'ITALIA

- SAVELLI, Francesco. — *La bentonite, le argille colloidalì e le loro applicazioni scientifiche ed industriali*. (Milano, Hoepli, 1943), pp. xix, 537, in-8°, con figg. e tavv.
- Ser^a Hoffileriana. *Commentationes gratulatorias Victori Hoffiler sexagenario obtulerunt collegae amici discipuli a. d. XI Kal. Mar. MCMXXXVII. Zagabriae, 1940. 2 volumi in-4°, con tavv.*
- SESINI, Ugo. — *Decadenza e restaurazione del canto liturgico*, Milano, Casa ed. d'Arte e Liturgia B. Angelico, [s. d.], pp. 224, in-8°. (Studi e Testi liturgico-musicali, II).
- *La « Romana cantilena »*. Corso completo, storico, didattico, critico di canto Gregoriano. Roma, Ed. Cremonese, 1942, pp. 345, in-8°, con tavv.
- SILVESTRI, Filippo. — *Tisanuri lepismatidi (insecta) della Cina continentale*. In civitate Vaticana, 1942. (Estr. da Pontificia Academia Scientiarum, *Acta*, vol. VI, n. 33, pp. 303-322).
- STELLA, Augusto. — *Le miniere di ferro dell'Italia* del prof. A. Stella con la collaborazione di un gruppo di soci della F. M. I. Torino, Lattes, 1921, pp. xxviii-426, in-8°, con figg. e tavv.
- *Topografia, geologia ed acque nel Gebel Tripolitano* con 65 incisioni e 2 carte. Firenze-Milano, Treves, 1914. (Estratto dal volume: *La missione Franchetti in Tripolitania*, pp. 81-151).
- TANODI, Zlatk. — *Monumenta historica liberae regiae civitatis Varasдини*. Tomus primus: *Codex diplomaticus 1209-1526*... Varasдини, « Narodna Tiskara », 1942, pp. x-353, in-8°, con tavv.
- UGOLINI, Luigi Maria. — *L'acropoli di Butrinto*. Roma, Scialia, 1942, pp. xv-291, con figg. e tavv., in-4° (Albania antica, III).

COLLEZIONI

- Arte moderna straniera*. N. 8, s. C.: Disegnatori, n. 1 (Vincent van Gogh). N. 5, s. A.: Pittori, n. 4 (Homoré Daumier). Milano, Hoepli, 1942-43, in-16°.

PUBBLICAZIONI PERIODICHE

- Atti e memorie [della] R. Deputazione di Storia Patria per l'Emilia e la Romagna*. Bologna, vol. VII, 1941-1942.
- Osservazioni e Memorie del R. Osservatorio Astronomico di Arcetri*. Pavia. Fasc. 61, 1943. (Pubbl. dalla R. Univ. degli Studi di Firenze. Fac. di Sc. Fis., Mat. e Nat.).

- Paedagogium* (Quaderni), I, *Educazione familiare*. Brescia, « La scuola », 1943.
- Nuovo elenco.*
- BRUERS, Antonio. — *Il Cattolicesimo e Giovanni Gentile*. Discorso pronunciato in Roma il 28 maggio 1943. Roma, Stella, 1943, pp. 41, in-16°.
- Corpus iuris civilis cum glossa magna Accursii Florentini auspiciis et consilio Regiae Academiae Italicae editum, Institutionum Iustiniani Augusti libri IV... curavit Petrus Torelli... (Liber I)*. Bononiae, in aedibus N. Zanichelli [s. a.], pp. xi, col. 162, in-8°.
- Enciclopedia biografica e bibliografica « italiana »*. Serie XLII: *Il Risorgimento italiano... Gli uomini politici*. (Terzo volume, DO-ZU) di Francesco Ercole. Roma, E. B. B. I., 1942.
- ERCOLE, Francesco. — Vedi: *Enciclopedia biografica e bibliografica « italiana »*...
- GIORGIO, Giovanni. — *Pubblicazioni scientifiche e tecniche*. (Volume miscellaneo, anni 1894-1925).
- GOTTA, Salvatore. — *Die Kugel rollt. Ein Roman um Kaiserin Eugenie von Salvator Gotta*, Heidenau bei Dresden, Langer & Co, 1943, pp. 502, in-16°.
- GUZZO, Augustu. — *L'attualità dei filosofi classici. Età moderna...* Milano, Bocca, 1942, pp. 95, in-8° (R. Istituto di Studi filosofici. Sezione di Torino, 9¹¹).
- INGUANEZ, D. M. — I. *I Placiti Cassinesi del secolo X con periodi in volgare* (IV edizione). II. *Documenti Cassinesi dei secoli XI-XIII con volgare*. Montecasino, 1942, pp. 31, in-8° (Miscellanea Cassinese).
- MASSADRI, FRANCESCO. — *Piano dell'epistolario [di A. Volta]*. Firenze, Cya, 1943, pp. 41, in-4°, con tavv. (R. Commissione per l'ed. Naz. dell'Epistolario di Alessandro Volta).
- OLIVIERI SANGIACOMO, Laura. — Vedi: Orazio, *Le « Odi Romane »*.
- ORAZIO. — *Le « Odi Romane »* con introduzione, testo, traduzione e commento a cura di Laura Olivieri Sangiacomo. Tivoli, Ed. Roma, (« Res Romanae »).
- RESTA, Raffaele. — *Filosofia dell'educazione. I. L'educazione come legge della persona*. Padova, Cedam, pp. 389, in-8° (Problemi d'oggi. Serie Pedagogica, vol. I.).
- SACCO, Federico. — *Il quaternario nelle Alti Valli di Lanzo* (con una carta geologica fuori testo). Torino, 1943. (Estr. dalle *Memorie* della R. Acc. delle Scienze di Torino, s. II, t. 71, p. I).
- SIGNORILE, Maria. — *Ada Negri*. Torino-Milano ecc., Paravia, 1942, pp. 142, in-16°. (Scrittori italiani).
- STELLA, Augusto. — *I giacimenti auriferi delle Alpi italiane*. Roma, Ist. Poligrafico dello Stato, 1943, pp. 134, in-8°, con figg. e tavv. (Ministero delle Corporazioni. R. Ufficio Geologico, Memorie descrittive della carta geologica d'Italia, vol. XXVII).
- TORELLI, Pietro. — Vedi: *Corpus iuris civilis cum glossa magna Accursii...*
- USSANI, Vincenzo. — *Su due epigrafi metriche di Aonio Paleario*. Firenze, Ist. naz. di Studi sul Rinascimento, 1942. (Estr. da *La Rinascita*, a. V. n. XXVIII, novembre 1942).

INDICI

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G., Altezza della cromosfera nel 1942 ed andamento del ciclo solare, 404.
- ABETTI G. e VIARO M., Inizio probabile del nuovo ciclo solare, 485.
- AMERIO L., Su una questione relativa all'analisi periodale, 120.
- Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati, 287.
- ARMELLINI CONTI G., Osservazioni meridiane del pianetino Vesta, 146.
- ARMELLINI G., Sopra l'equazione differenziale del moto centrale newtoniano, 342.
- Sopra l'origine dei pianeti dal Sole, 406.
- ARRIGHI G., Considerazioni sui moti lenti dei mezzi continui disgregati, 473.

B

- BAGLIONI S. e MANFREDI A., Di un microfono elettrolitico, 100.
- BAGLIONI S., Sul problema psicofisico, 240.
- Sul microfono elettrolitico. Relazione, 333.
- BERNARDINI G. e FESTA C., Su un metodo per la determinazione della vita media del mesone basato sugli effetti integrali di assorbimento, 166.
- BOMPIANI E., Una proprietà caratteristica dei coni di Veronese, 447.
- BONI A., Sull'«Eridanosaurus Brambillae» Bals. Criv., 363.

BONINO G. B., Commemorazione di MARIO BETTI, 245.

BRUNELLI G., Progressi e problemi della scienza del mare. Relazione, 257.

— La funzione della cosiddetta vescica urinaria nei Teleostei depositanti le uova a nastro, 429.

C

CALOI P., Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette, 355.

CAVALLARO U., Su un metodo di determinazione dei calori di fusione dalle curve di raffreddamento. — I. Calori di fusione di La, Ce, Pr e Al, 520.

CHECCHIA-RISPOLI G., Osservazioni su alcuni Pseudodiadema, 317.

CIMINO M., Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osservatorio di Roma col punto fondamentale di Monte Mario, 150.

CISOTTI U., Invarianti ed eminvarianti cubici dei tensori, 8.

— Corrispondenza conforme tra campi complementari, 278.

— Funzioni analitiche complementari, 388.

— Punto materiale orientato, 469.

COLACEVICH A., Distribuzione galattica ed orientamento dei piani orbitali delle stelle binarie visuali di tipo spettrale B, 488.

F

- FAEDO S., Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota I, 207.
- Il calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota II, 299.
- FANTAPPIÈ L., Sull'interpretazione dei «potenziali anticipati» della meccanica ondulatoria e su un «principio di finalità» che ne discende, 81.
- FESTA C., vedi BERNARDINI G.
- FICHERA G., Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert, 213.
- FOSCHI V., Una proprietà dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana che si muove nel suo piano, 29.
- Una proprietà del moto di una figura piana, 32.
- La costruzione del cerchio dei flessi sul moto piano, 35.
- Un teorema generale nel moto di un corpo rigido intorno a un asse fisso, 40.
- Sulla distribuzione e sulle figure delle velocità e delle accelerazioni nel moto rigido piano, 477.

G

- GHERARDELLI G., Sulle curve sgembe algebriche intersezioni complete di due superficie, 128.
- Sulle curve sgembe algebriche intersezioni semplici complete di tre superficie, 460.
- GIALANELLA L., Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota I, 44.
- Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. - IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a), Nota I, 51.
- Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ri-

cerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota II, 156.

- GIALANELLA L., Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. - IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a). Nota II, 161.
- Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere, 304.
- Sull'epoca del possibile distacco del pianeta Plutone dal sistema di Nettuno. Nota II, 495.
- Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. - V. La cometa Whipple-Fedtko (1942 g), 500.
- GORINI C., Sulla specializzazione della microflora lattica silaria, 199.

L

- LABOCETTA L., Unità naturale di radiazione, 309.
- LAMPARIELLO G., Su certe identità differenziali cui soddisfano le funzioni γ delle equazioni dinamiche di Volterra-Hamel, 12.
- Generalizzazione del metodo di Hamilton-Jacobi alla Dinamica dei sistemi anolonomi, 20.
- LANFRANCHI F., Sulla nicotil-p-fenetidina, 190.
- Azione di alcuni nicotil-aminotiazoli sullo sviluppo del bacillo della dissenteria, 432.
- Azione della nicotil-p-fenetidina sullo sviluppo del bacillo della dissenteria, 439.

M

- MAJORANA Q., Nuove ricerche magnetico-ottiche. Relazione, 335.
- Il fenomeno Kerr nei metalli non ferromagnetici, 513.
- MANFREDI A., vedi BAGLIONI S.
- MARIANI A., Sulla spiralizzazione dei cromosomi durante la meiosi maschile di « Gryllotalpa gryllotalpa L. » 105.
- MAXIA A., Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore, 463.

MAXIA C., Sul Lias superiore di San Polo dei Cavalieri Preappennino romano, 527.

MILAZZO G., Spettro ultravioletto di assorbimento del pirrolo e del N-Deuteriopirrolo in fase vapore, 87.

MINEO C., Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie, Nota III, 143.

MONTANARO GALLITELLI E., Osservazioni nuove sul sedimento delle cosiddette « argille scagliose », 94.

MORELLI C., Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati, 59.

— Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati, 67.

N

NOBILE V., Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica, 222.

— Sopra un gruppo di problemi astronomici connessi con quello della rotazione galattica. — La soluzione rigorosa in base ad un nuovo postulato, 349.

O

OBRESCHKOFF N., Sulle funzioni armoniche sopra la sfera, 133.

— Sulle funzioni armoniche sopra la ipersfera, 359.

— Sulle medie aritmetiche della serie di Taylor, 398.

— Intorno alle funzioni armoniche sopra le superficie, 420.

P

PENTIMALLI F., Commemorazione di FERRUCCIO VANZETTI, 202.

POSSENTI R., Sulle relazioni tra le parti reali e le parti immaginarie degli operatori funzionali, 454.

PUCCIANTI L., Sulla dipendenza dal mezzo ambiente delle azioni elet-

trostatiche, magnetiche, elettromagnetiche, elettrodinamiche, 411.

R

RONDONI P., Commemorazione di CAMILLO GOLGI, 536.

RUFFO A., Sulla natura chimica dell'esterasi epatica, 424.

RUSSO A., Indirizzo morfologico, indirizzo biochimico e problemi biologici. Relazione, 111.

S

SACCHETTI A., Un indice sintetico di transvariazione, 322.

— Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico rispetto al piano sagittale del cranio, 373.

SERGI S., La topografia dell'osso zigomatico dell'uomo in relazione ai problemi nell'architettura del cranio e della faccia. Nota riassuntiva, 195.

SOBRERO L., Sull'integrazione del $\Delta\Delta$ in una striscia indefinita, 182.

T

TENANI M., Grafico per l'utilizzazione delle registrazioni di variazione del campo magnetico terrestre, 232.

TORTORICI P., Sulla interpretazione delle misure eötvössiane nella prospezione del sottosuolo, 72.

V

VIAIO N., Vedi ABETTI G.

VILLA M., Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. — II. Loro costruzione, 1

— La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — I. Proprietà generali, 137.

— La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — II. Applicazioni, 217.

INDICE PER MATERIE

A

- Antropologia.** — Un indice sintetico di transvariazione. A. SACCHETTI, 322.
- Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico rispetto al piano sagittale del cranio. A. SACCHETTI, 373.
- La topografia dell'osso zigomatico nell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia. Nota riassuntiva. S. SERGI, 195.
- Astronomia.** — Altezza della cromosfera nel 1942 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, 404.
- Inizio probabile del nuovo ciclo solare. G. ABETTI e N. VIARO, 485.
- Osservazioni meridiane del pianettino Vesta. G. ARMELLINI CONTI, 146.
- Sopra l'origine dei pianeti dal Sole. G. ARMELLINI, 406.
- Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osservatorio di Roma col punto fondamentale di Monte Mario. M. CIMINO, 150.
- Distribuzione galattica ed orientamento dei piani orbitali delle stelle binarie visuali di tipo spettrale B. A. COLACEVICH, 488.
- Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota I. L. GIALANELLA, 44.
- Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a) Nota I. L. GIALANELLA, 51.

- Astronomia.** — Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota II. L. GIALANELLA, 156.
- Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a). Nota II. L. GIALANELLA, 161.
- Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere. L. GIALANELLA, 304.
- Sull'epoca del possibile distacco del pianeta Plutone dal sistema di Nettuno. Nota II. L. GIALANELLA, 495.
- Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — V. La cometa Whipple-Fedtko (1942 g). L. GIALANELLA, 500.
- Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica. V. NOBILE, 222.
- Sopra un gruppo di problemi astronomici connessi con quello della rotazione galattica. — La Soluzione rigorosa in base ad un nuovo postulato V. NOBILE, 349.

B

- Biologia.** — La funzione della cosiddetta vescica urinaria nei Teleostei depositanti le uova a nastro. G. BRUNELLI, 429.
- Sulla specializzazione della microflora lattica silaria. G. GORINI, 199.
- Azione di alcuni nicotinil-aminotiazoli sullo sviluppo del bacillo della dissenteria. F. LANFRANCHI, 432.

- Biologia.** — Azione della nicotinil-p-fenetidina sullo sviluppo del bacillo della dissenteria. F. LANFRANCHI, 439.
 — Sulla spiralizzazione dei cromosomi durante la meiosi maschile di « *Gryllotalpa gryllotalpa* L. ». A. MARIANI, 105.

C

- Chimica.** — Su un metodo di determinazione dei calori di fusione dalle curve di raffreddamento. I. — Calori di fusione di La, Ce, Pr e Al. U. CAVALLARO, 520.
 — Sulla nicotinil-p-fenetidina. F. LANFRANCHI, 190.
 — Spettro ultravioletto di assorbimento del pirrolo e del N-Deuteriopirrolo in fase vapore. G. MILAZZO, 87.
 — Sulla natura chimica dell'esterasi epatica. A. RUFFO, 424.
Commemorazioni. — Commemorazione di Mario Betti. G. B. BONINO, 245.
 — Commemorazione di Ferruccio Vanzetti. F. PENTIMALLI, 202.
 — Commemorazione di Camillo Golgi. P. RONDONI, 536.

F

- Fisica.** — Su un metodo per la determinazione della vita media del mesone basato sugli effetti integrali di assorbimento. G. BERNARDINI e C. FESTA, 166.
 — Sull'interpretazione dei « potenziali anticipati » della meccanica ondulatoria e su un « principio di finalit  » che ne discende. L. FANTAPPI , 81.
 — Unit  naturale di radiazione. C. LABOCCETTA, 309.
 — Il fenomeno Kerr nei metalli non ferromagnetici. Q. MAJORANA, 513.
 — Sulle funzioni armoniche sopra l'ipersfera. N. OBRESCHKOFF, 359.
 — Intorno alle funzioni armoniche sopra le superficie. N. OBRESCHKOFF, 420.
 — Sulla dipendenza dal mezzo ambiente delle azioni elettrostatiche,

magnetiche, elettromagnetiche, elettrodinamiche. L. PUCCIANI, 411.

- Fisica.** — Sull'integrazione del $\Delta\Delta$ in una striscia indefinita. L. SOBRERO, 182.
Fisiologia. — Di un microfono elettrolitico. S. BAGLIONI e A. MANFREDI, 100.
 — Sul problema psicofisico. S. BAGLIONI, 240.

G

- Geodesia.** — Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati. C. MORELLI, 59.
 — Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati. C. MORELLI, 67.
Geofisica. — Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocit  di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette. P. CALOI, 375.
 — Grafico per l'utilizzazione delle registrazioni di variazione del campo magnetico terrestre. M. TENANI, 232.
 — Sulla interpretazione delle misure eötvössiane nella prospezione del sottosuolo. P. TORTORICI, 72.
Geologia. — Osservazioni nuove sul sedimento delle cosiddette « argille scagliose ». E. MONTANARO GALLITELLI, 94.
 — Sul Lias superiore di San Polo dei Cavalieri (Preappennino romano). C. MAXIA, 52'.

M

- Matematica.** — Su una questione relativa all'analisi periodale. L. AMERIO, 120.
 — Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati. L. AMERIO, 287.
 — Una propriet  caratteristica dei coni di Veronese. E. BOMPIANI, 447.
 — Corrispondenza conforme tra campi complementari. U. CISOTTI, 278.

Matematica. — Funzioni analitiche complementari. U. CISOTTI, 388.

— Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota I. S. FAEDO, 207.

— Il calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota II. S. FAEDO, 299.

— Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert. G. FICHERA, 213.

— Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di due superficie. G. GHERARDELLI, 128.

— Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di tre superficie. G. GHERARDELLI, 460.

— Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore. A. MAXIA, 463.

— Sulle funzioni armoniche sopra la sfera. N. OBRESCHKOFF, 133.

— Sulle medie aritmetiche della serie di Taylor. N. OBRESCHKOFF, 398.

— Sulle relazioni tra le parti reali e le parti immaginarie degli operatori funzionali. R. POSSENTI, 454.

— Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. — II. Loro costruzione. M. VILLA, 1.

— La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — I. Proprietà generali. M. VILLA, 137.

— La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — II. Applicazioni. M. VILLA, 217.

Meccanica. — Sopra l'equazione differenziale del moto centrale newtoniano. G. ARMELLINI, 342.

— Considerazioni sui moti lenti dei mezzi continui disgregati. G. ARRIGHI, 473.

— Invarianti ed eminvarianti cubici dei tensori. U. CISOTTI, 8.

— Punto materiale orientato. U. CISOTTI, 469.

Meccanica. — Una proprietà dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana che si muove nel suo piano. V. FOSCHI, 29.

— Una proprietà del moto di una figura piana. V. FOSCHI, 32.

— La costruzione del cerchio dei flessi sul moto piano. V. FOSCHI, 35.

— Un teorema generale nel moto di un corpo rigido intorno a un asse fisso. V. FOSCHI, 40.

— Sulla distribuzione e sulle figure delle velocità e delle accelerazioni nel moto rigido piano. V. FOSCHI, 477.

— Su certe identità differenziali cui soddisfano le funzioni γ delle equazioni dinamiche di Volterra-Hamel. G. LAMPARIELLO, 12.

— Generalizzazione del metodo di Hamilton-Jacobi alla Dinamica dei sistemi anolonomi. G. LAMPARIELLO, 20.

— Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. Nota III. C. MINEO, 143.

O

Opere. — Pervenute in dono alla Reale Accademia d'Italia, 371, 381, 445, 547.

P

Paleontologia. — Sull'« Eridanosaurus Brambillae » Bals. Criv. A. BONI, 363.

— Osservazioni su alcuni pseudodiademinae. C. CHECCHIA-RISPOLI, 317.

II

Relazioni. — Sul microfono elettrolitico. Relazione. S. BAGLIONI e A. ANFRIDI, 383.

— Progressi e problemi della scienza del mare. Relazione. G. BRUNELLI, 257.

— Nuove ricerche magneto-ottiche. Relazione. Q. MAJORANA, 335.

— Indirizzo morfologico, indirizzo biochimico e problemi biologici. Relazione. A. RUSSO, 111.

INDICE DEL VOLUME

FASCICOLO 1-5.

LUGLIO 1942-OTTOBRE 1942.

NOTE

M. VILLA. — Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi. — II. Loro costruzione (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	Pag. 1
U. CISOTTI. — Invarianti ed eminvarianti cubici dei tensori	8
G. LAMPARIELLO. — Su certe identità differenziali cui soddisfano le funzioni γ delle equazioni dinamiche di Volterra-Hamel (pres. dall'Accademico G. GIORGI).	12
ID. — Generalizzazione del metodo di Hamilton-Jacobi alla Dinamica dei sistemi anolonomi (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	20
V. FOSCHI. — Una proprietà dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana che si muove nel suo piano (pres. dall'Accademico G. GIORGI).	29
ID. — Una proprietà del moto di una figura piana (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	32
ID. — La costruzione del cerchio dei flessi sul moto piano (pres. dall'Accademico G. GIORGI).	35
ID. — Un teorema generale nel moto di un corpo rigido intorno a un asse fisso (pres. dall'Accademico G. GIORGI).	40
L. GIALANELLA. — Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota I (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	44
ID. — Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 <i>a</i>) Nota I (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	51
C. MORELLI. — Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati (pres. dall'Accademico A. LO SURDO)	59
ID. — Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati (pres. dall'Accademico A. LO SURDO).	67
P. TORTORICI. — Sulla interpretazione delle misure eötvössiane nella prospezione del sottosuolo (pres. da C. MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	72

L. FANTAPPIÈ. — Sull'interpretazione dei « potenziali anticipati » della meccanica ondulatoria e su un « principio di finalità » che ne discende (pres. dall'Accademico R. MARCOLONGO)	Pag. 81
G. MILAZZO. — Spettro ultravioletto di assorbimento del pirrolo e del N-Deuteriopirrolo in fase vapore (pres. dall'Accademico G. B. BONINO) . . .	87
E. MONTANARO GALLITELLI. — Osservazioni nuove sul sedimento delle cosiddette « argille scagliose » (pres. da G. CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	94
S. BAGLIONI e A. MANFREDI. — Di un microfono elettrolitico	100
A. MARIANI. — Sulla spiralizzazione dei cromosomi durante la meiosi maschile di « Gryllotalpa gryllotalpa L. » (pres. da U. PIERANTONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	105

FASCICOLO 6.

NOVEMBRE 1942.

RELAZIONI

A. RUSSO. — Indirizzo morfologico, indirizzo biochimico e problemi biologici	Pag. 111
--	----------

NOTE

L. AMERIO. — Su una questione relativa all'analisi periodale (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	120
G. GHERARDELLI. — Sulle curve sghembe algebriche intersezioni semplici complete di due superficie (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	128
N. OBRESCHKOFF. — Sulle funzioni armoniche sopra la sfera (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	133
M. VILLA. — La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — I. Proprietà generali (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	137
C. MINEO. — Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. Nota III	143
G. ARMELLINI CONTI. — Osservazioni meridiane del pianetino Vesta (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	146
M. CIMINO. — Collegamento trigonometrico degli strumenti dei passaggi del R. Osservatorio di Roma col punto fondamentale di Monte Mario (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	150
L. GIALANELLA. — Sopra una presumibile oscillazione del diametro solare, secondo le ricerche eseguite nell'Osservatorio del Campidoglio. Nota II (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . .	156
Id. — Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — IV. Cometa Whipple-Bernasconi-Kulin (1942 a). Nota II (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	161

G. BERNARDINI e C. FESTA. — Su un metodo per la determinazione della vita media del mesone basato sugli effetti integrali di assorbimento (pres. dall'Accademico A. LO SURDO).	Pag. 166
L. SOBRERO. — Sull'integrazione del $\Delta\Delta$ in una striscia indefinita (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	182
F. LANFRANCHI. — Sulla nicotil-p-fenetidina (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	190
S. SERGI. — La topografia dell'osso zigomatico nell'uomo in relazione ai problemi dell'architettura del cranio e della faccia. Nota riassuntiva. . .	195
C. GORINI. — Sulla specializzazione della microflora lattica silaria (pres. dall'Accademico F. SILVESTRI).	199

COMMEMORAZIONI

F. PENTIMALLI. — Commemorazione di FERRUCCIO VANZETTI.	202
--	-----

FASCICOLO 7.

DICEMBRE 1942.

NOTE

S. FAEDO. — Il Calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota I (pres. da L. TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	Pag. 207
G. FICHERA. — Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	213
M. VILLA. — La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale fra due spazi lineari. — II. Applicazioni (pres. da R. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia).	217
V. NOBILE. — Sulla maniera di intendere e di trattare il problema della rotazione galattica.	222
M. TENANI. — Grafico per l'utilizzazione delle registrazioni di variazione del campo magnetico terrestre (pres. dall'Accademico A. LO SURDO). . .	232
S. BAGLIONI. — Sul problema psicofisico.	240

COMMEMORAZIONI

G. B. BONINO. — Commemorazione di MARIO BETTI.	245
--	-----

FASCICOLO 8.

GENNAIO 1943.

RELAZIONI

G. BRUNELLI. — Progressi e problemi della scienza del mare.	Pag. 257
---	----------

NOTE

U. CISOTTI. — Corrispondenza conforme tra campi complementari	Pag. 278
L. AMERIO. — Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati (pres. da M. PRIGONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	287
S. FAEDO. — Il calcolo delle Variazioni per gli integrali su un intervallo infinito. Nota II (pres. da L. TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	299
L. GIALANELLA. — Osservazioni meridiane dell'ascensione retta di Mercurio e Venere (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	304
L. LABOCCETTA. — Unità naturale di radiazione (pres. dall'Accademico G. A. CROCCO)	309
G. CHECCHIA-RISPOLI. — Osservazioni su alcuni Pseudodiadema	317
A. SACCHETTI. — Un indice sintetico di transvariazione (pres. da S. SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	322

FASCICOLO 9.

FEBBRAIO 1943.

RELAZIONI

Q. MAJORANA. — Nuove ricerche magneto-ottiche	Pag. 335
---	----------

NOTE

G. ARMELLINI. — Sopra l'equazione differenziale del moto centrale newtoniano	342
V. NOBILE. — Sopra un gruppo di problemi astronomici connessi con quello della rotazione galattica. — La soluzione rigorosa in base ad un nuovo postulato	349
P. CALOI. — Nuovo metodo per determinare le coordinate ipocentrali e le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali dirette (pres. dall'Accademico A. LO SURDO)	355
N. OBRESCHKOFF. — Sulle funzioni armoniche sopra l'ipersfera (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	359
A. BONI. — Sull'« Eridanosaurus Brambillae » Bals. Criv. (pres. da P. VINCIGUERRA de REGNY, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	363
A. SACCHETTI. — Sulle variazioni di posizione dell'osso zigomatico rispetto al piano sagittale del cranio (pres. da S. SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	373

FASCICOLO 10-11.

MARZO-APRILE 1943.

RELAZIONI

S. BAGLIONI. - Sul microfono elettrolitico	Pag. 383
--	----------

NOTE

U. CISOTTI. - Funzioni analitiche complementari	388
N. OBRESCHKOFF. - Sulle medie aritmetiche della serie di Taylor (pres. dall'Accademico S. SEVERI).	398
G. ABETTI. - Altezza della cromosfera nel 1942 ed andamento del ciclo solare.	404
G. ARMELLINI. - Sopra l'origine dei pianeti dal Sole.	406
L. PUCCANTI. - Sulla dipendenza dal mezzo ambiente delle azioni elettrostatiche, magnetiche, elettromagnetiche, elettrodinamiche	411
N. OBRESCHKOFF. - Intorno alle funzioni armoniche sopra le superficie (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	420
A. RUFFO. - Sulla natura chimica dell'esterasi epatica (pres. da G. QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	424
G. BRUNELLI. - La funzione della cosiddetta vescica urinaria nei Teleostei depositanti le uova a nastro.	429
F. LANFRANCHI. - Azione di alcuni nicotinil-aminotiazoli sullo sviluppo del bacillo della dissenteria (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	432
ID. - Azione della nicotinil-p-fenetidina sullo sviluppo del bacillo della dissenteria (pres. da S. VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	439

OPERE

Pervenute in dono alla Reale Accademia d'Italia	445
---	-----

FASCICOLO 12.

GIUGNO 1943.

NOTE

E. BOMPIANI. - Una proprietà caratteristica dei coni di Veronese Pag.	447
R. POSSENTI. - Sulle relazioni fra le parti reali e le parti immaginarie degli operatori funzionali (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	454
G. GHERARDELLI. - Sulle curve sgheembe algebriche intersezioni semplici complete di tre superficie (pres. dall'Accademico F. SEVERI)	460
A. MAXIA. - Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	463

U. CISOTTI. — Punto materiale orientato	Pag. 469
G. ARRIGHI. — Considerazioni sui moti lenti dei mezzi continui disgregati (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	473
V. FOSCHI. — Sulla distribuzione e sulle figure delle velocità e delle accelerazioni nel moto rigido piano (pres. dall'Accademico G. GIORGI)	477
G. ABETTI e M. VIARO. — Inizio probabile del nuovo ciclo solare	485
A. COLACEVICH. — Distribuzione galattica ed orientamento dei piani orbitali delle stelle binarie visuali di tipo spettrale B (pres. da G. ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	488
L. GIALANELLA. — Sull'epoca del possibile distacco del pianeta Plutone dal sistema di Nettuno. Nota II (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	495
ID. — Sulle relazioni tra luminosità e colore dei nuclei cometari. — V. La cometa Whipple-Fedtko (1942 g) (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	500
Q. MAJORANA. — Il fenomeno Kerr nei metalli non ferromagnetici	513
U. CAVALLARO. — Su un metodo di determinazione dei calori di fusione dalle curve di raffreddamento. — I. Calori di fusione di La, Ce, Pr e Al (pres. da L. ROLLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	520
C. MAXIA. — Sul Lias superiore di San Polo dei Cavalieri (Preappennino romano) (pres. da G. CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia)	527

COMMEMORAZIONI

P. RONDONI. — Commemorazione di CAMILLO GOLGI	536
---	-----

OPERE

Pervenute in dono alla Reale Accademia d'Italia	547
---	-----

INDICE PER AUTORI	Pag. 551
INDICE PER MATERIE	554
INDICE DEL VOLUME	557

Meccanica. — *Sull'equilibrio dei sistemi anolonomi.* Nota ⁽¹⁾ di GINO ARRIGHI, presentata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

§ 1. — Gli studi e le ricerche da me compiuti sopra i sistemi anolonomi ⁽²⁾ hanno richiamato la mia considerazione sul problema del loro equilibrio ed in questa Nota esporrò i risultati cui sono pervenuto trattando, dal punto di vista statico, il suddetto problema e, nel caso di sollecitazione conservativa, dal punto di vista dinamico la stabilità trigonometrica generale e una stabilità trigonometrica ridotta.

Nella scelta del mezzo più conveniente alla trattazione di questo argomento sono addivenuto alla determinazione di adottare il calcolo delle matrici che, se ebbe come ha tuttora una notevole applicazione nel campo della geometria ⁽³⁾, sta incontrando altresì il più grande favore e sempre ulteriori applicazioni nei campi della meccanica e della fisica matematica ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 3 agosto 1943.

⁽²⁾ G. ARRIGHI, *Sul moto impulsivo dei sistemi anolonomi* in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 9, maggio 1939, pag. 472; G. ARRIGHI, *Sulla riduzione di rango dei sistemi alle caratteristiche per i moti inerziali* in « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », vol. LXXIII, fasc. I, 1939-40; G. ARRIGHI, *Le soluzioni statiche delle equazioni dei piccoli movimenti attorno una configurazione di equilibrio stabile di tipo generale* in « Atti del II Congresso dell'U. M. I. », Bologna, 4-6, aprile 1940.

⁽³⁾ S. CHERUBINO, *Su certe equazioni fondamentali e sul simbolismo delle matrici* in « Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma », vol. I, 1936, fasc. 2; S. CHERUBINO, *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica* in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIII, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 7, aprile 1936, pag. 478; S. CHERUBINO, *Lezioni di geometria analitica con elementi di proiettiva*. S. A. E. Dante Alighieri (Albrighi, Segati e C.), Genova, 1940, parte II, capp. I e II.

⁽⁴⁾ G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici* in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. VII, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 3, febbraio 1928, pag. 178; G. GIORGI, *Nuove osservazioni sulle funzioni di matrici* in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. VIII, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2, luglio 1928, pag. 3; G. GIORGI e E. PORCE TORTRINI, *Sui moti di deformazione nello spazio*,

In un primo paragrafo, procedendo dal principio dei lavori virtuali, si passa alla determinazione della condizione di equilibrio di un sistema anolonomo a vincoli bilaterali privi di attrito e indipendenti dal tempo. Richiamata la nozione di varietà anolonomia si dà una interpretazione geometrica della predetta condizione sia nel caso di sollecitazione generale come in quello di sollecitazione conservativa pervenendo a risultati che si presentano come la più naturale estensione di certe interpretazioni geometriche che si usano dare nei casi degli analoghi problemi per i sistemi olonomi.

Di poi, partendo dalle note posizioni analitiche di VOLTERRA completate dipoi da VRANCEANU e consistenti nel sistema di equazioni differenziali nelle caratteristiche cinetiche e nelle coordinate lagrangiane, si opera, nel caso di sollecitazione conservativa, uno sviluppo delle dette equazioni pervenendosi così al sistema conveniente per la discussione della stabilità trigonometrica: sistema di due equazioni differenziali in matrici e dal quale si perviene tosto ad una equazione differenziale del secondo ordine pure in matrici.

Del sistema predetto si mostra subito una soluzione statica la cui trattazione con relativa interpretazione geometrica fa oggetto di una mia precedente Nota ⁽⁵⁾ ed alla quale pertanto rimando il lettore desideroso di conoscere in particolare la cosa.

Ritornando alla precitata equazione matriciale del secondo ordine riprendo il caso in cui la sua matrice discriminante è propria nel qual caso per la stabilità trigonometrica si richiede che siano immaginarie pure tutte le sue radici caratteristiche.

Nel caso in cui la predetta matrice sia degenera, mediante trasformazioni per contragredienza, si perviene ad una forma della citata equazione per la quale si mostra la eventuale possibilità di una stabilità trigonometrica ridotta.

§ 2. — Si abbia un sistema materiale sottoposto a vincoli (olonomi e anolonomi) bilaterali, privi di attrito e indipendenti dal tempo, e riferito ad un sistema di n coordinate lagrangiane essenziali q_h . La sua caratterizzazione di anolonomia sia resa dalle

$$[1] \quad dq_{-1} = \eta \cdot d\varepsilon_{-1},$$

rappresentati mediante il calcolo delle matrici in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. IX, serie 6^a, 1^o sem., fasc. 2, gennaio 1929, pag. 122; G. GIORGI. *Sul calcolo spaziale più esteso* in « Atti del Congresso Internazionale dei matematici », Bologna, 3-10 settembre 1928. Di questo Autore è attualmente in corso di stampa: *Calcolo matriciale*, articolo monografico in « Enciclopedia delle matematiche elementari », vol. III, parte I.

(⁵) La terza delle citate in (²).

dove:

$$q = (q_1 q_2 \cdots q_n)$$

è l' n -complesso orizzontale delle coordinate lagrangiane, η è una matrice di tipo (n, ν) funzione solo di q e ε è un ν -complesso orizzontale di $\nu < n$ parametri arbitrari, ed inoltre, affinchè si tratti di una vera e propria anolonomia del sistema, le n equazioni scalari equivalenti alla [1] discendano da un sistema pfaffiano di $n - \nu$ equazioni linearmente indipendenti non illimitatamente integrabili.

Detto Q l' n -complesso orizzontale delle componenti lagrangiane della sollecitazione, il principio dei lavori virtuali ci fornisce la condizione di equilibrio sotto la forma

$$Q \cdot \delta q_{-1} = 0$$

ovvero, tenendo conto della [1],

$$Q \cdot \eta \cdot \delta \varepsilon_{-1} = 0$$

donde, per l'arbitrarietà di $\delta \varepsilon_{-1}$, segue

$$[2] \quad Q \cdot \eta = 0.$$

Per passare ad una analisi geometrica di questa condizione richiamiamo le seguenti nozioni. Nell' S_n euclideo delle coordinate lagrangiane si consideri la varietà riemanniana V_n il cui elemento lineare è definito dalla

$$[3] \quad ds^2 = 2 T dt^2 = dq \cdot a \cdot dq_{-1},$$

dove T è la forza viva ed a la matrice di tipo (n, n) della relativa forma quadratica, e la varietà anolonomica di VRANCEANU V_n^v ⁽⁶⁾ definita dalla [3] e dalla [1] relativamente alla quale supporremo senz'altro verificata la condizione di normalità che la matrice

$$\eta_{-1} a \eta$$

è identica di ordine ν .

Come noto i ν -complessi verticali costituenti le colonne di η definiscono le *congruenze fondamentali* e in ogni punto di V_n caratterizzano l' S_ν euclideo cui appartengono gli spostamenti di V_n^v .

La [2] allora, nell' S_n predetto, può interpretarsi come condizione di ortogonalità fra la V_n^v e il vettore che ha per componenti le componenti lagrangiane della sollecitazione e che, per brevità, diremo *vettore*

⁽⁶⁾ G. VRANCEANU, *Studio geometrico dei sistemi anolonomi* in « Annali di matematica pura e applicata », tomo VI, 1929, pag. 2, § 2; G. VRANCEANU, *Les espaces non holonomes*, fasc. LXXVI di « Memorial des sciences mathématiques », Gauthier-Villars, Paris, 1936.

della sollecitazione. Pertanto: Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto dell' S_n sia rappresentativo di una configurazione di equilibrio del sistema considerato è che il vettore della sollecitazione sia ivi normale alla V_n^v .

Se la sollecitazione del sistema è conservativa cioè

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \quad [h = 1, 2, \dots, n]$$

la [2] equivale alle

$$[4] \quad \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial q_h} \eta_{hd} = 0 \quad [\alpha = 1, 2, \dots, v]$$

esprimenti l'annullamento simultaneo delle derivate intrinseche del potenziale U .

Quando nell' S_n si consideri la famiglia di ipersuperfici equipotenziali

$$U = \text{costante},$$

il vettore della sollecitazione risulta, per le [4], normale alla ipersuperficie della famiglia passante pel punto rappresentativo della configurazione corrispondente. Pertanto:

Nel caso di sollecitazione conservativa, condizione necessaria e sufficiente affinché un punto dell' S_n sia rappresentativo di una configurazione di equilibrio del sistema considerato è che in esso la normale alla ipersuperficie equipotenziale cui appartiene sia altresì normale ivi alla V_n^v .

Prima di concludere queste considerazioni statiche del problema dell'equilibrio dei sistemi anolonomi considerati sarà opportuno richiamar l'attenzione del lettore sulla grande analogia che le interpretazioni geometriche qui date presentano con quelle dell'analogo problema per i sistemi olonomi.

§ 3. — Il problema dinamico del nostro sistema materiale può, come noto, farsi dipendere dal sistema di VOLTERRA-VRANCEANU ^(?) il quale nel caso conservativo assume la forma

$$\dot{x}_\alpha = \sum_1^v \beta_\gamma a_{\alpha\beta}^{(\gamma)} x_\beta x_\gamma + \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial q_h} \eta_{h\alpha} \quad [z = 1, 2, \dots, v]$$

$$\dot{q}_h = \sum_1^v \eta_{h\alpha} x_\alpha \quad [h = 1, 2, \dots, n]$$

(?) V. VOLTERRA, *Sopra una classe di equazioni dinamiche* in «Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXXIII, 1898, p. 451, § 6; G. VRANCEANU, *Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo* in «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. IV, serie 6^a, 1^o sem., 1926, pag. 508.

dove: le x_α sono le *caratteristiche cinetiche*, le $a_{\alpha\beta}^{(\gamma)}$, emisimmetriche rispetto agli indici $\alpha\beta$ e funzioni delle sole coordinate lagrangiane, sono i *coefficienti di rotazione* di RICCI⁽⁸⁾ delle congruenze predette e con punto si è indicata la derivata temporale. Eseguendo lo sviluppo di TAYLOR di queste equazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio C^* per la quale sono verificate le [4] e facendo astrazione dei termini superiori al primo si ottiene

$$[5] \quad \dot{x}_\alpha = \sum_{h,k}^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \eta_{h\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_k} \right)^* z_h$$

$$[6] \quad \dot{z}_k = \sum_{\alpha}^v \eta_{h\alpha}^* x_\alpha$$

con

$$z_k = q_k - q_k^*$$

e dove con asterisco si sono indicate, come poi anche in seguito, le determinazioni relative a C^* .

Dalla espressione

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_\alpha} = \sum_h^n \frac{\partial U}{\partial q_h} \eta_{h\alpha}$$

della derivata intrinseca⁽⁹⁾ si ricava

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_\alpha} = \sum_h^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h \partial q_k} \eta_{h\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial \eta_{h\alpha}}{\partial q_k} \right)$$

cosicchè, indicando con B la matrice di tipo (n, v) delle

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_\alpha} \quad [k=1, 2, \dots, n; \alpha=1, 2, \dots, v],$$

alle [5] e [6] potremo attribuire la forma

$$[7] \quad \dot{x}_{-1} = B_{-1}^* z_{-1}$$

$$[8] \quad \dot{z}_{-1} = \eta_{-1}^* x_{-1}$$

dove

$$z = q - q^*$$

e x è il v -complesso orizzontale degli x_α .

(8) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Stock, Roma, 1925, cap. X, § 3.

(9) Opera citata in (8), cap. X, § 4.

Sostituendo con la [8] nella [7] derivata rispetto al tempo ricaviamo la equazione

$$[9] \quad \ddot{x}_{-1} = B_{-1}^* \eta^* x_{-1}$$

la cui discussione sarà oggetto del paragrafo seguente.

Comunque osserviamo che il sistema [7], [8] ammette la soluzione statica

$$x = 0 \quad z = z^0$$

purchè l' n -complesso orizzontale costante z^0 sodisfi la

$$z^0 B^* = 0.$$

§ 4. - Supponiamo inizialmente che la matrice

$$A = B_{-1}^* \eta^*$$

in generale non simmetrica e di tipo (v, v) sia propria: allora la questione della stabilità trigonometrica è ridotta allo studio delle sue radici caratteristiche tutte diverse da zero. Passando alla ricerca di soluzioni della [9] del tipo

$$x = e^{\mu t} x^0,$$

dove e è la base dei logaritmi naturali e x^0 un v -complesso orizzontale costante, affinchè questo sia in esse non nullo dovrà aversi

$$|A - \mu^2 I_v| = 0,$$

dove I_v è la matrice identica di ordine v : cosicchè, perchè ogni valore di μ tratto da quest'ultima equazione sia immaginario puro, tutte le radici caratteristiche di A dovranno essere negative.

Nel caso di A degenera⁽¹⁰⁾ con caratteristica $\lambda < v$ quando, con opportuni scambi delle x_α si siano portati ai primi λ posti le λ righe linearmente indipendenti di A e ai primi λ posti le sue λ colonne aventi gli stessi indici delle righe sopradette, potremo scrivere

$$[10] \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline CA_1 & CA_2 \end{array} \right)$$

dove $(A_1 | A_2)$ è una matrice del tipo (λ, v) di caratteristica massima, A_1 è un minore di ordine λ e C è una opportuna matrice di tipo $(v - \lambda, \lambda)$.

(10) Per le operazioni qui di seguito effettuate vedi la seconda delle note citate in (2).

Trasformando la [10] per contragredienza mediante la

$$H = \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & 0 \\ \hline C & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right),$$

dove le I_λ $I_{\nu-\lambda}$ sono matrici identiche rispettivamente di ordine λ e $\nu-\lambda$, si ottiene

$$\begin{aligned} H^{-1} \cdot A \cdot H &= \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & 0 \\ \hline -C & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline CA_1 & CA_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & 0 \\ \hline C & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & 0 \\ \hline C & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right); \end{aligned}$$

cosicchè, supposti effettuati nella [9] gli scambi di cui sopra, la [9] stessa potrà scriversi

$$H^{-1} \ddot{x}_{-1} = H^{-1} \cdot A \cdot H \cdot H^{-1} \cdot x_{-1}$$

o, per quanto sopra visto,

$$H^{-1} \cdot \ddot{x}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) H^{-1} \cdot x_{-1}.$$

Cosicchè, posto

$$y = x H_{-1}^{-1}$$

per cui

$$x = y H_{-1},$$

si avrà in definitiva

$$[11] \quad \ddot{y}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) y_{-1}$$

la quale ci dice esser costanti gli ultimi $\nu-\lambda$ termini del ν -complesso orizzontale \dot{y} .

Se poi la matrice $A_1 + A_2 C$ è propria così da aversi

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & A_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & (A_1 + A_2 C) D \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

dove D è una opportuna matrice di tipo $(\lambda, \nu-\lambda)$, si trasforma questa ultima per contragredienza mediante la

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & -D \\ \hline 0 & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right)$$

cosicchè si ottiene

$$\begin{aligned} K^{-1} \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & (A_1 + A_2 C) D \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) K &= \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & D \\ \hline 0 & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & (A_1 + A_2 C) D \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & -D \\ \hline 0 & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & (A_1 + A_2 C) D \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_\lambda & -D \\ \hline 0 & I_{\nu-\lambda} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 + A_2 C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poichè la [11] può scriversi pure

$$K^{-1} \cdot \ddot{y}_{-1} = K^{-1} \cdot \left(\frac{A_1 + A_2 C}{O} \middle| \frac{A_1}{O} \right) K \cdot K^{-1} \cdot y_{-1}$$

per quanto sopra si avrà

$$K^{-1} \ddot{y}_{-1} = \left(\frac{A_1 + A_2 C}{O} \middle| \frac{O}{O} \right) K^{-1} \cdot y_{-1}$$

ovvero

$$[12] \quad \ddot{u}_{-1} = \left(\frac{A_1 + A_2 C}{O} \middle| \frac{O}{O} \right) u_{-1}$$

dove si è posto

$$u = y \cdot K_{-1}^{-1} = x \cdot H_{-1}^{-1} \cdot K_{-1}^{-1}$$

per cui

$$x = u \cdot K_{-1} \cdot H_{-1}.$$

La [12] ci dice che le derivate temporali seconde dei primi λ termini del ν -complesso orizzontale u sono funzioni lineari degli stessi λ termini, mentre quelle degli ultimi $\nu - \lambda$ termini del ν -complesso stesso sono nulle.

A parte questi ultimi termini, operando, come nel caso di A propria considerato al principio del paragrafo, sulle prime λ equazioni scalari tratte dalla [2] può ricercarsi una stabilità trigonometrica ridotta nei primi λ termini di u studiando le radici caratteristiche, tutte diverse da zero, di $A_1 + A_2 C$.

Fisica (Applicata all'Igiene). — *Nuovi criterî per giudicare lo stato di umidità delle vecchie murature.* Nota ⁽¹⁾ di GIOVANNI MASSARI e MARIO TALENTI, presentata dall'Accademico DANTE DE BLASI.

I lavori di risanamento murario in corso nel Palazzo Corsini in Roma, intesi a difendere il patrimonio delle pubblicazioni dell'Accademia, ospitate per esigenze belliche nel piano terreno del Palazzo, hanno dato occasione, per l'interessamento solidale degli Accademici GUSTAVO GIOVANNONI e DANTE DE BLASI, ad alcune ricerche pratiche sull'umidità capillare di origine tellurica delle vecchie murature.

Per giudicare della distribuzione topografica e dell'intensità del malanno, sono stati prelevati 45 campioni di muratura nella parte destra del Palazzo, dove trovasi il magazzino delle pubblicazioni, e, per fissare un criterio comparativo con altri edifici umidi, ne sono stati prelevati ancora 37 complessivamente dal Palazzo della Farnesina, dall'Auditorium dell'Accademia, dal Palazzo della Sapienza, dal Pantheon; i campioni stessi, estratti di regola a cm. 20-25 di profondità nella massa muraria, sono stati esaminati con la tecnica usuale ⁽²⁾ per la determinazione della percentuale di umidità contenuta, riferita, come è nell'uso dei laboratori di Igiene, al peso del campione. Poichè agli effetti dell'indagine sul risanamento è più espressiva per i tecnici la quantità d'acqua per metro cubo di muratura, nella tabella seguente i *massimi* di umidità sono riportati tanto come percentuali ponderali quanto come litri di acqua per metro cubo di muratura (tabella I).

Sembra probabile, secondo la tabella, che per le strutture murarie romane si possano accettare le due punte del 18 % per muri di mattone e del 27 % per muri di tufo quali massimi assoluti, i quali si verificherebbero però eccezionalmente ed in zone ristrette, mentre le medie sono alquanto inferiori, anche in murature molto umide e di fatto dannose per la salubrità degli ambienti o per la buona conservazione degli oggetti negli ambienti stessi custoditi.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 ottobre 1943.

⁽²⁾ Essiccazione nella stufa di Calvi, in corrente d'aria secca e priva di CO₂, a 95°-100° per circa 7 ore, e raffreddamento in essiccatore a calce sodata.

TABELLA I.

Massimi di umidità nelle murature vecchie di cinque edifici romani.

EDIFICIO	Materiale costruttivo (e peso specifico) della muratura	Ubicazione del campione esaminato	ACQUA CONTENUTA	
			in % riferito al peso	in litri riferiti al metro cubo di muratura
Palazzo Corsini	mattoni gialli (p. s. = 1,6)	muratura del piano terreno	~ 18 %	288
Palazzo della Farnesina	tufo (p. s. = 1,4)	muratura del seminterrato	27 %	378
Auditorium dell'Accademia	calcestruzzo di cretoni (p. s. = 1,4)	pavimento del sotterraneo	23,6 %	320
Palazzo della Sapienza	tufo (p. s. = 1,4)	piano terreno	16,5 %	231
Pantheon	mattoni rossi (p. s. = 1,6)	piano terreno	7,2 %	115

I minimi, riscontrati nelle murature più asciutte degli ultimi piani, sono invece i seguenti:

a Palazzo Corsini (mattoni gialli) 2,7 %, pari a litri 43,21 per mc.
 alla Farnesina (tufo) 2,4 % » » 33,6 » »
 alla Sapienza (tufo) 2,3 % » » 32,2 » »

Tali minimi sono normali per qualunque ottima muratura asciutta, e confermano il caposaldo del 3 %, già indicato, sia pure con timorosa prudenza, dallo SCALA come il limite entro il quale deve essere contenuta l'umidità muraria dei locali igienicamente abitabili: per lo meno confermano tale caposaldo nel caso degli edifici di antica costruzione, oggetto del presente studio (3).

Per i singoli materiali romani più caratteristici, il mattone giallo di Valle dell'Inferno, quello rosso di Tor di Quinto e il tufo giallo tenero,

(3) Cfr. A. SCALA, *Applicazioni di Fisica e Chimica all'Igiene*, «U. T. E. T.», 1926, pag. 114.

E poi noto come tale limite del 3 % sia controverso per le nuove costruzioni: A. TURSINI («Rivista d'Igiene», 1891) giungeva a propugnare abitabili, per Napoli, le nuove costruzioni in tufo che al primo piano, nelle determinazioni invernali, davano percentuali umide inferiori al 12 %.

sebbene non manchino dati di precedenti sperimentatori, sono state ancora una volta ricontrollate le percentuali ponderali d'acqua assorbite in prove di laboratorio per capillarità, si badi bene, non per immersione. Si è constatato che i massimi ottenuti in laboratorio sono superiori, del 30 % per il tufo e del 50 % per il mattone, a quelli che si riscontrano nelle murature in opera, anche quando siano da reputare umidissime; per esempio la più umida fra tutte le murature di tufo romano esaminate, quella del seminterrato della Farnesina, ha dato il 27,2 % di contenuto umido, mentre i campioni isolati di tufo saturati d'acqua per capillarità in laboratorio hanno dato il 36 %, sempre riferito al peso del campione.

Secondo le analisi compiute sul materiale di cinque edifici di Roma, l'umidità delle vecchie murature potrebbe essere graduata come indica la tabella seguente:

TABELLA II.

*Classificazione di umidità delle vecchie murature
secondo la percentuale ponderale di acqua contenuta.*

MATERIALI COSTRUTTIVI	MURATURA DA CLASSIFICARE			Percentuale di saturazione in laboratorio
	Asciutta	Umida	Umidissima	
Tufo romano e malta	acqua sino al 3,5 %	acqua dal 3,5 al 15 %	acqua dal 15 % sino al massimo del 27,2 %	36 %
Mattone e malta /	acqua sino al 3,5 %	acqua dal 3,5 al 10 %	acqua dal 10 % al 18 %	27 %

Le analisi sembrano poi indicare due diversi modi di distribuirsi dell'umidità entro le murature: in quelle che hanno una parete esterna, oppure sono soggette a ricambio d'aria od a sbalzi di temperatura, insomma in tutte quelle che sviluppano una notevole evaporazione, l'umidità *decreisce rapidamente con l'altezza*: è comune riscontrare una caduta del 5 % per ogni metro. Invece nei grandi spessori murari di locali chiusi, non riscaldati, privi di ricambio d'aria, come in alcuni vani interni allo anello murario del Pantheon, l'umidità sarebbe *quasi costante alle diverse altezze* fino a 3 o 4 metri.

I due andamenti tipici sono rappresentati nei diagrammi della fig. 1.

In particolare, nel Palazzo Corsini la distribuzione dell'umidità segue il primo tipo nel piano rialzato, ed il secondo tipo (Pantheon) nel seminterrato. Le analisi hanno poi rivelato che si verificavano dei massimi (vedi fig. 2) in quella parte dell'edificio presumibilmente soggetta alla

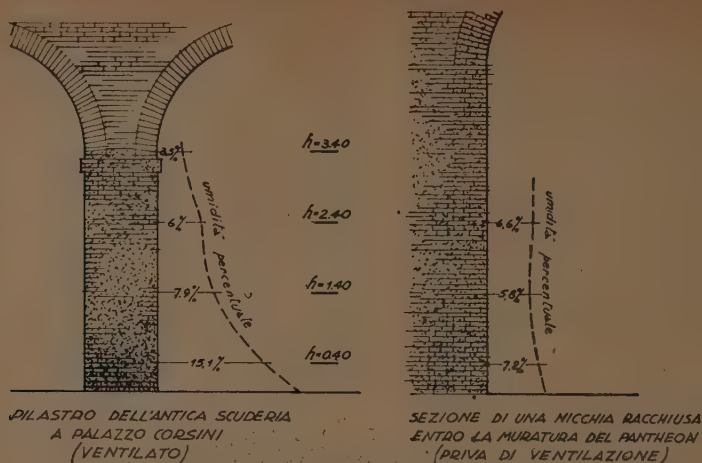


Fig. 1. - Le due distribuzioni tipiche dell'umidità nelle vecchie muraure a seconda che sono ventilate o no.

azione di acque superficiali disperse, provenienti dai cortili nei quali versavano, non allacciati, i pluviali del tetto.

Perciò, senza escludere una compartecipazione della falda freatica, che tuttavia si trova abbastanza distante (a metri 3,90 sotto la quota del pavimento umido) si è diagnosticata nelle acque superficiali disperse l'origine principale del danno.

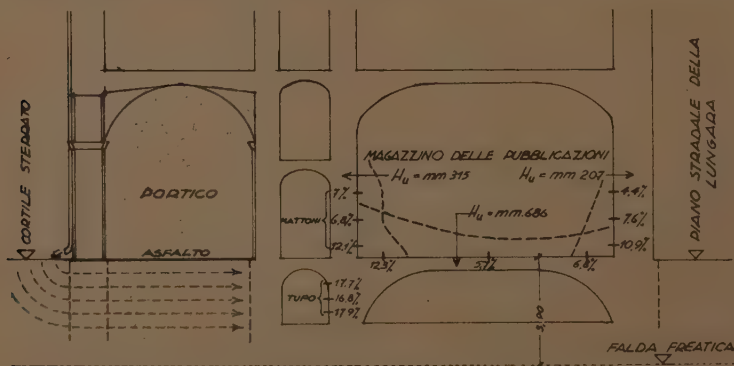


Fig. 2. - Distribuzione dell'umidità in una sezione caratteristica di Palazzo Corsini: massimo carico (mm. 686) nel pavimento.

Una strana concausa costruttiva, che localmente ha peggiorato la situazione, proprio per le murature del magazzino delle pubblicazioni, è stata poi individuata in una sorta di condotta capillare formatasi fra il

cortile e la muratura di fondo del portico, a cagione di una spessa e perfetta stratificazione d'asfalto con la quale, in passato, si era creduto opportuno di pavimentare il portico per difenderlo dall'umidità del cortile. Tale stratificazione isolante deve avere avuto, attraverso gli anni, una funzione gradatamente sempre più esiziale, soffocando ogni evaporazione della massa terrosa sotto al portico, e creando una vera condotta capillare continua (come si può rilevare dalla fig. 2) fra il terreno del cortile e la muratura di fondazione interna del portico.

I tatti hanno confermato che tanto il terreno racchiuso nel cortile, quanto quello sotto il portico, che pure non era stato mai direttamente esposto all'acqua piovana e perciò avrebbe dovuto essere asciutto, erano entrambi uniformemente impregnati, a cominciare dalla superficie fin oltre tre metri di profondità. Si consideri a tal proposito quanto danno può arrecare, nei lavori di ripristino degli edifici umidi, l'errato impiego delle sostanze isolanti.

A seguito di questa diagnosi, che accertava nelle acque superficiali disperse l'origine principale dell'umidità, fu compilato un progetto dei lavori di risanamento, che sono tuttora in corso, ed il cui esito ci ripromettiamo di controllare in prosieguo di tempo con periodiche analisi delle murature, da campioni prelevati sempre negli stessi punti.

Tale procedura di sistematico controllo delle murature è una base di utile collaborazione tra ingegneri e igienisti, tanto per la progettazione che per il collaudo dei lavori di risanamento da umidità.

* * *

Comunque sia distribuita l'umidità nell'interno di una vecchia struttura muraria, il lavoro per asportarla è sempre in relazione alla massa dell'acqua assorbita ed all'altezza cui è giunta.

Dal punto di vista tecnico non esiste un criterio per giudicare l'umidità assorbita dalle varie parti di un edificio antico; non si arriva mai ad una misura globale che consenta cioè, per ogni data massa muraria o per ogni ambiente, di giudicare della gravità del caso. Sotto questo angolo visuale, l'umidità dei fabbricati vecchi (stazionaria o progressiva) è molto più difficile da apprezzare che non quella (sempre regressiva) dei fabbricati di nuova costruzione; in questi ultimi l'umidità è distribuita con uniformità, se pure gradatamente più elevata a mano a mano che dai piani superiori si discende agli inferiori; basta la percentuale desunta dalla analisi muraria per giudicare delle condizioni igieniche di un locale, che in tutti i punti delle sue pareti presenta una umidità sensibilmente uniforme d'origine costruttiva, salvo scarti facilmente spiegabili con motivi di pianta o di materiale impiegato. Esaurito il giudizio igienico, anche se questo è negativo non vi è luogo generalmente ad un compito tecnico

di risanamento, e sono perciò superflue le indagini dirette a misurare il volume d'acqua dannosa e ad eliminarla; nei fabbricati di nuova costruzione bisogna cioè soltanto lasciare tempo al tempo.

Nei fabbricati vecchi, invece, la diffusione umida è irregolare, e il giudizio sull'entità del male è quanto mai incerto (4); l'intervento del tecnico è indispensabile perchè il danno non si attenua mai con il tempo, ma tende anzi a crescere. Una percentuale di appena il 5 % può essere dannosa per l'igiene e tecnicamente difficile da rimuovere se si diffonda su di una grande e continua superficie muraria, mentre ciò può non accadere per una percentuale anche del 18 % se questa investa soltanto una breve fascia basamentale. Come rendere paragonabili i due casi, su di uno stesso metro ?

Tentando di risolvere il quesito abbiamo finito per convenire che due sono gli elementi numerici caratteristici di ogni stato di umidità muraria: la misura dell'altezza alla quale arriva l'imbibizione, e la *percentuale media* d'acqua presente nell'interno della muratura. Trattasi, come si vede, di due dati non omogenei tra loro, perchè l'uno è una misura lineare e l'altro una misura di peso (tanti grammi d'acqua per cento grammi di muratura).

Per renderli omogenei conviene sostituire alla percentuale in peso quella in volume: tanto peso d'acqua, o, ciò che è lo stesso, tanto volume d'acqua, nel volume unitario di muratura.

È noto che se P' è il peso del campione umido, P quello dello stesso campione essiccato e V il suo volume, la percentuale d'acqua assorbita (5) può essere rappresentata con:

$$a_1 = \frac{P' - P}{P}, \text{ oppure con: } a_2 = \frac{P' - P}{V}$$

La prima dà la percentuale d'acqua riferita all'unità di peso della muratura, l'altra riferita all'unità di volume. Dall'una si può passare all'altra con la relazione $a_2 = a_1 \cdot p$ dove $p = \frac{P}{V}$ è il peso specifico apparente della muratura asciutta.

Dalla percentuale ponderale media, quale viene accertata di solito nei laboratori di Igiene, si passa dunque facilmente alla percentuale volumetrica media, moltiplicandola per il peso specifico della muratura asciutta (6).

(4) Cfr. V. DE FERMO e R. TECCE, *L'umidità delle abitazioni*, « Annali di Igiene », 1935, pag. 389.

(5) Cfr. F. SALMOIRAGHI, *Materiali naturali da costruzione*, Hoepli, Milano, 1892, pag. 121.

(6) I pesi specifici medi delle murature usuali possono essere assunti come segue:

La percentuale volumetrica ci dà una misura omogenea con quella lineare dell'altezza di imbibizione; infatti quando diciamo: — questa muratura contiene, rispetto al volume, in media, il 7 % d'acqua — se immaginiamo un prisma di muro alto un metro, possiamo anche immaginare che vi sia contenuto un volume d'acqua alto 7 centimetri.

In tal modo i due elementi numerici caratteristici di ogni stato di umidità muraria (altezza di assorbimento e percentuale d'acqua) vengono riportati entrambi a due misure lineari, anzi meglio, a due misure lineari sulla verticale.

Circa l'altezza di assorbimento, ammesso con lo SCALA, e concordemente con i risultati delle nostre ricerche, che una percentuale umida inferiore al 3 % sia normale nelle vecchie murature sane, considereremo abnorme soltanto quella eccedente, e chiameremo d'ora in avanti *altezza di assorbimento* la misura verticale della fascia umida di un muro, dal suo piede fino alla linea dove l'umidità è ridotta circa al 3 %: è la linea molto spesso visibile di demarcazione fra intonaco umido, più scuro, e quello soprastante asciutto e chiaro.

Per esempio (fig. 3), nella parete a sinistra del portone di ingresso della Sapienza a Roma, caso evidente e grave di umidità, l'altezza di assorbimento è chiaramente visibile anche al passante; la sua misura dal pavimento interno del portico è di m. 3,10; l'umidità media ponderale risulta, dall'analisi dei tre campioni prelevati (?), dell'11,66 % e di conseguenza quella media dannosa dell'8,66 %; tale umidità ponderale media, tradotta in volumetrica, e cioè moltiplicata per il peso specifico (1,4) della muratura di tufo, equivale al 12,12 %; se lungo i m. 3,10

muratura di mattoni pieni	1,6
muratura di mattoni forati	1,1
muratura di tufo romano	1,4
muratura di pietrame (calcare, arenaria, scisto)	2,3
calcestruzzo ordinario con selce e malta di pozzolana	2,3
calcestruzzo di cemento non armato	2,4

Cfr. E. MARRULLIER, *Guida pratica per la costruzione degli edifici*, U.T.E.T.; Torino, 1921.

(?) I tre campioni hanno dato le seguenti percentuali:

a m. 0,40 dal pavimento, umidità	16,5 %
a m. 1,40 dal pavimento, umidità	11,8 %
a m. 2,40 dal pavimento, umidità	6,7 %

L'andamento della linea delle percentuali è praticamente rettilineo; la caduta di umidità rapida, circa il 5 % per ogni metro di altezza, caso tipico delle murature ventilate (cfr. figura 1). Infatti il porticato interno della Sapienza è aperto; il muro risulta esposto con entrambe le facce all'aria libera.

dell'altezza di assorbimento isoliamo con il pensiero tre prismi di muro, alti un metro ciascuno, l'umidità media contenuta in ciascuno di essi è misurata da un'altezza d'acqua di cm. 12,12. Su tutta l'altezza di assorbimento del muro l'umidità *totale* sarà di m. 3,10 per m. $0,1212 = m. 0,375$. Più pedestremente: se tutta l'umidità del muro si raccogliesse in acqua entro la base, come se il muro fosse un serbatoio vuoto, vi raggiungerebbe l'altezza di 375 millimetri.

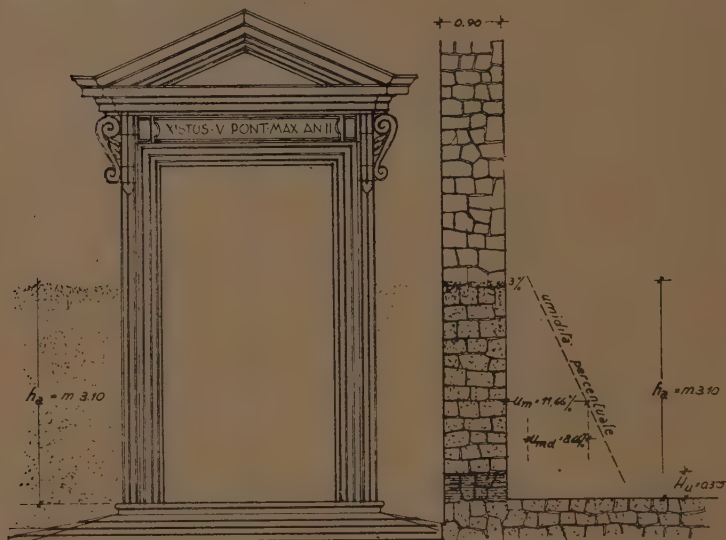


Fig. 3. - Vista e sezione del muro della « Sapienza ».

Questa altezza è dunque quella di una colonna d'acqua, cioè di un carico: nasce così il concetto di *carico equivalente all'umidità dannosa che imbeve la muratura*. Proponiamo di introdurlo come misura dell'umidità delle vecchie murature, e di chiamarlo *carico umido dannoso*, indicandolo col simbolo H_u .

Con ciò ogni caso di umidità muraria diventa rappresentabile in base ad una sola misura lineare, e tutti i casi diventano comparabili tra loro. Il carico umido dannoso, caratteristico di ogni muro umido, è *indipendente dallo spessore del muro*; quando muri di diverso spessore, e dello stesso peso specifico, sono imbevuti fino alla stessa altezza e con la stessa percentuale media di contenuto umido, la gravità del male è identica e rappresentabile dalla stessa cifra di carico.

Indicando dunque con:

h_a l'altezza di assorbimento (che è raramente superiore ai m. 4 dal piano stradale);

u_{md} l'umidità ponderale *media dannosa*, e cioè la media eccedente il 3 % (media che oscilla di solito fra l'1 % e il 10 %);

p il peso specifico della muratura asciutta, si può stabilire l'eguaglianza:

$$[1] \quad h_a \cdot u_{md} \cdot p = H_u$$

dove con H_u viene precisato il detto *carico umido dannoso*, cioè quello che rappresenta l'umidità eccedente, per Roma, il 3 %; se l'altezza di assorbimento (h_a) è espressa in metri lineari, anche il carico umido dannoso (H_u) risulta espresso in metri d'acqua. Per il caso rappresentato dalla fig. 2 si ha:

$$h_a \cdot u_{md} \cdot p = m. 3,10 \times \frac{8,66}{100} \times 1,4 = m. 0,375.$$

Non è a nostra conoscenza che questo sistema di espressione della umidità capillare delle vecchie murature per mezzo del carico d'acqua contenutovi sia mai stato proposto, ma ci sembra tanto semplice che, nei limiti di indagine pratica per i quali è suggerito, dovrebbe riuscire accettabile⁽⁸⁾. Avremmo finalmente un criterio di comparazione dei

⁽⁸⁾ In complesso per accertare il carico umido dannoso di un vecchio muro bastano: la misura lineare dell'altezza di assorbimento, che spesso è indicata dal limite dell'alterazione di colore subita dall'intonaco, e tre analisi ponderali di campioni murari, prelevati sulla stessa linea verticale, i quali occorrono per dedurre la media della parete. Quattro dati in tutto.

Per il prelevamento dei campioni conviene scegliere una verticale sulla parete, e prelevare su questa verticale tre o quattro campioni a distanza di un metro l'uno dall'altro, per esempio cominciando dal pavimento a metri 0,20-1,20-2,20-3,20, oppure come si è operato per le analisi citate in questo studio a metri 0,40-1,40-2,40 dal pavimento. I campioni debbono essere estratti nello spessore del muro alla profondità di 20-25 centimetri sotto la superficie della parete; per la manualità dell'operazione, la trivella di Pasca, talvolta suggerita nei trattati di Igiene, si riscontra poco pratica: ottimo l'impiego di un tubo di acciaio trafilato, il comune Mannesmann, da due terzi di pollice, col bordo dentellato e mantenuto accuratamente tagliente.

Circa la misura dell'altezza di assorbimento (h_a), quando questa non sia resa visibile dal colore più scuro dell'intonaco, occorre determinarla per tentativi, prelevando campioni di muro, in altezza, fino a che l'analisi accusi il diminuire della percentuale umida al disotto del 3 %; si può però dedurre quasi sempre l'altezza di assorbimento dall'andamento della curva delle percentuali umide dei campioni presi sulla stessa verticale, accertando qual'è la diminuzione media dell'umidità per ogni metro di altezza. In quei casi particolari (vedi esempio del Pantheon nella fig. 1) nei quali l'andamento della percentuale umida è pressochè costante in altezza, si prenda per altezza di assorbimento quella dell'intera parete fra pavimento e soffitto, salvo ad attribuire un altro carico capillare alla corrispondente parete del piano soprastante. Il caso è piuttosto raro.

diversi casi, e la possibilità di una scala per l'apprezzamento del danno da combattere, anche oltre il limite di abitabilità.

Infine, poichè manca una nomenclatura specifica della materia, proponiamo l'uso dei termini riportati nella figura 4, i quali risultano già tutti chiariti da quanto si è detto, eccetto che per il termine *invaso dannoso* del quale diremo più avanti.

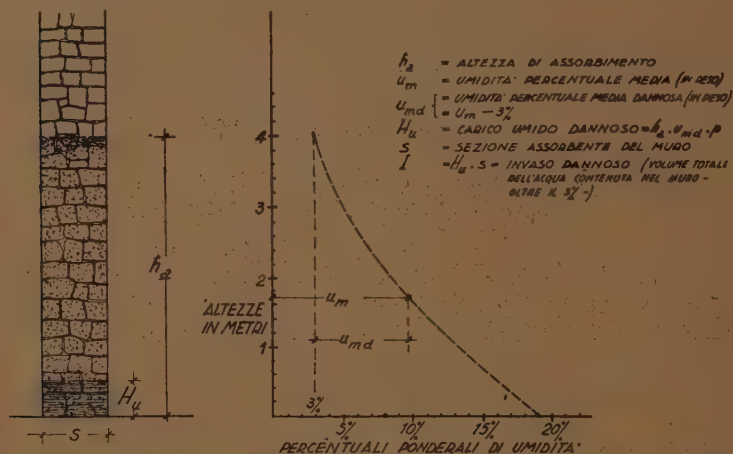


Fig. 4. Rappresentazione e nomenclatura che si propone per le caratteristiche di umidità di un muro vecchio.

È interessante osservare che la misura dell'umidità muraria espressa come carico d'acqua è applicabile a qualunque struttura: per esempio, nel magazzino delle pubblicazioni (figura 2) a Palazzo Corsini, che poggia su di una robusta volta, il pavimento per l'intera larghezza di metri 9,50 è tutto fortemente umido come i muri laterali; la determinazione del carico umido si ricava con la solita formula [1] sostituendo, in questo caso, all'altezza di assorbimento del muro (h_a) la larghezza (l_a) del pavimento, compresa tra i muri che trasmettono l'umidità. Si ha:

$$l_a \cdot u_{md} \cdot p = m. 9,5 \times \frac{5,26}{100} \times 1,4 = 0,686.$$

Il pavimento presenta dunque un carico umido di 686 millimetri, superiore cioè alla somma dei carichi delle due pareti principali che è soltanto di 522 millimetri; il suo apporto all'umidità totale dell'ambiente è quasi del 60 %, contro poco più del 40 % dato dalle pareti.

Nei progetti di risanamento occorre tenere il debito conto della preponderante importanza che nei piani rialzati assume la struttura pavi-

mento-volta come sorgente di umidità, tanto più che tutti gli antichi edifici hanno gli scantinati coperti a volta.

Un'altra osservazione interessante è infine quella che, moltiplicando la cifra del carico umido dannoso per l'area della sezione orizzontale della muratura, e cioè una misura lineare per una di superficie, si ha il *volume totale dell'acqua dannosa contenuta nella muratura*, volume che nella figura 4 è stato chiamato *invaso dannoso* ⁽⁹⁾.

Il calcolo dell'invaso dannoso totale di un edificio si ottiene suddividendo la pianta dell'edificio in zone che abbiano ciascuna un determinato carico umido, e moltiplicando poi questo, espresso in metri, per la sezione di muratura corrispondente, espressa in metri quadrati; se anche i pavimenti sono umidi, occorrerà aggiungere l'invaso di questi.

Per Palazzo Corsini ci risulta un invasivo totale dannoso di circa 300 metri cubi di acqua: l'imponenza di questa cifra rende perplessi circa il tempo che potrà essere necessario al prosciugamento dell'edificio, nella ipotesi che i lavori intrapresi vengano ultimati e riescano a tagliare, almeno in buona parte, la nociva alimentazione idrica delle masse murarie. Purtroppo non esistono nella letteratura tecnica coefficienti di evaporazione superficiale di una muratura umida, e non è perciò possibile un calcolo del tempo di prosciugamento ⁽¹⁰⁾.

In tutti i casi la misura dell'invaso totale è un dato di partenza molto interessante, agli effetti dei progetti di risanamento.

Una buona procedura preliminare che ci permettiamo di suggerire, per lo studio di tali progetti, è quella di segnare sulla pianta dell'edificio tutti i carichi umidi di ciascuna zona, i quali servono a dare la sensazione immediata della distribuzione e della gravità dell'assorbimento nelle varie parti dell'edificio. L'esame comparativo dei carichi metterà in luce il motivo delle loro differenze: un carico molto alto, rispetto ai circostanti, deve trovare la sua giustificazione in tre ordini diversi di cause, in quanto può essere imputabile o ad una particolare struttura muraria più assorbente, o ad una minore aerazione ed evaporazione delle pareti, od infine ad una maggiore alimentazione idrica dal basso, per

(9) La specificazione di «dannoso» tanto se applicato al percento di umidità, quanto se applicato all'invaso d'acqua, ricorda che ci riferiamo sempre alla umidità muraria abnorme, eccedente cioè il 3 %.

(10) L'imprecisione di tale calcolo è così indicata da U. BORDONI nel caso analogo degli essiccatoi: «Non sappiamo precisare in che modo la velocità di evaporazione dell'acqua contenuta nella sostanza da essicare dipenda dalla temperatura, umidità relativa, velocità dell'aria che circonda la sostanza, nè in che modo dipenda dalla porosità della sostanza stessa». Cfr. *Lezioni di Fisica tecnica*, 1911-12, Roma, pag. 969.

esempio in relazione alla distanza della falda freatica o ad altra causa. Un andamento omogeneo dei carichi è indice della uniformità delle cause agenti in tutta la pianta dell'edificio.

* * *

L'esperienza fatta ha confermato che il dosaggio dell'acqua contenuta nelle murature costituisce fino ad oggi l'unico e sicuro strumento diagnostico dell'umidità nelle medesime. Tuttavia ha anche dimostrato che per quanto riguarda gli edifici umidi di vecchia data, a differenza di quanto accade in quelli di recente costruzione, occorre un grande numero di analisi, e di conseguenza una abbondante crivellatura delle pareti per il prelievo dei campioni.

Una tale crivellatura qualche volta non è affatto possibile, come nel caso delle pareti affrescate e decorate o comunque di pregio artistico od archeologico, e qualche altra volta, come in quelle staticamente malsicure, è tollerabile solo in misura insufficiente ai fini di una diagnosi esatta. A tale inconveniente si aggiunge, quando sia stato possibile il prelevamento di campioni, il tempo relativamente lungo per ottenere dal laboratorio il responso analitico.

L'idea di sostituire all'esame chimico del campione umido, trasportato in laboratorio, una misura rapida e diretta sul luogo (cioè una lettura strumentale sulla muratura stessa), si è concretata nel tentativo di utilizzare la differente resistenza elettrica che lo stesso tipo di muratura si presume debba offrire a seconda della percentuale di umidità contenuta.

È un tentativo che abbiamo condotto con mezzi modesti e del quale rendiamo conto qui brevemente, quale oggetto secondario di questa Nota, e senza darvi una importanza superiore a quella che può avere un semplice scandaglio. Infatti le prove da noi tentate a Palazzo Corsini usando piccole sonde superficiali metalliche, infisse per quattro centimetri di profondità e poste alla distanza di quattro centimetri l'una dall'altra, per il fatto di essere state eseguite con metodi e mezzi rudimentali, debbono essere considerate come semplici prove di orientamento. Tuttavia, sia pure come tali, se da un lato hanno rivelato le difficoltà, dall'altro lasciano sperare nella possibilità pratica di risolvere il problema per questa rapida via.

Si è già, infatti, potuta stabilire una certa relazione fra il grado di umidità di una data muratura e la resistenza elettrica misurata su di essa nel modo anzidetto, e non è perciò improbabile di poter giungere, sulla base di una larga serie di prove, a concretare una scala di resistenze, specifiche per ogni tipo di muratura normale, dalle quali si possa risalire con sufficiente approssimazione al grado di umidità di ciascun tipo di muratura. Dette scale (o, per meglio dire, curve caratteristiche) do-

vranno naturalmente essere rilevate tenendo conto dei fattori secondariamente più importanti che possono influire sul valore della resistenza che si misura (composizione chimica dei leganti, conducibilità dell'acqua di infiltrazione, e così via); inoltre nel corso delle prove stesse si dovranno desumere le eventuali rettifiche di metodo (ad esempio: impiego di corrente continua o alternata; uso di elettrodi di varia forma o di elettrodi pastosi; uso di elettrodi fissi o asportabili; uso di elettrodi impolarizzabili, ecc.).

È anche da esaminare l'opportunità di ricorrere alla misura di altri parametri elettrici (in luogo o in più della resistenza ohmica) che possano eventualmente meglio caratterizzare il grado di umidità della muratura o che, in linea subordinata, possano rendere più precisa la misura della resistenza ohmica stessa, nelle particolari difficili condizioni già accennate.

I risultati ottenuti in questo campo sono per ora modesti. Ci auguriamo però di poter completare il lavoro intrapreso.

Geofisica. — *Campo magnetico normale per la declinazione in Italia secondo le determinazioni dell'Istituto Geografico Militare.* Nota I ⁽¹⁾ di CARLO MORELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

PREMESSA.

Le determinazioni magnetiche che durante il secolo scorso sono state eseguite in Italia, si sono concluse con la carta magnetica del Chi-stoni e Palazzo al 1892,0. Quest'opera, pregevolissima per l'epoca in cui ebbe origine, è rimasta poi per più di quaranta anni l'unica carta magnetica originale per il nostro paese, in quanto le successive edizioni non sono che aggiornamenti di essa. Comprendendo però solo 200 stazioni, con una densità media di una stazione ogni 1500 chilometri quadrati circa, non poteva più rispondere alle moderne esigenze, sia militari sia civili.

Per ovviare a questa grave lacuna per il magnetismo in Italia, l'Istituto Geografico Militare iniziava nel 1932 un nuovo sistematico rilevamento magnetico di tutto il territorio nazionale; esso ha portato per la declinazione e per la componente orizzontale alla costruzione delle carte delle isogone e delle isodinamiche che vengono aggiornate dall'Istituto Geografico Militare in media ogni cinque anni, ed è tutt'ora in corso per l'inclinazione ⁽²⁾.

La nuova rete magnetica comprende 1496 stazioni nei tre predetti elementi, più 33 stazioni nella sola declinazione (per l'artiglieria), ad una distanza media di circa 20 chilometri l'una dall'altra: risultava quindi sufficientemente fitta per iniziare lo studio della distribuzione normale degli elementi magnetici in Italia.

Questo è stato fatto dall'Istituto Geografico Militare, anche allo scopo di porre i fondamenti per la costruzione delle carte delle isanomalie.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1943.

⁽²⁾ MORELLI C., *Dodici anni di misure magnetiche in Italia dell'Istituto Geografico Militare* (« Scienza e Tecnica », vol. 7°, 1943).

importanti fra l'altro per le indicazioni che si potranno ricavare sulla geologia profonda dell'Italia.

Qui si espone il risultato dei calcoli per la *declinazione*; in successivi lavori verranno esaminate la *componente orizzontale* e quella *verticale*.

CAMPO MAGNETICO NORMALE ED ANOMALIE.

Si definiscono quali *anomalie magnetiche* le differenze fra i valori osservati dei vari elementi e certi valori omologhi denominati *normali*, dedotti per via teorica.

A seconda dei risultati che si vogliono raggiungere e dell'estensione della regione considerata, le anomalie si distinguono in *terrestri o del 1° ordine, regionali o del 2° ordine e locali o del 3° ordine*.

Per le prime, si ammette che se la terra fosse omogenea (almeno negli strati superficiali) la distribuzione del campo magnetico terrestre alla sua superficie sarebbe in prima approssimazione quella di una sfera uniformemente magnetizzata, con i poli coincidenti con i poli magnetici terrestri. Le divergenze fra i valori del campo magnetico terrestre così calcolati partendo da sviluppi analitici del potenziale, e quelli osservati per zone molto estese costituiscono le *anomalie del 1° ordine*.

Per calcolare le *anomalie del 2° ordine o regionali*, si ricavano dall'insieme dei valori risultanti dal rilevamento magnetico di un paese opportuni sviluppi accorciati in serie di potenze, i cui coefficienti determinano il *campo magnetico normale* per quel paese. Le differenze fra i valori osservati e quelli risultanti dal calcolo per ogni stazione mettono in evidenza le eventuali anomalie regionali, quando investono una superficie abbastanza estesa.

Le *anomalie locali o del 3° ordine* sono quelle risultanti dagli scarti di singole stazioni o di alcune poche ricoprenti un'area limitata, dai valori ottenuti per esse col metodo precedente o più semplicemente interpolando linearmente i valori osservati nelle stazioni normali più vicine (in quanto nel limitato intorno considerato la superficie del 2° ordine più avanti definita si confonde con un piano).

Le anomalie *locali* sono dovute alla presenza di masse sotterranee con proprietà magnetiche diverse da quelle delle masse circostanti e di estensione molto limitata — al massimo alcuni chilometri in lunghezza ed in profondità.

Le anomalie *regionali* sono in relazione con la particolare struttura geologica dello strato superiore della crosta terrestre nella regione considerata, fino ad una profondità di circa 20 chilometri.

Per quelle *terrestri* le cause sono ancora poco note; coincidenze evidenti riscontrate in certi casi con le *anomalie isostatiche* possono far pensare a relazioni col magma sottostante che, nonostante l'elevate tempe-

rature, molto probabilmente superiori al punto di Curie ⁽¹⁾, conserverebbe tuttavia un magnetismo residuo molto debole ma compensato dalle notevoli estensioni delle masse. Molte altre cause possono però influire sulle anomalie terrestri, per cui conviene considerarle con molta prudenza.

Col presente lavoro l'Istituto Geografico Militare, basandosi sulle risultanze della rete magnetica del 1° ordine per l'Italia, ha inteso porre i fondamenti per la determinazione delle *anomalie regionali* per la declinazione.

FORMULE RAPPRESENTATIVE PER IL CAMPO MAGNETICO NORMALE DELLA DECLINAZIONE IN ITALIA.

La discussione che segue sarà svolta per un elemento particolare, la *declinazione*, ma è evidente che essa può essere estesa in generale qualunque sia l'elemento magnetico — o naturale — considerato.

Per ogni punto della terra in un determinato istante la declinazione avrà uno ed un solo valore; cioè indicando con φ e λ le coordinate geografiche, con h la quota e con t il tempo, potremo scrivere

$$[1] \quad D = f(\varphi, \lambda, h, t),$$

con f simbolo di funzione monovalente.

Dal punto di vista teorico il problema consiste nel ricercare, in base ai valori osservati, la particolare forma della funzione f , in modo da poter calcolare il valore di D per un punto qualunque della superficie fisica terrestre ed in qualunque epoca. Però, per la grande ed irregolare variabilità della declinazione, non è possibile praticamente determinare la f in dipendenza contemporanea di tutte le variabili φ, λ, h, t , per cui si usa ricorrere alle due seguenti limitazioni:

a) si trascura l'influenza dell'altezza, che nell'ordine di grandezza raggiungibile sulla terra non comporta variazioni apprezzabili nel campo normale;

b) si considera separatamente la variazione nel tempo. Cioè, tutti i valori s'intendono riportati ad una determinata epoca, per la quale si elaborano i risultati e si costruiscono le carte. Le variazioni secolari e diurna consentono poi di passare ad un altro istante qualunque.

Con ciò la [1] si riduce alla funzione seguente

$$[2] \quad D = f(\varphi, \lambda).$$

(1) Com'è noto, le proprietà magnetiche delle rocce diminuiscono con l'aumentare della temperatura. Il punto di Curie è quella temperatura alla quale esse si annullano.

Nel caso in esame, si è assunta come epoca di riferimento il 1935,0, alla quale sono state inizialmente ridotte tutte le osservazioni di campagna dell'Istituto Geografico Militare (1).

Il secondo membro della [2] si rappresenta in generale:

— mediante funzioni sferiche, quando la superficie considerata abbraccia tutta la terra o parti molto estese di essa;

— mediante sviluppi accorciati in serie di potenze delle coordinate geografiche dei singoli punti, per regioni più limitate.

Questo secondo caso, come è naturale, è una particolarizzazione del primo.

L'estensione della regione e la precisione che si richiede nei calcoli fissano l'ordine di approssimazione necessario nei singoli casi.

Così, per esempio, per calotte sferiche del diametro di qualche centinaio di chilometri è sufficiente in generale arrestare gli sviluppi in serie ai termini del 1° ordine; per calotte fino a circa 1500–2000 chilometri di diametro basterà il 2° ordine; e così via (2).

Per l'Italia era quindi lecito ritenere sufficiente a priori per la [2] uno sviluppo accorciato in serie di potenze del tipo seguente:

$$[3] \quad D = D_0 + x_1 \cdot \Delta\varphi + x_2 \cdot \Delta\lambda + x_3 \cdot \Delta\varphi^2 + x_4 \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\lambda + x_5 \cdot \Delta\lambda^2$$

dove con $D_0 = D(\varphi_0, \lambda_0)$ abbiamo indicato il valore della declinazione in un punto origine (φ_0, λ_0) , e con $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ le differenze delle coordinate geografiche da questo punto.

Per assicurare nel miglior modo possibile alle formule l'omogeneità in tutte le direzioni rispetto alla distanza, si è scelto come punto origine per gli sviluppi in serie il seguente, molto prossimo al centro geografico dell'Italia (3):

$$\varphi_0 = 42^\circ 30' = 2550' \quad , \quad \lambda_0 = 0^\circ.$$

Come primo passo si sono cercati quindi dei valori approssimati per le sei incognite che figurano nello sviluppo [3], allo scopo di semplificare – nel modo che avanti si vedrà – i calcoli. A tale fine sono state considerate sei stazioni fondamentali (nelle quali le misure sono state effettuate con la maggiore accuratezza), in posizione normale nei confronti della distribuzione generale degli elementi magnetici in Italia ed opportunamente

(1) In altro lavoro verrà comunicato l'andamento delle isopore per l'Italia (per determinare le quali l'Istituto Geografico Militare sta attualmente provvedendo alla ripetizione delle stazioni fondamentali), in modo che per ogni punto sia possibile riportarsi all'epoca attuale.

(2) Si osservi che questi valori sono puramente indicativi, in quanto dipendono anche dalla conformazione del campo, che è variabile da regione a regione.

(3) Qui e nel seguito come meridiano di riferimento si intende sempre quello di Roma.

distribuite in modo da inquadrare tutto il Paese. Per esse si riporta (tabella I) le coordinate geografiche riferite al centro predetto ed il valore della declinazione magnetica (tutti i valori della declinazione riportati, qui e nel seguito, sono sempre *occidentali*).

TABELLA I.

Stazione	$\varphi - \varphi_0$	$\lambda - \lambda_0$	D 1935,0
Varese	+ 3° 24',9	— 3° 38',6	6° 41',9
Monfalcone	+ 3° 18',1	+ 1° 09',2	4° 35',4
Ferrara	+ 2° 14',5	— 0° 52',3	5° 29',6
Norcia	+ 0° 16',1	+ 0° 38',4	4° 43',9
Noci	— 1° 44',0	+ 4° 39',3	3° 12',7
Caltanissetta	— 5° 03',7	+ 1° 33',8	4° 20',7

Esse danno origine al seguente sistema di sei equazioni lineari con incognite i valori approssimati \bar{D}_0 e \bar{x}_i ($i = 1, \dots, 5$) dei sei coefficienti dello sviluppo [3]:

$$\begin{aligned}
 &\bar{D}_0 + 204,9 \bar{x}_1 - 218,6 \bar{x}_2 + 41984,01 \bar{x}_3 - 44791,14 \bar{x}_4 + 47785,96 \bar{x}_5 = 401,9 \\
 &\bar{D}_0 + 198,1 \bar{x}_1 + 69,2 \bar{x}_2 + 39243,61 \bar{x}_3 + 13708,52 \bar{x}_4 + 4788,64 \bar{x}_5 = 275,4 \\
 &\bar{D}_0 + 134,5 \bar{x}_1 - 52,3 \bar{x}_2 + 18090,25 \bar{x}_3 - 7034,35 \bar{x}_4 + 2735,29 \bar{x}_5 = 329,6 \\
 &\bar{D}_0 + 16,1 \bar{x}_1 + 38,4 \bar{x}_2 + 259,21 \bar{x}_3 + 618,24 \bar{x}_4 + 1474,56 \bar{x}_5 = 283,9 \\
 &\bar{D}_0 - 104,0 \bar{x}_1 + 279,4 \bar{x}_2 + 10816,00 \bar{x}_3 - 29047,20 \bar{x}_4 + 78008,49 \bar{x}_5 = 192,7 \\
 &\bar{D}_0 - 303,7 \bar{x}_1 + 95,8 \bar{x}_2 + 92233,69 \bar{x}_3 - 29094,46 \bar{x}_4 + 9177,64 \bar{x}_5 = 260,7
 \end{aligned}$$

Risolvendolo, si ottengono i seguenti valori per le quantità di cui sopra:

$$[4] \quad \begin{cases} \bar{D}_0 = + 4^\circ 55',0843 & ; \quad \bar{x}_3 = - 0,000036 ; \\ \bar{x}_1 = + 0,1001 & ; \quad \bar{x}_4 = - 0,001115 ; \\ \bar{x}_2 = - 0,2922 & ; \quad \bar{x}_5 = - 0,000544 . \end{cases}$$

Pur risultando da un calcolo approssimato, il valore ottenuto per \bar{D}_0 è in buon accordo con quello di + 4° 57' risultante dalla carta per il punto (φ_0 , λ_0) sopra fissato.

Si tratta ora di calcolare l'espressione generale per la distribuzione del campo del vettore declinazione, cioè di calcolare i sei coefficienti dell'espressione [3] tenendo conto dei valori osservati nelle 1529 stazioni della rete di 1° ordine.

Geofisica. — *Campo magnetico normale per la declinazione in Italia secondo le determinazioni dell'Istituto Geografico Militare.* Nota II ⁽¹⁾ di CARLO MORELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

Ottenuti ⁽²⁾ i valori approssimati per le sei incognite che figurano nello sviluppo

$$[3] \quad D = D_0 + x_1 \cdot \Delta\varphi + x_2 \cdot \Delta\lambda + x_3 \cdot \Delta\varphi^2 + x_4 \cdot \Delta\varphi \Delta\lambda + x_5 \cdot \Delta\lambda^2,$$

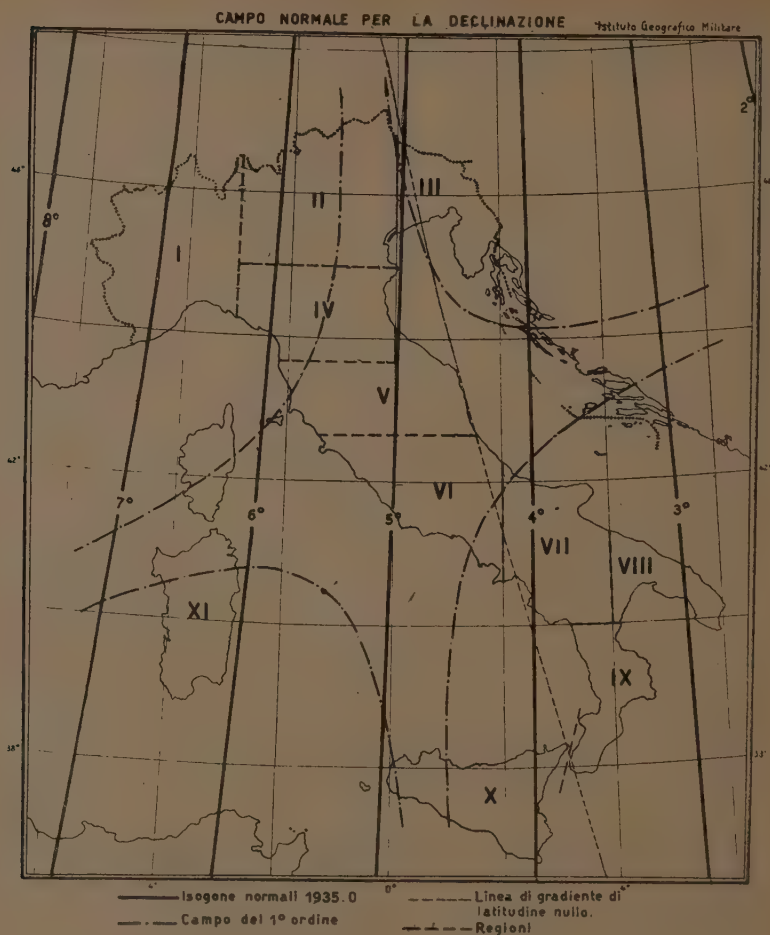
si tratta ora di ricercare l'espressione generale per la distribuzione del campo del vettore declinazione in Italia, cioè di calcolare i sei coefficienti della [3] tenendo conto dei valori osservati nelle 1529 stazioni della rete del 1° ordine.

A tal fine, si sarebbero potute scrivere le 1529 equazioni di 1° grado risultanti sostituendo successivamente nella [3] le coordinate geografiche e la declinazione di tutte le stazioni: il metodo dei minimi quadrati avrebbe permesso di ricavare il valore più probabile delle incognite. La risoluzione del sistema di 1529 equazioni nelle sei incognite avrebbe portato però a calcoli eccessivamente laboriosi, per cui si è ritenuto opportuno ridurre il lavoro dividendo tutto il territorio in 11 regioni (v. figura) e sostituendo al sistema di equazioni risultante per ognuna di queste la loro media *dopo aver scartato tutte le stazioni dove l'anomalia era evidente* (col che le stazioni considerate si riducono a 1017).

Ciò equivale ad ammettere che il valore medio della declinazione per le stazioni di una regione sia il valore nel punto che ha per coordinate la media delle coordinate delle singole stazioni: cioè, che la declinazione vari *linearmente* nella regione considerata. Questo era giustificato *a priori* data la limitata estensione delle singole regioni; una conferma si è avuta *a posteriori* dalla piccolezza degli scarti fra il valore medio D_m ed il valore D_0 risultante dalla carta per lo stesso punto (v. tabella II). Ciò dimostra anche che le stazioni centrali così definite si possono considerare normali.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1943.

⁽²⁾ Ved. pag. 26.



Il metodo dei minimi quadrati applicato direttamente alle 11 equazioni che si possono impostare con questi valori, presenterebbe difficoltà di calcolo data la grandezza dei coefficienti e la loro eterogeneità. Introduciamo perciò i coefficienti approssimati [4] dianzi ottenuti, e poniamo:

$$[5] \quad \begin{cases} D_0 = \bar{D}_0 + a & ; & x_3 = \bar{x}_3 + d; \\ x_1 = \bar{x}_1 + b & ; & x_4 = \bar{x}_4 + e; \\ x_2 = \bar{x}_2 + c & ; & x_5 = \bar{x}_5 + f. \end{cases}$$

TABELLA II.

Regione	N. stazioni	φ_m	λ_m	D_m	$D_m - D_c$
I	119	45° 02',56	— 4° 03',74	6° 45',060	— 1'
II	139	45° 58',16	— 1° 21',09	5° 37',590	0'
III	76	45° 47',41	+ 1° 06',46	4° 35',262	— 1',5
IV	95	44° 22',43	— 1° 22',92	5° 35',528	+ 1',5
V	103	43° 12',94	— 0° 16',10	5° 05',235	0'
VI	107	41° 59',91	+ 0° 34',93	4° 44',934	0'
VII	98	41° 06',53	+ 2° 56',93	3° 52',124	— 1'
VIII	49	40° 30',47	+ 4° 56',35	3° 08',124	— 1'
IX	59	38° 57',98	+ 3° 50',09	3° 33',903	+ 1',5
X	94	37° 38',39	+ 1° 23',39	4° 24',457	— 2'
XI	78	40° 05',27	— 3° 24',51	6° 18',738	+ 1'

Allora la [3] diventa

$$[6] \quad a + b \cdot \Delta\varphi + c \cdot \Delta\lambda + d \cdot \Delta\varphi^2 + e \Delta\varphi \Delta\lambda + f \Delta\lambda^2 - D_1 = 0,$$

dove si è posto

$$[7] \quad D_1 = D_m - 295.0843 - 0,1001 \Delta\varphi + 0,2922 \Delta\lambda + 0,000036 \Delta\varphi^2 + \\ + 0,001115 \Delta\varphi \Delta\lambda + 0,000544 \Delta\lambda^2,$$

Operando ancora il cambio di unità seguente

$$[8] \quad b' = 100 b, \quad c' = 100 c, \quad d' = 10.000 d, \quad e' = 10.000 e, \quad f' = 10.000 f,$$

la [6] diventa

$$a + b' \frac{\Delta\varphi}{100} + c' \frac{\Delta\lambda}{100} + d' \left(\frac{\Delta\varphi}{100} \right)^2 + e' \frac{\Delta\varphi}{100} \frac{\Delta\lambda}{100} + f' \left(\frac{\Delta\lambda}{100} \right)^2 - D_1 = 0.$$

Basta quindi dividere $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ per 100, per avere un sistema di equazioni i cui coefficienti sono molto omogenei; ciò permette anche di conservare nei calcoli successivi sempre e soltanto 4 decimali.

Il sistema generato risulta allora:

$$\begin{aligned}
 a + 1,5256 \, b' - 2,4374 \, c' + 2,3275 \, d' - 3,7185 \, e' + 5,9409 \, f' - 15,1787 &= 0 \\
 a + 2,0816 \, b' - 0,8109 \, c' + 4,3331 \, d' - 1,6880 \, e' + 0,6576 \, f' + 15,7097 &= 0 \\
 a + 1,9741 \, b' + 0,6646 \, c' + 3,8971 \, d' + 1,3120 \, e' + 0,4417 \, f' + 1,7288 &= 0 \\
 a + 1,1243 \, b' - 0,8292 \, c' + 1,2641 \, d' - 0,9323 \, e' + 0,6876 \, f' + 1,2392 &= 0 \\
 a + 0,4294 \, b' - 0,1610 \, c' + 0,1844 \, d' - 0,0691 \, e' + 0,0259 \, f' - 0,5848 &= 0 \\
 a - 0,3009 \, b' + 0,3493 \, c' + 0,0905 \, d' - 0,1051 \, e' + 0,1220 \, f' - 2,5926 &= 0 \\
 a - 0,8347 \, b' + 1,7693 \, c' + 0,6967 \, d' - 1,4768 \, e' + 3,1304 \, f' + 2,0927 &= 0 \\
 a - 1,1953 \, b' + 2,9635 \, c' + 1,4287 \, d' - 3,5423 \, e' + 8,7823 \, f' - 0,3916 &= 0 \\
 a - 2,1202 \, b' + 2,3009 \, c' + 4,4952 \, d' - 4,8784 \, e' + 5,2941 \, f' + 16,7018 &= 0 \\
 a - 2,9161 \, b' + 0,8839 \, c' + 8,5036 \, d' - 2,5775 \, e' + 0,7813 \, f' - 2,9630 &= 0 \\
 a - 1,4473 \, b' - 2,0451 \, c' + 2,0947 \, d' + 2,9599 \, e' + 4,1824 \, f' - 94,8927 &= 0.
 \end{aligned}$$

Da esso si ricava il seguente sistema normale ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned}
 11,0000 \, a - 1,6795 \, b' + 2,6479 \, c' + 29,3156 \, d' - 14,7161 \, e' + 30,0462 \, f' - 79,1312 &= 0 \\
 - 1,6795 \, a + 29,3156 \, b' - 14,7161 \, c' - 17,9118 \, d' + 11,3991 \, e' - 20,6147 \, f' + 124,1684 &= 0 \\
 2,6479 \, a - 14,7161 \, b' + 30,0462 \, c' + 11,3991 \, d' - 20,6147 \, e' + 20,6316 \, f' + 255,9851 &= 0 \\
 29,3156 \, a - 17,9118 \, b' + 11,3991 \, c' + 255,9851 \, d' - 55,7937 \, e' + 73,2141 \, f' - 107,2868 &= 0 \\
 - 14,7161 \, a + 11,3991 \, b' - 20,6147 \, c' - 55,7937 \, d' + 73,2141 \, e' - 74,4709 \, f' - 325,0674 &= 0 \\
 30,0462 \, a - 20,6147 \, b' + 20,6316 \, c' + 73,2141 \, d' - 74,4709 \, e' + 169,4688 \, f' - 386,2214 &= 0
 \end{aligned}$$

Nella risoluzione con classico metodo di Gaus, il sistema risolvente diventa:

$$\begin{aligned}
 11,0000 \, a - 1,6795 \, b' + 2,6479 \, c' + 29,3156 \, d' - 14,7161 \, e' + 30,0462 \, f' - 79,1312 &= 0 \\
 29,0592 \, b' - 14,3118 \, c' - 13,4358 \, d' + 9,1522 \, e' - 16,0272 \, f' + 112,0865 &= 0 \\
 22,3602 \, c' - 2,2749 \, d' - 12,5648 \, e' + 5,5054 \, f' + 330,2366 &= 0 \\
 171,4138 \, d' - 13,6212 \, e' - 13,7109 \, f' + 189,0244 &= 0 \\
 42,5011 \, e' - 27,2224 \, f' - 265,6435 &= 0 \\
 58,6704 \, f' - 334,5938 &= 0
 \end{aligned}$$

(¹) Non si è ritenuto di tener conto nel passaggio dal sistema generato al sistema normale del numero delle stazioni eseguite nelle singole regioni (*pesi*), perchè altrimenti i risultati anzichè avere un significato fisico sarebbero stati dipendenti dalla frequenza delle stazioni, che non è uniforme per tutto il paese.

da cui si deducono i seguenti valori per l'incognite

$$\begin{aligned} a &= + 5',2974 & , & \quad d' = + 0,1627, \\ b' &= - 8,9029 & , & \quad e' = + 10,0122, \\ c' &= - 10,5724 & , & \quad f' = + 5,8734, \end{aligned}$$

con un errore medio unitario

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{5}} = \pm 1',493,$$

dove v sono i residui dell'equazioni generate.

Tenendo conto delle sostituzioni precedenti, si ha in definitiva

$$[9] \quad \left\{ \begin{array}{l} D_0 = 5^{\circ} \quad 0',3817 \quad , \quad x_3 = 0,000020, \\ x_1 = \quad + 0,0111 \quad , \quad x_4 = 0,000114, \\ x_2 = \quad - 0,3979 \quad , \quad x_5 = 0,000043, \end{array} \right.$$

per cui la formula rappresentativa per la distribuzione normale della declinazione in Italia al 1935,0 risulta:

[10]

$$\begin{aligned} D_n &= 300',3817 + 0,0111 (\varphi - 2550') - 0,3979 \cdot \lambda - \\ &- 0,000020 (\varphi - 2550')^2 - 0,000114 (\varphi - 2550') \cdot \lambda + 0,000043 \cdot \lambda^2 \end{aligned}$$

A riprova della bontà dei risultati, si riportano (Tab. 3) i seguenti scarti tra i valori normali ottenuti con la [10] ed i valori medi per le 11 regioni di cui sopra:

Regione	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
$D_n - D_m$	- 0',33	- 1',29	- 1',22	- 0',20	- 2',08	+ 1',37	- 0',18	- 0',54	- 0',49	- 0',91	- 0',58

Come si vede, l'accordo è molto buono (errore medio: $\pm 1',49$), superiore anzi alla precisione media delle singole misure, Poichè gli scarti non sono di entità tale da rendere necessaria l'introduzione anche dei termini del 3° ordine, abbiamo una giustificazione a posteriori della validità della [3] per l'Italia.

Nell'approssimazione perseguita, si ritiene trascurabile anche il contributo dei termini del 2° ordine della [3] quando risulti minore di $|1'|$.

Osserviamo che ponendo questo contributo uguale ad $|1'|$, si ottiene in generale un sistema di coniche, che fissano il campo di validità della [3] ridotta al 1° ordine.

Nel caso particolare della [10], i termini del 2° ordine individuano una coppia di iperboli (v. figura), con centro nel punto origine ($42^{\circ}30',0^{\circ}$) e semiassi

$$a = 179,3 \text{ km.}, \quad b = 246,2 \text{ km.}$$

formanti un angolo di $-30^{\circ}32',2$ con gli assi cartesiani ortogonali assunti come riferimento.

Nella calotta centrale limitata da queste due iperboli, la [10] si riduce quindi alla seguente:

$$[10'] \quad D_n' = 300',3817 + 0,0111(\varphi - 2550') - 0,3979\lambda.$$

Questo risultato permetterà di semplificare notevolmente i calcoli nell'applicazione della [10], in quanto la superficie di validità del 1° ordine è circa la metà di quella complessiva dell'Italia, ed in essa per ogni stazione le operazioni si riducono ad un terzo.

GRADIENTI DI LATITUDINE E DI LUNGITUDINE.

Dalla [10] si ricavano le seguenti espressioni per i gradienti normali della declinazione con la latitudine (verso Nord) e con la longitudine (verso Est), in primi di declinazione per primi di variazione delle coordinate geografiche:

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \varphi}\right)_N = 0,0111 - 0,000040(\varphi - 2550') - 0,000114 \cdot \lambda$$

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \lambda}\right)_E = -0,3979 - 0,000114(\varphi - 2550') + 0,000086 \cdot \lambda$$

oppure in primi per chilometri:

$$[11] \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi_{\text{Km.}}}\right)_N &= 0,0060 - 0,000022(\varphi - 2550') - 0,000062 \cdot \lambda \\ \left(\frac{\partial D}{\partial \lambda_{\text{Km.}}}\right)_E &= \frac{1}{L_{\varphi}} [-0,3979 - 0,000114(\varphi - 2550') + 0,000086 \lambda], \end{aligned} \right.$$

dove L_{φ} è la lunghezza, in Km., di $1'$ di longitudine alla latitudine φ .

Le seguenti tabelle riportano questi gradienti per l'Italia, calcolati secondo le [11].

TABELLA IV.

Gradiente normale della declinazione (1'/Km.) per variazioni di latitudine.

$\lambda \backslash \varphi$	-6°	-4°	-2°	0°	$+2^\circ$	$+4^\circ$	$+6^\circ$
47°	+ 0,0224	+ 0,0150	+ 0,0075	+ 0,0001	- 0,0073	- 0,0148	- 0,0222
45°	- 0,0250	- 0,0176	+ 0,0101	+ 0,0027	- 0,0047	- 0,0122	- 0,0136
43°	+ 0,0276	+ 0,0202	+ 0,0127	+ 0,0053	- 0,0021	- 0,0096	- 0,0170
41°	+ 0,0303	+ 0,0229	+ 0,0154	+ 0,0080	+ 0,0006	- 0,0068	- 0,0143
39°	+ 0,0329	+ 0,0255	+ 0,0180	+ 0,0106	+ 0,0032	- 0,0043	- 0,0117
37°	+ 0,0356	+ 0,0282	+ 0,0207	+ 0,0133	+ 0,0059	- 0,0016	- 0,0090

TABELLA V.

Gradiente normale della declinazione (1'/Km.) per variazioni di longitudine.

$\lambda \backslash \varphi$	-6°	-4°	-2°	0°	$+2^\circ$	$+4^\circ$	$+6^\circ$
47°	- 0,3622	- 0,3540	- 0,3459	- 0,3377	- 0,3295	- 0,3214	- 0,3132
45°	- 0,3388	- 0,3310	- 0,3232	- 0,3154	- 0,3076	- 0,2998	- 0,2920
43°	- 0,3180	- 0,3103	- 0,3029	- 0,2953	- 0,2877	- 0,2802	- 0,2726
41°	- 0,2986	- 0,2912	- 0,2839	- 0,2766	- 0,2693	- 0,2620	- 0,2546
39°	- 0,2810	- 0,2738	- 0,2666	- 0,2594	- 0,2522	- 0,2450	- 0,2378
37°	- 0,2643	- 0,2573	- 0,2504	- 0,2434	- 0,2364	- 0,2295	- 0,2225

CONCLUSIONI

Da queste tabelle e dalle [11] si possono ricavare le seguenti indicazioni sul comportamento del campo normale della declinazione in Italia:

1° Nei riguardi della latitudine, esiste una *linea di gradiente zero* che separa il campo dove il gradiente è positivo (ad occidente) da quello dove è negativo (ad oriente). Come si vede dalla prima delle [11], questa linea è una retta che interseca le linee del reticolato geografico assunte come riferimento ($\varphi = 42^\circ 30'$; $\lambda = 0'$) nei punti ($47^\circ 03', 0^\circ$) e ($42^\circ 30', 1^\circ 37'$) e forma col parallelo origine un angolo di $109^\circ 32'$.

2° Poichè « gradiente positivo » vuol dire aumento della declinazione coll'aumentare della latitudine, e poichè la declinazione in Italia è occidentale, avremo che le isogone normali formeranno con i meridiani un angolo positivo ad occidente della linea di gradiente zero, negativo ad oriente: cioè, *le isogone normali costituiscono un sistema di curve convergenti con l'aumentare della latitudine sulla linea di gradiente di latitudine zero.*

3° Aumentando la latitudine, diminuisce di una quantità costante il gradiente positivo, aumenta (in valore assoluto) quello negativo:

$$\left(\frac{\delta^2 D}{\partial \varphi_{\text{Km.}}^2} \right)_{N, N} = -22 \cdot 10^{-6} \quad ('/\text{Km.}'),$$

cioè, le isogone normali formano un sistema uniformemente convergente con l'aumentare della latitudine.

4° Aumentando la longitudine, il gradiente di latitudine diminuisce ancora di una quantità costante:

$$\left(\frac{\delta^2 D}{\partial \varphi \partial \lambda_{\text{Km.}}} \right)_{N, E} = -62 \cdot 10^{-6} \quad ('/\text{Km.}').$$

5° Il gradiente di longitudine è sempre negativo, cioè *la declinazione diminuisce ovunque procedendo verso est.*

6° Il gradiente di longitudine diminuisce (aumenta in valore assoluto) con la latitudine e proporzionalmente a questa, cioè le isogone normali convergono verso nord (v. 2°):

$$\left(\frac{\delta^2 D}{\partial \lambda \partial \varphi_{\text{Km.}}} \right)_{E, N} = -111 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{L_{\varphi}} \quad ('/\text{Km.}').$$

7° Il gradiente di longitudine aumenta (diminuisce in valore assoluto) con la longitudine, per cui *le isogone si distanziano sempre più quanto si procede verso Est* (l'aumento è costante lungo un arco di parallelo):

$$\left(\frac{\delta^2 D}{\partial \lambda_{\text{Km.}}^2} \right)_{E, E} = 86 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{L_{\varphi}} \quad ('/\text{Km.}').$$

Sicchè in definitiva il campo normale della declinazione definito dalla [10] viene ad assumere l'andamento indicato dalla figura, dove le isogone sono riportate di grado in grado.

Questi primi risultati dell'elaborazione delle misure magnetiche del primo ordine dell'Istituto Geografico Militare sono molto importanti: con formule semplici si è potuto ottenere una rappresentazione del campo della declinazione che approssima in modo molto soddisfacente l'anda-

mento generale di questo elemento in Italia, e quindi – oltre a costituire il punto di partenza per la determinazione delle anomalie del nostro Paese – ha servito ad indicare il comportamento *regolare* del campo normale.

L'attività dell'Istituto Geografico Militare in questo campo è quindi per esso un'altra fonte di benemerenza nei confronti della Nazione.

BIBLIOGRAFIA

- (1) DUVAL C. R.: *Magnetic Declination in the Pacific from Observations by the Galilee and Carnegie* (« Terrestrial Magnetism », giugno 1939, pagg. 115-136).
 - (2) MATHIAS E., MAURAIN CH. e EBLÉ L.: *Distribution générale des éléments magnétiques en France. Formules représentatives. Définition numérique des anomalies* (« Annales de l'Inst. de Physique du globe », tome VIII, Paris, 1930, pagg. 37-62).
 - (3) MCFARLAND W. N.: *Construction of magnetic charts* (« Terr. Magn. », giugno 1930, pagg. 73-80).
 - (5) NIPPOLDT A.: *Erdmagnetismus und Polarlicht* (in « Einführung in die Geophysik », II, Berlin, 1929).
-

Antropologia. — *Craniografia del secondo paleantropo di Saccopastore*⁽¹⁾. II Nota preliminare⁽²⁾ di SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia⁽³⁾.

In questa Nota presento i craniogrammi da me rilevati sul secondo paleantropo di Saccopastore insieme con la determinazione delle coordinate dei punti craniometrici. L'analisi dei craniogrammi ed i risultati delle mie osservazioni saranno pubblicati in una Memoria in corso di stampa. Lo scopo della Nota è di offrire senza ulteriore indugio agli studiosi alcuni dei dati più interessanti fino ad ora raccolti sul fossile umano.

* * *

Le caratteristiche morfologiche ed architetture del cranio sono messe in evidenza dalle sue curve o craniogrammi che si possono ottenere per proiezione ortogonale dopo averlo fissato in una determinata posizione. Queste curve sono quindi legate alle posizioni che vengono ogni volta prescelte in relazione a criteri definiti di ordine morfologico e funzionale. In varie mie ricerche ho dimostrato la importanza dei sistemi di craniogrammi che hanno quale riferimento l'asse verticale basion-bregma. In particolare ricordo il craniogramma *obliquo* da me denominato *fronto-sagittale asterico* corrispondente ad un piano che taglia obliquamente il cranio passando per il bregma, il basion ed un asterion. Questa sezione da me studiata nei crani di La Chapelle, Gibraltar e Saccopastore I è caratteristica per la forma tipicamente ellittica e per il segmento bregma-asterion, che da solo per le sue proprietà è sufficiente a far distinguere un paleantropo da un fanerantropo⁽⁴⁾. Dal secondo cranio di Saccopastore,

(1) Dall'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(2) Pervevuta all'Accademia il 12 ottobre 1943.

(3) Vedi I Nota: *Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore* in « Rend. Acc. d'Italia », Classe Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, vol. III, 1942.

(4) SERGIO SERGI, *Studio comparativo di crani fossili umani*. (Londra e Parigi 12 sett.-20 ott. 1931). « R. Acc. d'Italia », Fond. A. Volta, Roma, 1933. — *Ossicini fontanellari della regione del lambda nel cranio di Saccopastore e nei crani neandertaliani*. « Riv. di Antropologia », vol. XXX, 1934. — *Gli ominidi*

a causa delle sue mutilazioni, non si possono ottenere craniogrammi con riferimento all'asse basion-bregma, sì che per analizzare gli aspetti della sua architettura mi sono valso di craniogrammi rilevati secondo il metodo di P. ed F. SARASIN seguendo le regole descritte da R. MARTIN nel suo trattato con particolari aggiunte e con orientamento sul piano orbitoauricolare modificato.

Nelle tavole I, II, III, IV sono riprodotte in grandezza naturale tre serie di craniogrammi (sagittali, frontali e orizzontali) del secondo cranio di Saccopastore orientato sul piano orbitoauricolare. Ciascuna delle tre serie comprende un sistema di curve che è costituito dalla proiezione del contorno del cranio corrispondente ad uno dei tre piani fondamentali ortogonali, con cui esso si considera diviso, e dalla proiezione di alcuni contorni paralleli. Le aggiunte da me apportate ai craniogrammi eseguiti secondo le norme del MARTIN sono costituite dalle proiezioni anche dei punti non compresi nel piano della curva, di modo che in ogni craniogramma è individuata la posizione di tali punti rispetto alle tracce dei piani proiettate (¹).

Il cranio è stato orientato nel piano orbitoauricolare, ma con una variante ai punti di riferimento adottati dalla convenzione di Francoforte. Poichè il porion a sinistra manca, il piano orbitoauricolare è stato determinato per necessità con riferimento al porion di destra ed ai due punti orbitali inferiori, il sinistro, ed il destro, si è cioè usato il punto orbitale destro in sostituzione del porion sinistro mancante. Alla asimmetria dipendente dal riferimento unilaterale di un'orbita viene a sostituirsi una asimmetria dipendente dal riferimento unilaterale di un meato uditivo esterno. Il punto orbitale di destra non si trova quasi mai sullo stesso piano di quello di sinistra quando si determina, secondo la regola, il piano orbitoauricolare con i due porion ed il punto orbitario sinistro. Questo è da tener presente per le comparazioni eventuali con i crani che sono stati orientati nel modo usuale. La differenza che ne risulta può indurre in errore nella valutazione comparativa delle asimmetrie, ma non è tale da infirmare in modo generale il valore dell'orientamento. In un mio studio pubblicato nel 1920 (²) feci rilevare il difetto del piano di orientamento orbitoauricolare in quanto che in questo uno dei tre punti di riferimento, quello al margine orbitario inferiore sinistro, è del tutto late-

fossili di forme estinte. Cap. III, vol. I dell'opera: *Le Razze e i popoli della Terra* di RENATO BIASUTTI, U. T. E. T., Torino, 1940. — *I paleantropi italiani*. « Medicina e Biologia », Roma, 1943.

(¹) Per il rilievo dei craniogrammi sono stato validamente coadiuvato dalla mia assistente prof.ssa Jole Pastore.

(²) SERGIO SERGI, *Sul piano orizzontale della visione*. « Riv. di Antropologia », vol. XXIV, 1920-21, Roma.

rale, per cui nell'orientamento ci si riferisce ad una metà della faccia trascurando l'altra metà. Prospettai allora l'opportunità di individuare un punto mediano nella faccia che venisse a trovarsi in una posizione intermedia tra i due punti orbitali inferiori.

Nei craniogrammi raccolti nel modo sopra indicato ho determinato le distanze dei punti proiettati dai tre piani fondamentali ortogonali prescelti cioè dal piano orizzontale orbitoauricolare, dal piano mediano per il nasion, dal piano frontale per il porion destro. Nella tabella che segue sono riportati i valori di queste distanze. Con tali coordinate dei punti craniometrici si ha la rappresentazione architettureale specifica del cranio, se si tiene conto che i punti suddetti sono in parte punti che individuano la posizione delle singole ossa in parte punti che caratterizzano una determinata condizione morfologica intrinseca dell'osso. Dalla ubicazione complessiva di questi diversi punti ne risulta la conoscenza integrale della forma nelle modalità, che la realizzano e la distinguono.

POSIZIONE DEI PUNTI CRANIOMETRICI

Distanze in mm. dei punti craniometrici dai tre piani fondamentali ortogonali nel cranio del secondo paleantropo di Saccopastore orientato sul piano orizzontale orbitoauricolare come è indicato nel testo.

Nota: Quando non è indicato per i punti simmetrici il lato al quale si riferisce la misura si sottintende che questo è il destro. Uso nella terminologia la ortografia italianizzata, ma riporto per le relative abbreviazioni le lettere adottate dal MARTIN per i punti descritti da questo autore nel suo trattato accanto alle abbreviazioni corrispondenti alle sinonimie da me adoperate, quando queste si presentano. Le indicazioni in parentesi corrispondono a quelle adottate per i craniogrammi e valgono quindi per la spiegazione di questi.

	Dal piano trasverso orbitoauricolare	Dal piano mediano per il nasion	Dal piano frontale per il porion destro
	mm.	mm.	mm.
Pterion (<i>pt</i>) anteriore (<i>pta</i>) = sphenion <i>sphn</i>	24,5	43,5	60
» posteriore (<i>ptp</i>) = krotaphion <i>k'</i>	2,5	51,5	36
Asterion (<i>ast</i>)	13,5	56	40,5
Porion (<i>po</i> = <i>fu. s.</i>)	0	58	0
Meato uditivo esterno (<i>fu.</i>)	punto sup. (<i>fu. s.</i> = <i>po</i>)	0	55
	punto inf. (<i>fu. i.</i>)	9	55
	punto ant. (<i>fu. a.</i>)	4	59
	punto post. (<i>fu. p.</i>)	6	59
Apice della piramide (<i>a</i>)	(10)	(13)	(15)
Mastoideale (<i>ms</i>)	24,5	48,5	12
Nasion (<i>n</i>)	26	0	103

Segue: TABELLA

	Dal piano trasverso orbitoauricolare		Dal piano frontale per il porion destro
	mm.	mm.	mm.
Nasospinale (<i>ns</i>)	33	0	106
Prostion (<i>pr</i>)	(60)	1 verso s.	107
Rinion (<i>rh</i>)	0	1 verso d.	111
Dacriion destro (<i>d. d.</i>)	17	16	90
Dacriion sinistro (<i>d. s.</i>)	16	13	92
Ectoconchion (<i>ek</i>)	16	58	74
Orbitale (<i>or</i>)	0	38	87
Zigomascellare superiore (<i>z. m. s.</i>)	0	38	87
Zigomascellare inf. (<i>z. m. i.</i>)	dest. (<i>d</i>)	54	73
	anteriore (<i>a</i>)		
	sin. (<i>s</i>) .	56	79
	dest. (<i>d</i>)	55	70
	medio (<i>m</i>)		
	sin. (<i>s</i>) .	57	75
Zigofrontale (<i>z. f.</i>)	dest. (<i>d</i>)	56	67
	posteriore (<i>p</i>)		
	sin. (<i>s</i>) .	57	72
	esterno (<i>zfe</i>) = frontomale temporale di MARTIN (<i>fmt</i>)	60,5	67
Frontomaxillonasale (<i>fr. ma. na.</i>)	destro (<i>d</i>)	8	99
	sin. (<i>s</i>)	8 (?)	99,5
Zigotemporale (<i>z. t.</i>)	superiore (<i>zts</i>)	62	56,5
	inferiore (<i>zti</i>)	64	46
Meato carotideo inf. (<i>Ca</i>)	punto laterale (<i>l</i>)	29	5
	punto mediale (<i>m</i>)	24	7
	punto anteriore (<i>a</i>)	28	7
	punto posteriore (<i>p</i>)	26	4
Centro cavità articolare	1	47	11
Maxillo frontale destro (<i>mf. d.</i>)	19	14	92

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE I, II, III, IV

Nelle tavole sono riprodotte tre serie di craniogrammi (sagittali tav. I, frontali tav. II e orizzontali tav. III e IV) del secondo cranio di Saccopastore. I craniogrammi sono eseguiti secondo le norme riportate nel testo. I punti proiettati sono indicati con lettere ed abbreviazioni, la cui spiegazione si trova nella tabella che riguarda la *posizione dei punti craniometrici*. Di regola i punti che cadono nel piano nel quale è contenuta la curva sono individuati dall'incontro delle linee di un \times , i punti fuori del piano delle curve da un punto racchiuso in un cerchietto. Con tratteggio particolare sono segnati quei segmenti di curva che cadono in corrispondenza o della roccia che ricopre l'osso o di una superficie di frattura dell'osso.

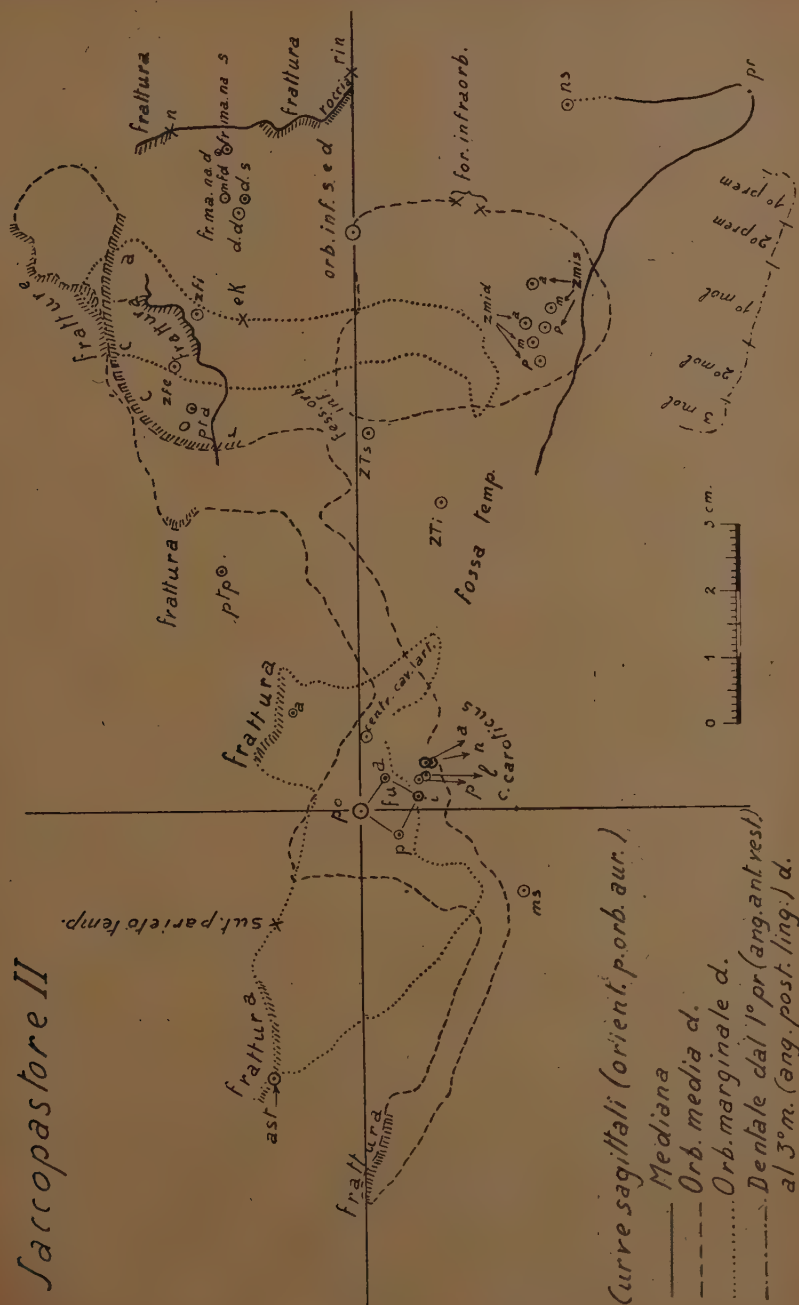
Craniogrammi sagittali. — Tav. I. Curve sagittali: 1° Mediana; 2° Orbitale media destra; 3° Orbitale marginale destra; 4° Dentale destra dal 1° premolare (angolo anteriore vestibolare) al 3° molare (angolo posteriore linguale).

Craniogrammi frontali. — Tav. II. Curve frontali: 1° Auricolare per Po; 2° Frontale anteriore; 3° Frontale per i punti orbitali inferiore sinistro e destro.

Craniogrammi orizzontali. — Tav. III. Curve orizzontali: 1° Orbitoauricolare; 2° Medio orbitale.

Tav. IV. Curve orizzontali: 1° A livello del centro del forame uditivo; 2° A livello del centro dell'apertura piriforme; 3° A livello del margine inferiore destro dell'apertura piriforme; 4° A livello del margine alveolare posteriore.

I craniogrammi della tav. IV ed il craniogramma 4° della tav. I sono costituiti da curve prescelte da me; di queste ho indicato il livello al quale si riferiscono. Tutti gli altri craniogrammi sono quelli consigliati dal MARTIN e vengono indicati con la terminologia di questo autore.



(Curve sagittali (orient. p. orb. aur.)

Mediana

Orb. media d.

Orb. marginale d.

Neutrale dal 1° pr (anq. ant vest.)

at 3°m. (ang. post. ling.) d.

Saccopastore II



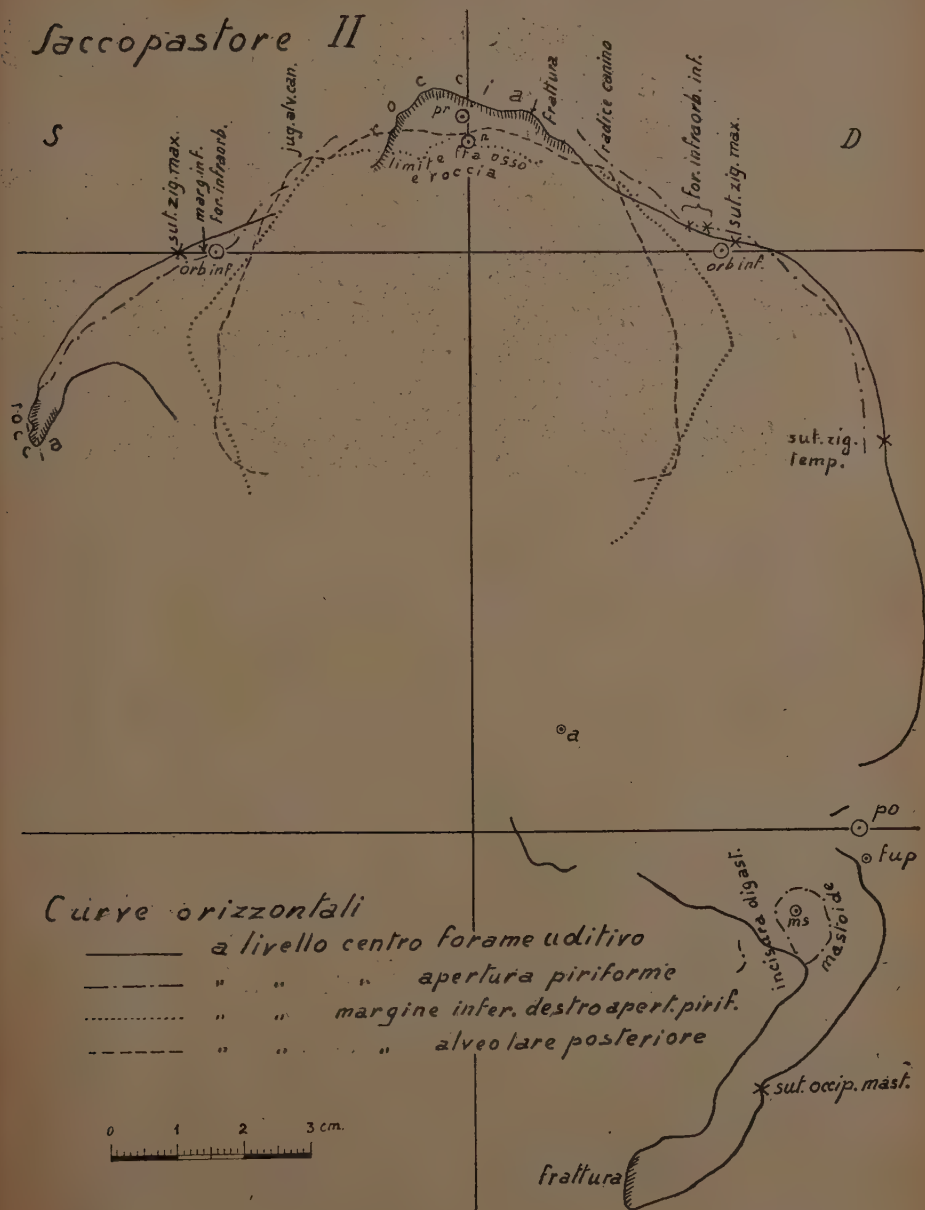
Curve frontali

auricolare
frontale anteriore
per orb. inf. sin. e desf.

Saccopastore II



Saccopastore II



Antropologia. — *Cranimetria ed iconografia del secondo paleantropo di Saccopastore* ⁽¹⁾. III Nota preliminare ⁽²⁾ di SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia ⁽³⁾.

In questa terza Nota pubblico: 1° l'elenco delle misure principali da me compiute sul cranio umano fossile scoperto nella cava di Saccopastore nel 1935 da A. C. BLANC e da BREUIL ⁽⁴⁾; 2° un saggio iconografico del medesimo, con l'intento di dare alcune essenziali documentazioni dell'importante reperto relative allo studio delle sue dimensioni e della sua morfologia, che sono oggetto di un esame particolare ed esteso, analitico e critico, nella Memoria in corso di stampa.

CRANIOMETRIA.

Una delle maggiori difficoltà che si incontrano nello studio dei reperti fossili, e particolarmente in riguardo delle misure e quindi della loro precisione, è dovuta alla circostanza che tutti, in grado maggiore o minore, presentano difetti che non permettono di fare misure assolutamente precise. Anche i resti meglio conservati presentano sempre piccole lacune che obbligano l'osservatore a fissare con il criterio di probabilità la posizione esattamente precisa dei punti di riferimento delle dimensioni da determinare. Si aggiunga per soprappiù che la valutazione degli stessi punti anche nelle condizioni migliori è soggetta ad interpretazioni personali ad onta delle regole che vigono e con le quali si cerca di fissare in modo uniforme e costante la loro posizione, ad onta cioè della così detta standardizzazione dei metodi. Questi difetti e difficoltà, che si oppongono ad una esatta determinazione delle misure, si fanno ancora più gravi per le deformazioni dei reperti, le quali sono il prodotto postumo delle azioni

⁽¹⁾ Dall'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1943.

⁽³⁾ Vedi I Nota: *Sulla morfologia cerebrale del secondo paleantropo di Saccopastore* in « Rend. Acc. d'Italia », Classe Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. III, 1942; II Nota: *Craniografia del secondo paleantropo di Saccopastore*. Ibid., vol. V, 1944.

⁽⁴⁾ Per la bibliografia relativa alla scoperta si veda la Nota I.

che si sono esercitate su di essi nel tempo o sono anche il risultato di ricostruzioni difettose o fantastiche, più frequenti di quanto si possa pensare. L'ingegnosità e l'esperienza del ricostruttore non sono talora sufficienti a portare un controllo obbiettivo alla propria ricostruzione, che è dominata dalla fantasia o da una visione preconcepita dei fatti.

Sono qui riportate le misure fondamentali compiute sul cranio seguendo la tecnica di RUDOLF MARTIN ⁽¹⁾. Altre misure sono state da me usate, ma queste saranno pubblicate nella Memoria definitiva, ad eccezione di qualcuna che viene qui inserita. A fianco di ogni misura è indicato il numero d'ordine secondo l'elenco del MARTIN. Sono anche riportate le abbreviazioni adottate da questo autore per i relativi punti cranio metrici. Il lettore così potrà facilmente orientarsi. La nomenclatura dei punti però è italianizzata quando occorre trascriverli per intero. Per ottenere le misure di larghezza, che richiedono la presenza di due punti laterali omonimi simmetrici, quando uno di questi punti laterali manca a sinistra per la distruzione della regione in questo lato, si è determinata la distanza del punto di destra dal piano mediano e si è raddoppiato questo valore, il quale si può considerare molto prossimo a quello che doveva essere, la piccola differenza essendo rappresentata dalla eventuale asimmetria.

MISURE DEL CRANIO DI SACCOPASTORE II.

Numero d'ordine dell'elenco di MARTIN			
5	Lunghezza della base del cranio, <i>n-ba</i> (?) . . .	mm.	114
9 (1)	Diametro di larghezza postorbitale (metà dest. mm. 52-53).	»	104-106
11	Larghezza biauricolare, <i>au-au</i> (metà dest. mm. 65)	»	130
	Larghezza biporiale, <i>po-po</i> (metà dest. mm. 58)	»	116
12	Larghezza biasterica, <i>ast-ast</i> (metà dest. 56)	»	112
13	Larghezza bimastoidea, <i>ms-ms</i> (metà dest. 48,5)	»	97
35	Angolo del clivus,		59°
36	Angolo sfenoidale di Welcker.		131°
36 ^a	Angolo sfenoidale di Landzert		101°-105°
37 (2)	Angolo della base del cranio		23°
40	Lunghezza della faccia, <i>ba-pr</i>	mm.	117
41	Lunghezza laterale della faccia <i>ek-po</i>	»	76
43	Larghezza superiore della faccia, <i>fml-fml</i> (metà dest mm. 60).	»	120

Questa distanza è quella che corrisponde alla definizione di MARTIN per *fml*, il quale si dovrebbe trovare,

(1) RUDOLF MARTIN, *Lehrbuch der Anthropologie*, Jena, Fischer, 2^a edizione.

secondo questo autore « dove la superficie laterale del processo zigomatico del frontale passa nella superficie posteriore » ma tale specificazione può contrastare, come ha fatto notare MORANT (*The Rhodesian skull*, pag. 559) con l'altra indicazione che il punto stesso si deve trovare in corrispondenza del punto più laterale della sutura frontomolare. In Saccopastore difatti il punto definito nel primo modo dal MARTIN non coincide con il punto più lateralizzato della sutura. Indico in questo caso il punto più laterale come frontomolare medio. Da questo punto è stata presa la misura che segue.

Larghezza fra i frontomolari medi (metà dest. mm. 63) (Larghezza biorbitale esterna).

43 (1)	Larghezza biorbitale interna della faccia <i>fmo-fmo</i>	mm.	118
44	Larghezza biorbitale <i>ek-ek</i> (metà dest. mm. 58)	mm.	116
44 a	Larghezza biorbitale esterna fra i punti più esterni dei margini laterali delle orbite (metà destra mm. 58) coincide con la precedente		116
44 (1)	Curva nasomolare (metà destra mm. 65)		136
45	Larghezza bizigomatica, <i>zy-zy</i> (metà destra mm. 70)		140
46	Larghezza bimascellare massima, <i>zm-zm</i>		112
48	Altezza superiore della faccia, <i>n-pr</i>		87
48 (1)	Altezza della parte alveolare della faccia, <i>na-pr</i>		27
48 (3)	Altezza orbitoalveolare minima		59
48 (5)	Distanza proiettiva nasion-margine infraorbitale		27
	Larghezza bizigomatica, <i>cti-cti</i> (metà dest. 64)		128
49	Larghezza posteriore interorbitale, <i>la-la</i>		30-31
50	Larghezza anteriore interorbitale, <i>mf-mf</i>		25-26
51	Larghezza orbitale a destra dal <i>mf</i>		49
51 a	Larghezza orbitale a destra dal <i>d</i>		47
51 b	Larghezza orbitale a destra dal <i>la</i>		44
52	Altezza orbitale		38-39
53 (2)	Indice di superficie dell'apertura dell'orbita 51 - 52	mmq.	1862-1911
54	Larghezza nasale	mmq.	34
55	Altezza nasale		59-60
56	Lunghezza delle ossa nasali		29 <i>mm</i> , 31 <i>mm</i>
56 (1)	Lunghezza della curva delle ossa nasali		32 <i>mm</i>
57 (2)	Larghezza superiore delle ossa nasali		18
57 (3)	Larghezza inferiore delle ossa nasali		22 <i>mm</i>
60	Lunghezza maxilloalveolare		63
61	Larghezza maxilloalveolare		72
62	Lunghezza del palato		57
63	Larghezza del palato		41
64	Altezza del palato		19
72	Angolo del profilo totale <i>n-pr</i> sul p. orb. an.		87
72 (4)	Angolo di profilo di Virchow, linea <i>n-pr</i> e linea centro foro auditivo - <i>pr</i>		99

72 (5)	Angolo al <i>pr</i> del triangolo facciale <i>n-pr-ba</i> . . .	65° 1/2
73	Angolo del profilo nasale.	87°
74	Angolo del profilo alveolare	87°
75	Angolo del profilo del dorso del naso (probabile)	61°
	Angolo del profilo della metà superiore del dorso del naso	84°
76 (1)	Angolo orbito-canino	83°
77	Angolo del profilo trasversale superiore della fac- cia <i>fmo-n-fmo</i> calcolato sulla inclinazione del lato destro.	130°
78	Angolo di inclinazione sagittale del piano di apertura dell'orbita destra	96°
78 (1)	Angolo di inclinazione frontale del piano di apertura dell'orbita destra. Incl. di <i>mf-ek</i>	29°(28° 1/2)
78 (2)	Angolo di inclinazione orizzontale del piano di apertura dell'orbita destra. Incl. di <i>mf-ek</i>	(3°)
	Angolo di inclinazione orizzontale del piano di apertura dell'orbita destra. Incl. di <i>d-ek</i>	(1°)
80	Lunghezza dell'arcata dentale mascellare . . .	mm. (58)
80 (1)	Larghezza dell'arcata dentale mascellare. . . .	» 67
80 (2)	Lunghezza dentale.	» 43
80 (3)	Lunghezza dei molari	» 30

INDICI DEL CRANIO FACCIALE.

Indice facciale superiore	$\frac{48 \times 100}{45}$	62,14	Iperlepteno secondo la nomenclatura di KOLLMANN, iperleptoprosopo secondo quella di HOLL.
Indice orbitale	$\frac{52 \times 100}{51}$	77-79,59	Mesoconco più vicino alla cammeconchia.
Indice orbitale	$\frac{52 \times 100}{51 b}$	86-88	Ipsiconco secondo la divisione di TÖRÖK.
Indice interorbitale . .	$\frac{50 \times 100}{44}$	20,8-21,6	
Indice interorbitale . .	$\frac{49 \times 100}{43 (1)}$	25-25,8	
Indice nasomolare superiore	$\frac{44 (1) \times 100}{44}$	108,33	Mesopico.
Indice nasale	$\frac{54 \times 100}{55}$	57,6-56,6	Camerrino ai limiti della ipercamerrinia.
Indice dell'apertura piriforme	$\frac{54 \times 100}{55 (1)}$	103,03	
Indice sagittale delle ossa nasali	$\frac{56 \times 100}{56 (1)}$	90,6	
Indice maxillo-alveolare	$\frac{61 \times 100}{60}$	114,28	Mesouranico ai limiti della brachiurania.
Indice palatino	$\frac{63 \times 100}{62}$	71,9	Leptostafilino.
Indice gnatico	$\frac{40 \times 100}{5}$	103,47	
Indice dell'arco dentale	$\frac{80 (1) \times 100}{80}$	115,51	
Indice dentale	$\frac{80 (2) \times 100}{5}$	37,71	Microdonte secondo la nomenclatura di FLOWER.

ICONOGRAFIA.

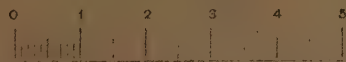
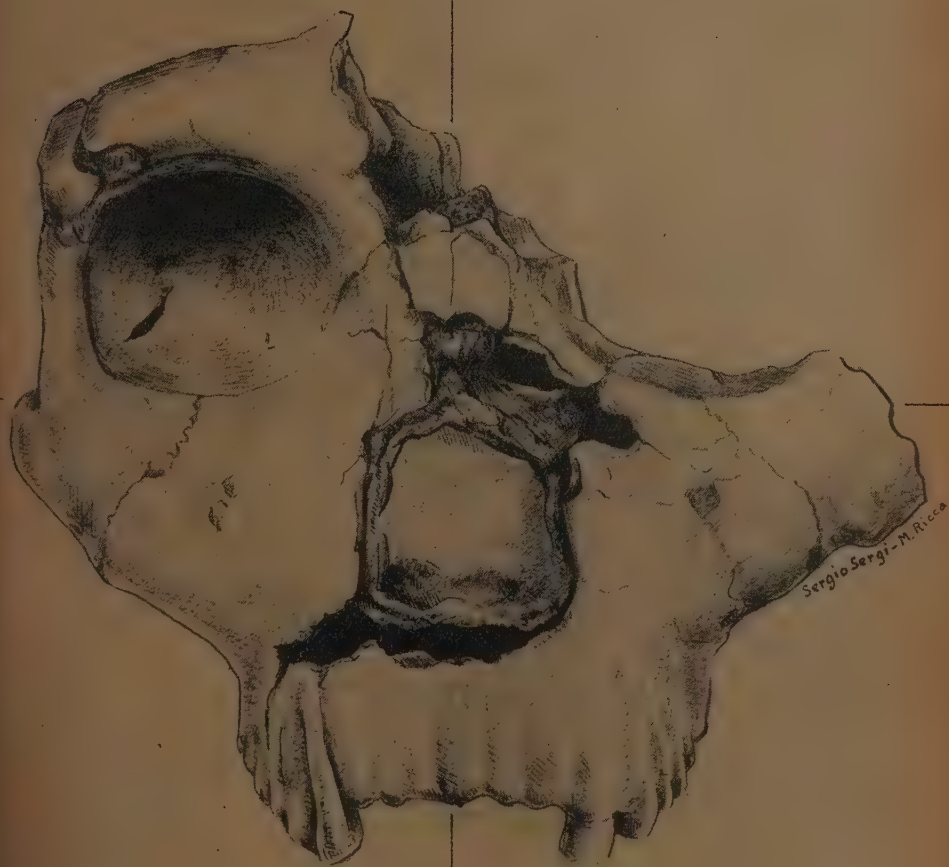
La iconografia di questa Nota è costituita da cinque disegni del fossile eseguiti con particolare abilità per mezzo del dioptografo dalla signorina MARIA RICCA sotto la mia guida ed il mio diretto e continuo controllo. Il lavoro ha richiesto molta pazienza e molto tempo.

I disegni danno l'immagine del cranio orientato sul piano orbitoauricolare secondo cinque norme: la facciale (tav. I), la laterale destra (tav. II), la laterale sinistra (tav. III) la verticale, (tav. IV), la basale

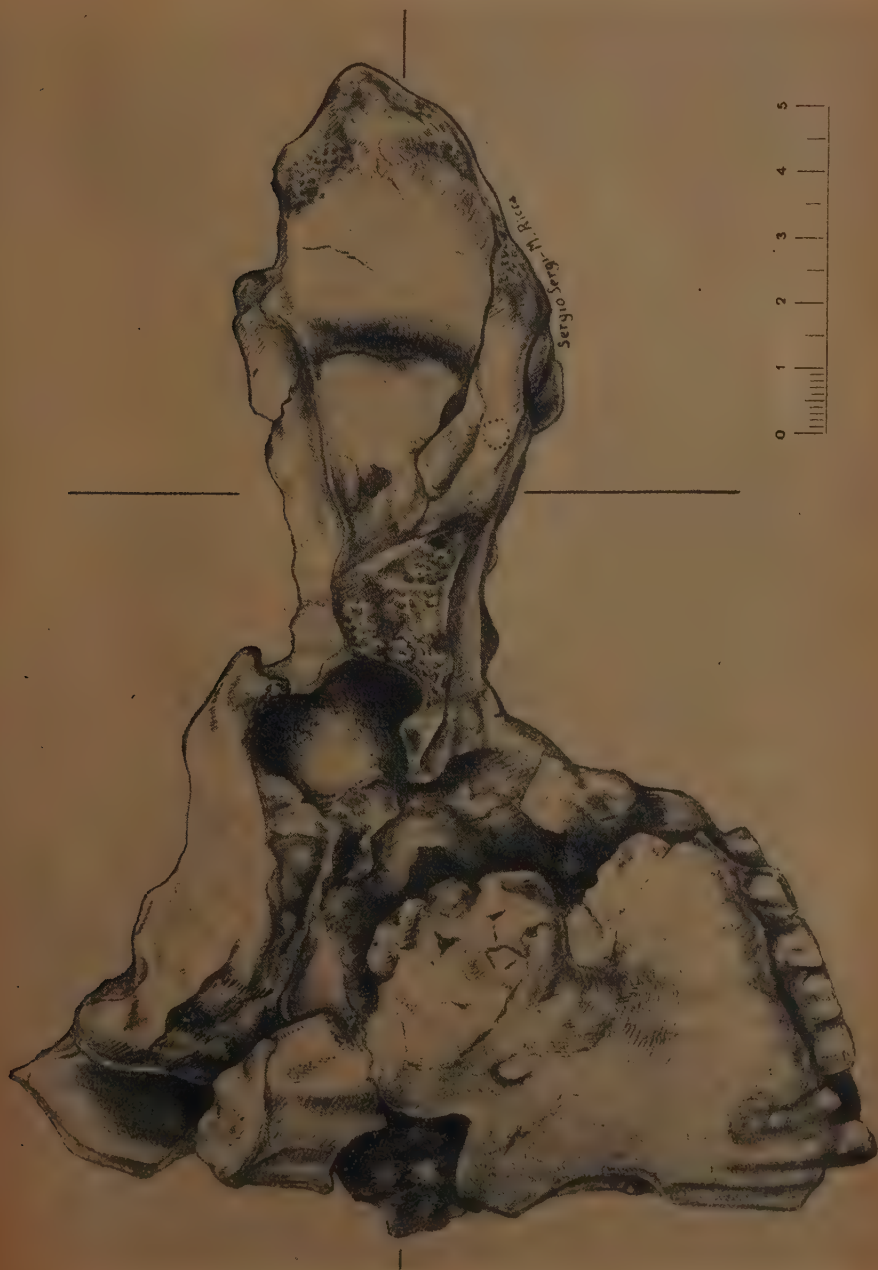
(tav. V). Essi costituiscono un utile complemento delle fotografie, perchè mettono in evidenza particolari che con queste non è sempre possibile prospettare.

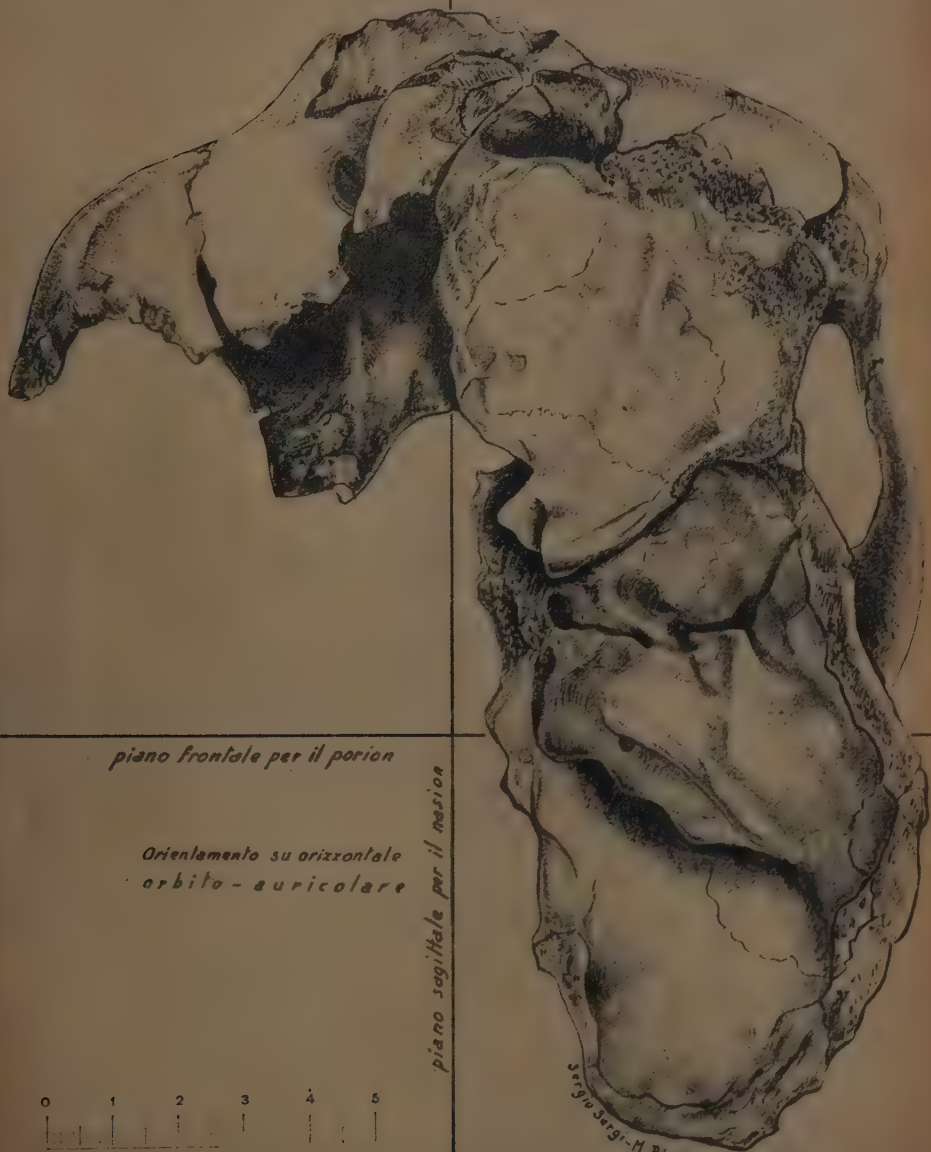
Il cranio, che appartiene ad un individuo adulto probabilmente di sesso maschile, è incompleto. Raccolto in vari frammenti ed ora ricostruito risulta conservato in gran parte della porzione facciale, più completamente a destra, e nella sola parte basale destra, anche questa incompleta, della porzione cerebrale. Sono bene conservati i molari, i premolari di destra, il secondo premolare di sinistra ed i canini. È distrutta la corona del primo premolare sinistro, sono perduti gli incisivi.

Le figure sono in grandezza naturale e danno una visione adeguata delle caratteristiche morfologiche, sì che il loro esame può, sotto certi riguardi, non solo sostituire ogni migliore descrizione, ma è da preferire alla stessa, perchè l'osservatore a prima vista in forma intuitiva compie contemporaneamente un lavoro di analisi e di sintesi che facilita la rapidità e la sicurezza del giudizio. Con ciò non si vuole svalutare l'importanza fondamentale dell'analisi minuta e sistematica della descrizione, che facilita il compito dell'esame delle figure portando l'attenzione in profondità su ogni minimo particolare. Questa analisi come si è detto non è trascurata ed è oggetto della estesa pubblicazione in corso di stampa; le figure che presento, frattanto, potranno soddisfare al desiderio degli studiosi che attendono da tempo di prendere conoscenza dell'importante documento umano.





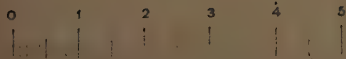




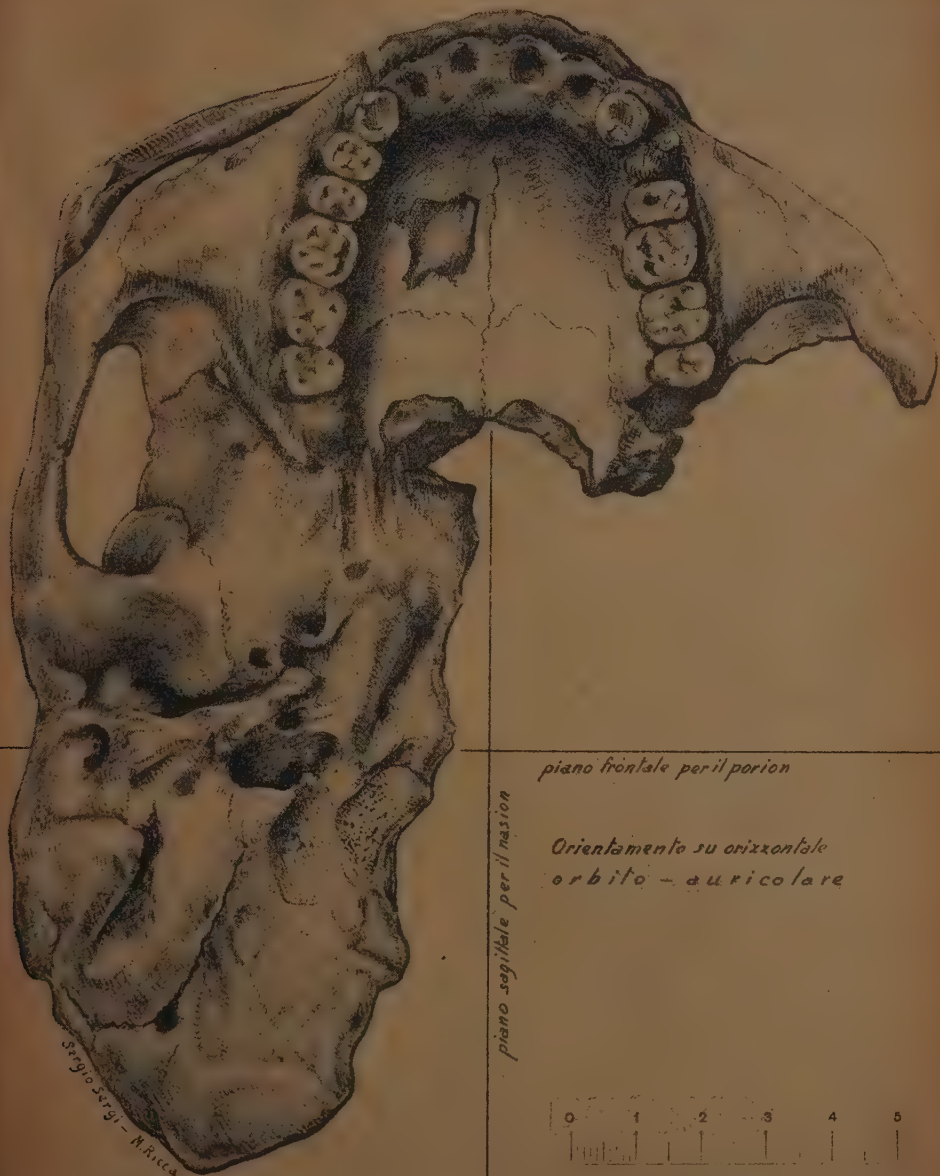
piano frontale per il porion

*Orientamento su orizzontale
orbito - auricolare*

piano sagittale per il nasion



Sergio Sergi - M. Ricca





3 8198 304 934 910

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

